

3. ВЕКТОРЫ

И

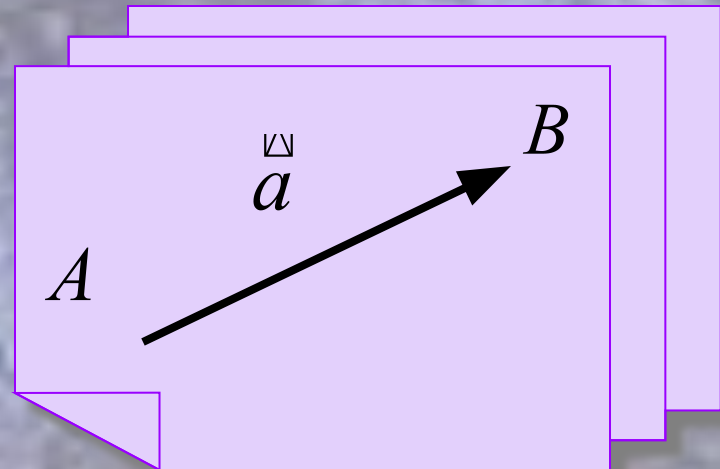
ДЕЙСТВИЯ

НАД НИМИ

3.1. ВЕКТОРЫ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

Направленный отрезок, на котором заданы начало, конец и направление, называется вектором.

Обозначается: \overline{a} ; \overrightarrow{AB}



Длиной или модулем вектора называется расстояние между его началом и концом.

Обозначается: $\left| \vec{a} \right| ; \left| \overrightarrow{AB} \right|$

Векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются коллинеарными.

Если начало и конец вектора совпадают, то вектор называется нулевым.

В любой системе отсчета вектор характеризуется своими координатами.

Пусть в системе отсчета XYZ заданы координаты начала и конца вектора:

$$A(x_1, y_1, z_1) \quad B(x_2, y_2, z_2)$$

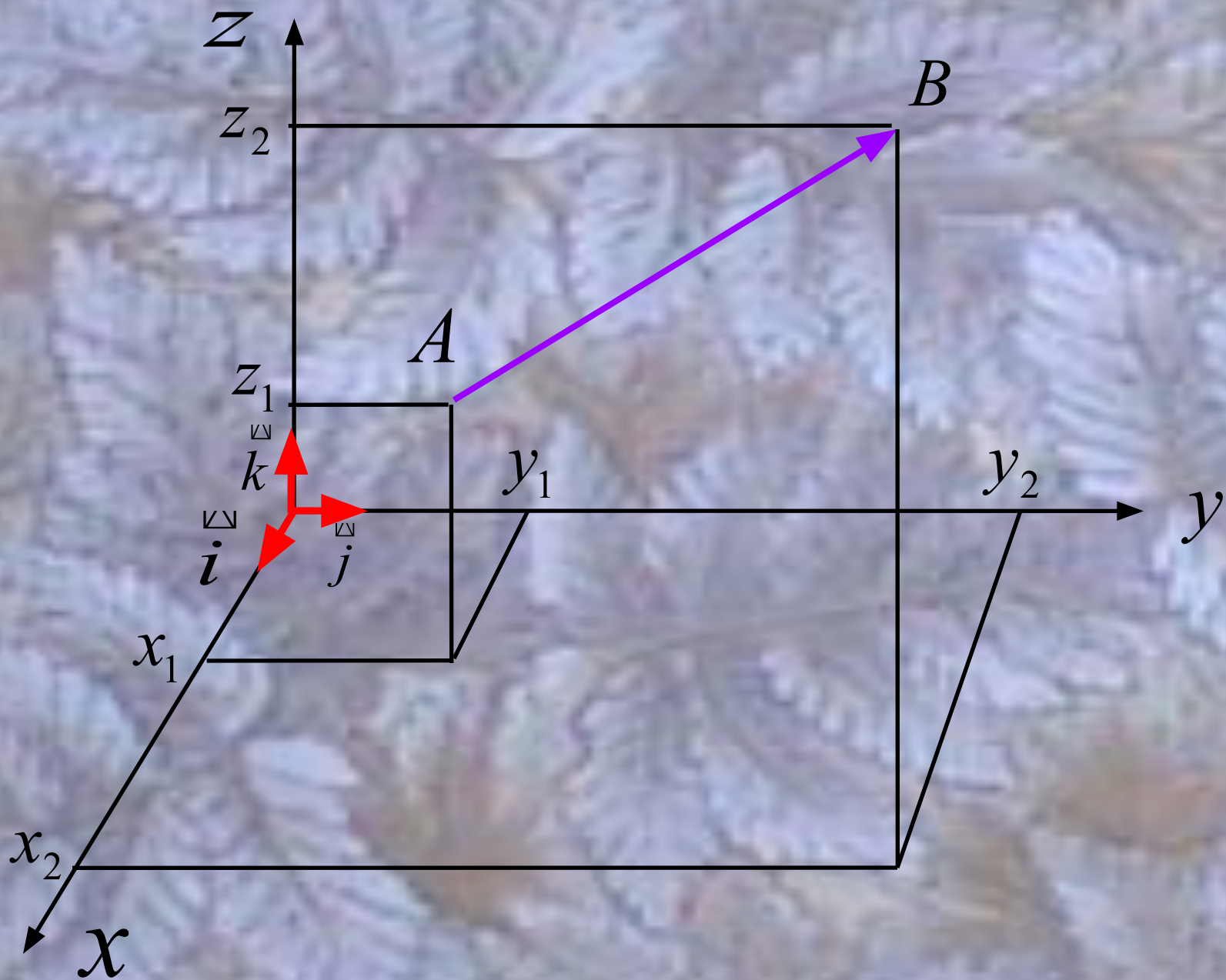
Тогда координаты вектора будут:

$$\overrightarrow{AB} = (x, y, z)$$

Где: $x = x_2 - x_1$ Или: $\overrightarrow{AB} = x \cdot \overset{\boxtimes}{i} + y \cdot \overset{\boxtimes}{j} + z \cdot \overset{\boxtimes}{k}$

$$y = y_2 - y_1$$

$$z = z_2 - z_1$$



Длина вектора определяется по формуле:

$$\begin{aligned} |\vec{AB}| &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \\ &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{aligned}$$

Пусть два вектора заданы своими координатами:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

Если эти вектора коллинеарны, то их соответствующие координаты должны быть пропорциональны:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$$

Условие коллинеарности векторов

Суммой двух векторов будет вектор, координаты которого равны суммам соответствующих координат исходных векторов.

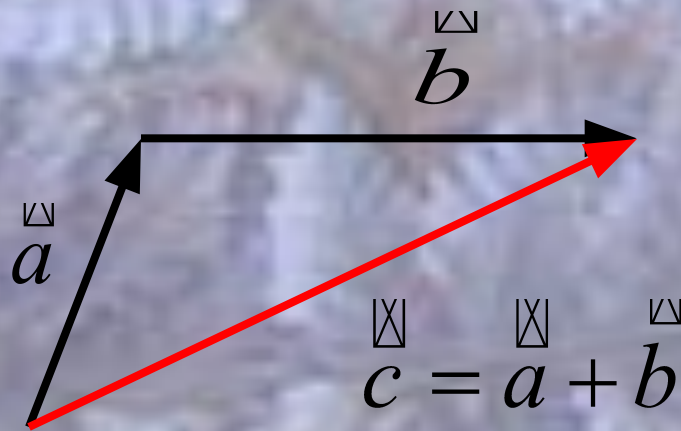
$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$$

$$c_1 = a_1 + b_1 \quad c_2 = a_2 + b_2 \quad c_3 = a_3 + b_3$$

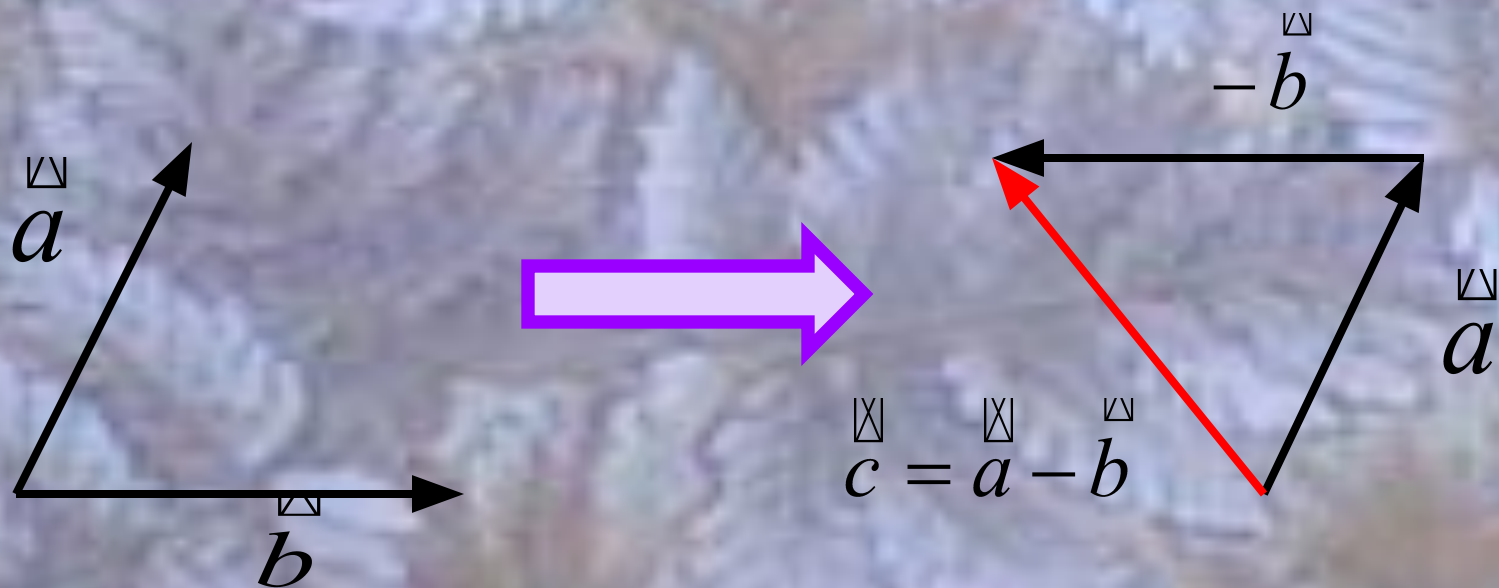
Для построения суммы векторов, нужно совместить конец первого вектора с началом второго. Тогда вектор их суммы будет направлен от начала первого вектора к концу второго:



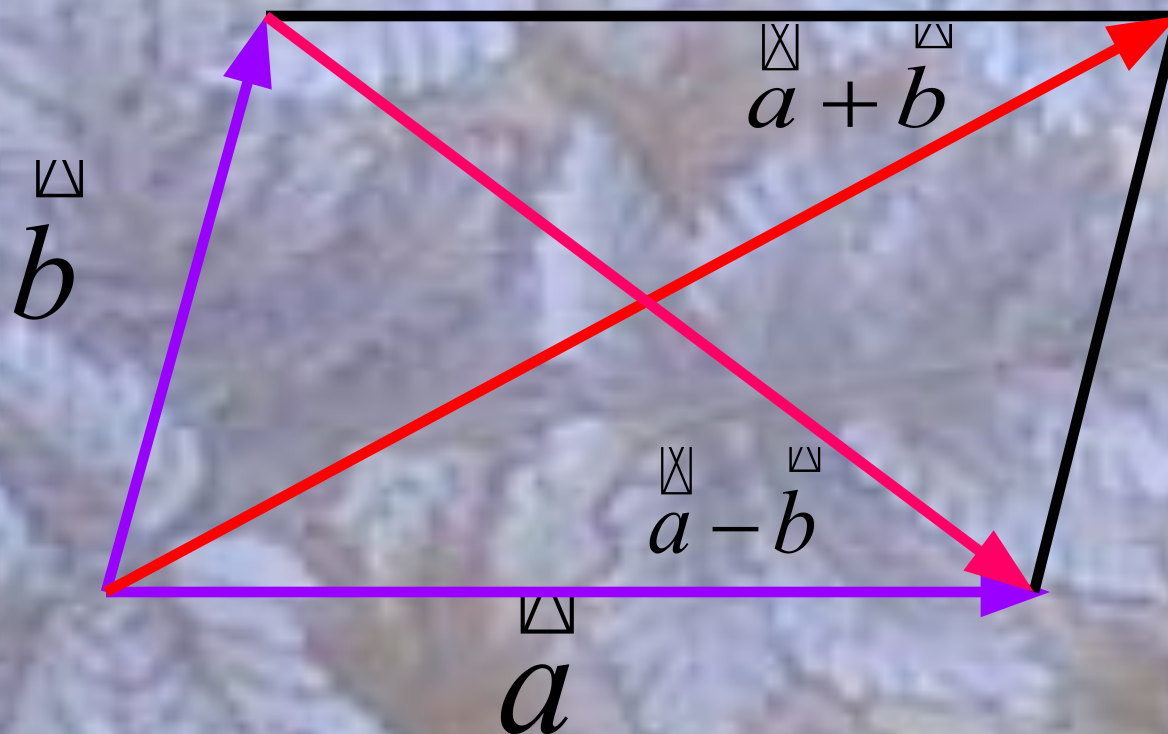
Аналогично определяется сумма нескольких векторов.

Разностью двух векторов $\vec{a} - \vec{b}$

называется сумма векторов $\vec{a} + (-\vec{b})$



В параллелограмме, построенном на двух векторах, одна диагональ представляет собой сумму этих векторов, а другая – разность:



Произведением вектора на число будет вектор, координаты которого равны произведению соответствующих координат исходного вектора на это число.

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\vec{a} \cdot \lambda = \vec{c}$$

$$\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$$

$$c_1 = a_1 \cdot \lambda \quad c_2 = a_2 \cdot \lambda \quad c_3 = a_3 \cdot \lambda$$

*Геометрически смысл умножения
вектора*

*на число заключается в увеличении его
длины в λ раз, если $|\lambda| > 1$, и в ее
сокращении
во столько же раз при $|\lambda| < 1$.*

Свойства операций сложения и умножения вектора на число



$$\overline{\times} \quad \overline{\nabla} \quad \overline{\nabla} \quad \overline{\times}$$
$$a + b = b + a$$



$$\overline{\times} \quad \overline{\nabla} \quad \overline{\times} \quad \overline{\times} \quad \overline{\nabla} \quad \overline{\times}$$
$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

3

$$\alpha(\beta \overset{\sphericalangle}{a}) = (\alpha\beta) \overset{\sphericalangle}{a}$$

4

$$(\alpha + \beta) \overset{\sphericalangle}{a} = \alpha \overset{\sphericalangle}{a} + \beta \overset{\sphericalangle}{a}$$

5

$$(\overset{\boxtimes}{a} + \overset{\sphericalangle}{b}) \overset{\boxtimes}{\alpha} = \overset{\boxtimes}{\alpha} \overset{\sphericalangle}{a} + \overset{\sphericalangle}{\alpha} \overset{\boxtimes}{b}$$

Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\angle \vec{a}, \vec{b})$$

Если два вектора заданы своими координатами:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

То скалярное произведение выразится следующим образом:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Отсюда можно выразить угол между двумя векторами:

$$\cos(\angle \vec{a} ; \vec{b}) = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Если два вектора перпендикулярны, то их скалярное произведение должно быть равно нулю:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$$

Условие перпендикулярности
векторов