Производная и дифференциал.

Производные высших порядков.

- *n*-ой производной (или производной *n*-го порядка) функции $f(x)$ в точке x называется производная от производной $(n-1)$-го порядка в точке x.

$$\boxed{y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'}$$

Обозначение: $y^{(n)}, \quad f^{(n)}(x), \quad \dfrac{d^n y}{dx^n}$

$$y'' = (y')'$$ вторая производная

Обозначения: $y'', \quad f''(x), \quad \dfrac{d^2 y}{dx^2}, \quad \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right), \quad \dfrac{dy'}{dx}$

$$y', \quad y'', \quad y''', \quad y^{IV}, \quad y^{V}, \ldots, \quad y^{(n)}$$

или

$$y', \quad y'', \quad y''', \quad y^{(4)}, \quad y^{(5)}, \ldots, \quad y^{(n)}$$

1. Найти производную второго порядка: $y = \arcsin\frac{x}{2}$

$$y' = \left(\arcsin\frac{x}{2}\right)' = \left[(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\right] = \left(\frac{x}{2}\right)' \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$y'' = \left(\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\right)' = \left[\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}\right] = -\frac{\left(\sqrt{4-x^2}\right)'}{4-x^2} =$$

$$= \left[\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}\right] = -\frac{\left(4-x^2\right)'}{\left(4-x^2\right)\cdot 2\cdot\sqrt{4-x^2}} = -\frac{-2x}{2\cdot\left(4-x^2\right)\cdot\sqrt{4-x^2}} =$$

$$= \frac{x}{\left(4-x^2\right)\cdot\sqrt{4-x^2}}$$

2. Найти *n*-ую производную: $y = e^{2x}$

$$y' = \left(e^{2x}\right)' = \left[\left(e^{u}\right)' = u'e^{u}\right] = (2x)' e^{2x} = 2e^{2x}$$

$$y'' = \left(2e^{2x}\right)' = 4e^{2x}$$

$$y''' = \left(4e^{2x}\right)' = 8e^{2x}$$

$$y^{IV} = \left(8e^{2x}\right)' = 16e^{2x}$$ и т.д.

Ответ: $y^{(n)} = 2^{n} e^{2x}$

3. Найти *n*-ую производную: $y = \ln x$

$$y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$y'' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$y''' = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = \left[\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}\right] = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

$$y^{IV} = \left(\frac{2}{x^3}\right)' = -\frac{2\cdot 3x^2}{x^6} = -\frac{2\cdot 3}{x^4}$$

$$y^{V} = \left(-\frac{2\cdot 3}{x^4}\right)' = \frac{2\cdot 3\cdot 4x^3}{x^8} = \frac{2\cdot 3\cdot 4}{x^5}$$

и т.д.

$$\boxed{y^{(n)} = (-1)^{n+1}\cdot\frac{(n-1)!}{x^n}}$$

4. Найти производную 10-го порядка: $y = \sin x$

$$y' = (\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'' = (\cos x)' = -\sin x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot 2\right)$$

$$y''' = (-\sin x)' = -\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot 3\right)$$

$$y^{IV} = (-\cos x)' = \sin x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot 4\right)$$

и т.д.

$$y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot n\right)$$

Тогда

$$y^{(10)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot 10\right) = \sin(x + 5\pi) = \sin(x + \pi) = -\sin x$$

Ответ: $y^{(10)} = -\sin x$

Производная высших порядков неявно заданной функции.

5. Найти y''', если $x^2 + y^2 = 1$

1) $\left(x^2 + y^2\right)' = 1'$

$$2x + 2y \cdot y' = 0$$

$$y' = -\frac{x}{y}$$

$$2)\quad y'' = \left(-\frac{x}{y}\right)' = -\frac{x'\cdot y - x\cdot y'}{y^2} = -\frac{y - x\cdot\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2} =$$

$$= -\frac{y^2 + x^2}{y^3} = -\frac{1}{y^3}$$

$$3)\quad y''' = \left(-\frac{1}{y^3}\right)' = \frac{\left(y^3\right)'}{y^6} = \frac{3y^2\cdot y'}{y^6} = \frac{3\cdot\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^4} = -\frac{3x}{y^5}$$

Производная высших порядков от функции, заданной параметрически.

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

$$\boxed{y''_{xx} = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}}$$

или

$$\boxed{y''_{xx} = \frac{y''_t \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_t}{\left(x'_t\right)^3}}$$

6. Найти y''_{xx}, если $\begin{cases} x = \ln t \\ y = \arctan t \end{cases}$

$$x'_t = (\ln t)' = \frac{1}{t} \qquad y'_t = (\arctan t)' = \frac{1}{1+t^2}$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{1}{1+t^2} : \frac{1}{t} = \frac{t}{1+t^2}$$

$$\boxed{y''_{xx} = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}} = \left(\frac{t}{1+t^2}\right)' \cdot \frac{1}{1/t} = \frac{t' \cdot \left(1+t^2\right) - t \cdot \left(1+t^2\right)'}{\left(1+t^2\right)^2} \cdot t =$$

$$= \frac{1+t^2-2t^2}{\left(1+t^2\right)^2} \cdot t = \frac{\left(1-t^2\right) \cdot t}{\left(1+t^2\right)^2}$$

Ответ: $y''_{xx} = \dfrac{\left(1-t^2\right) \cdot t}{\left(1+t^2\right)^2}$

7. Найти y''_{xx} в точке t=1, если $\begin{cases} x = t^2 + 3t + 1 \\ y = 2t^3 - 1 \end{cases}$

$$x'_t = 2t + 3 \qquad y'_t = 6t^2$$

$$x''_t = 2 \qquad y''_t = 12t$$

$$= \frac{12t \cdot (2t+3) - 6t^2 \cdot 2}{(2t+3)^3} = \frac{12t \cdot (t+3)}{(2t+3)^3}$$

$$y''_{xx}\Big|_{t=1} = \frac{12 \cdot 4}{5^3} = \frac{48}{125}$$

Ответ: $y''_{xx}\Big|_{t=1} = \dfrac{48}{125}$

8. Найти y''_{xx}, если $\begin{cases} x = \cos t + \sin t \\ y = \sin 2t \end{cases}$

Ответ: 2

Физический смысл второй производной

Среднее ускорение точки за время Δt:

$$a_{cp}(\mathrm{t}_0; t) = \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Ускорением точки в момент времени t:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} a_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t) = \left(s'(t)\right)' = s''(t)$$

или

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} a_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

- Ускорение прямолинейного движения точки в данный момент времени равно второй производной пути по времени.

$$\boxed{a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t) = s''(t)}$$

Пример 9. Найти скорость *v* и ускорение *a* свободно падающего тела, если зависимость расстояния от времени t дается формулой

$$(*) \qquad s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + s_0 \quad (s - (m), \quad t - (cek))$$

где $g = 9{,}8\ m/cek^2$ - ускорение свободного падения, а

$s_0 = s|_{t=0}$ - значение *s* при t=0

$$(**)\qquad v = s'(t) = gt + v_0 \qquad \Rightarrow \qquad v_0 = v\big|_{t=0}$$

$$a = v'(t) = s''(t) = g$$

Замечание. Обратно, если ускорение некоторого движения постоянно и равно g, то скорость выражается равенством (**), а расстояние- равенством (*) при условии, что

$$s\big|_{t=0} = s_0 \qquad \text{и} \qquad v\big|_{t=0} = v_0$$