

СРЕДНИЕ ВЕЛИЧИНЫ

Средние величины - это обобщающие показатели, в которых находят выражение действия общих условий, закономерности изучаемых явлений.

Статистические средние рассчитываются на основе **массовых данных**.

Выделим следующие понятия и обозначения:

\bar{X} - осредняемый признак (признак по которому находится средняя);

X_i или x_1, x_2, \dots, x_n – индивидуальное значение осредняемого признака у каждой единицы или вариант;

f_i - частота - повторяемость индивидуальных значений признака (его вес);

W_i - частность – относительная частота, т.е. отношение частоты повторения индивидуального значения признака к сумме частот.

$$W_i = \frac{f_i}{\sum_{i=1}^n f_i}$$

n – число вариантов.

a) Средняя арифметическая

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad \text{- средняя арифметическая простая;}$$

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i f_i}{\sum_{i=1}^n f_i} \quad \text{- средняя арифметическая взвешенная;}$$

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i w_i}{\sum_{i=1}^n w_i} \quad \text{- средняя арифметическая доли}$$

Например: определить среднюю заработную плату работников турфирмы, если имеются следующие данные:

Заработная плата работников, тыс. руб.	Число человек
до 5	5
5-7	7
7-9	8
9-11	11
свыше 11	9

Решение:

Для вычисления средней заработной платы составим расчетную таблицу:

Заработная плата работников, тыс. руб.	Число человек	Расчетные показатели	
		X'	$X'f_i$
до 5	5	4	20
5-7	7	6	42
7-9	8	8	64
9-11	11	10	110
свыше 11	9	12	108
Итого	40	-	344

Определим среднюю заработную плату по формуле средней арифметической взвешенной:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i f_i}{\sum_{i=1}^n f_i}$$

Получаем:

$$\bar{X} = \frac{344}{40} = 8,6 \text{ тыс. руб.} \quad \text{— средняя заработная плата работников турфирмы.}$$

Основные свойства средней арифметической:

1. Средняя от постоянной величины равна ей самой:

$$\bar{A} = A$$

2. Произведение средней на сумму частот равно сумме произведений вариантов на частоты:

$$\bar{X} \sum f = \sum xf$$

3. Изменение каждого варианта на одну и ту же величину изменяет среднюю на ту же величину:

$$\frac{\sum (x \pm A) f}{\sum f} = \overline{X} \pm A$$

4. Изменение каждого варианта в одно и то же число раз изменяет среднюю во столько же раз:

$$\frac{\sum Ax f}{\sum f} = A \overline{X}$$

5. Изменение каждого из весов в одно и то же количество раз не изменяет величины средней:

$$\frac{\sum x(Af)}{\sum Af} = \frac{A \sum xf}{A \sum f} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \bar{X}$$

6. Алгебраическая сумма отклонений всех вариантов от средней равна нулю:

$$\sum (x - \bar{X})f = 0$$

7. Средняя суммы равна сумме средних:

$$\overline{X + Y} = \overline{X} + \overline{Y}$$

8. Сумма квадратов отклонений вариантов от средней арифметической меньше, чем от любой другой величины:

$$\sum (x - \overline{X})^2 = \min$$

б) Средняя гармоническая

Средняя гармоническая – это величина, обратная средней арифметической. Она применяется, когда статистическая информация не содержит частот по определенным вариантам совокупности, представлена как их произведение.

$$\overline{X} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} \quad - \text{ средняя гармоническая простая;}$$

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i}{\sum_{i=1}^n \frac{f_i}{x_i}}$$

- средняя гармоническая
взвешенная (можно определить
частоту или вес);

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i}{\sum_{i=1}^n \frac{w_i}{x_i}}$$

- средняя гармоническая
доли (можно определить
часть)

Например: Определить среднюю цену изделия, если:

Вид изделия	Цена изделия, руб.	одного тыс.	Стоимость всех изделий, тыс. руб.
А	4		80
Б	8		240
В	10		600

Воспользуемся средней гармонической:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i}{\sum_{i=1}^n \frac{f_i}{x_i}}$$

Средняя цена изделия:

$$\bar{X} = \frac{80 + 240 + 600}{\frac{80}{4} + \frac{240}{8} + \frac{600}{10}} = 8,364 \text{ тыс. руб.}$$

Определить среднюю во многих случаях удобнее через *исходное соотношение средней (ИСС)* или ее логическую формулу:

ИСС =

$$= \frac{\text{Суммарное значение или объем осредняемого признака}}{\text{Число единиц или объем совокупности}}$$

Пример:

Рассчитать среднюю заработную плату работников в целом по трем предприятиям сферы обслуживания.

Численность персонала, чел.	Месячный фонд заработной платы, тыс. руб.	Средняя заработная плата, тыс. руб.
1	2	3
540	5648,4	10,46
275	3327,5	12,10
458	5175,4	11,30
1273	14151,3	

Средняя заработная плата может быть получена через следующее соотношение:

$$ИСС = \frac{\text{Совокупный фонд заработной платы}}{\text{Общая численность персонала}}$$

1. Предположим, что мы располагаем только данными гр. 1 и 2 ., тогда:

$$\bar{X} = \frac{14151,3}{1273} = 11,12 \quad \text{тыс. руб.}$$

2. Если мы располагаем данными о средней заработной плате и численности работников (гр. 1 и 3), то средняя может быть рассчитана следующим образом:

$$\bar{X} = \frac{10,46 \cdot 540 + 12,10 \cdot 275 + 11,30 \cdot 458}{1273} = 11,12$$

тыс. руб.

3. Допустим , что в нашем распоряжении только данные о фонде заработной платы и средней численности персонала (гр. 2 и 3), средняя заработная плата:

$$\bar{X} = \frac{14151,3}{\frac{5648,4}{10,46} + \frac{3327,5}{12,10} + \frac{5175,4}{11,30}} = 11,12$$

тыс. руб.

в) Средняя геометрическая

Средняя геометрическая величина используется также для определения равноудаленной величины от максимального и минимального значений признака.

$$\overline{X} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$$

Например, страховая фирма заключает договоры на оказание клиентам различных услуг медицинского страхования. В зависимости от категории медицинского учреждения, ассортимента услуг, конкретного рискованного случая страховая сумма выплат может изменяться от 100 до 10000 долл. В год.

Средняя сумма выплат по страховке:

$$\sqrt{100 \cdot 10000} = 1000 \quad \text{долл.}$$

г) Средняя квадратическая

Формула средней квадратической используется для измерения степени колеблемости индивидуальных значений признака вокруг средней арифметической в рядах распределения.

$$\overline{X} = \sqrt{\frac{\sum X^2}{n}}$$