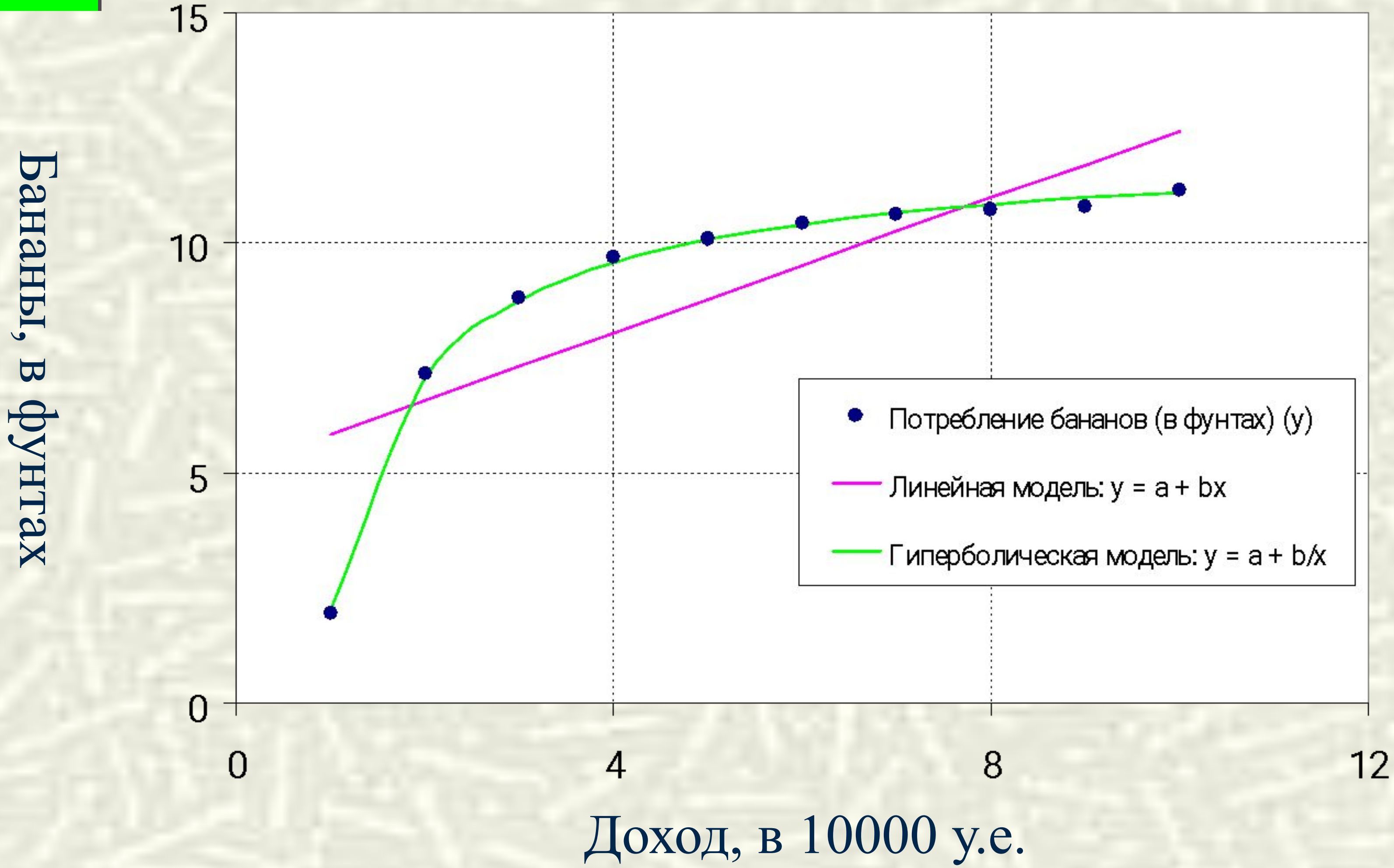
Преобразование переменных в парной регрессии

Лекция

Цели лекции

- Понять смысл нелинейной регрессии
- Научиться выполнять преобразования переменных
- Экономическая интерпретация регрессионной модели

Пример нелинейной зависимости



Направления анализа и развития парной линейной регрессии

- Ключевые точки (начало координат)
- Кривая или прямая
- Форма криволинейной зависимости
- Вспомогательные экономические показатели (скорость и темп роста, эластичность)
- Уточнение формы (экстремумы, пределы)
- Сравнение функциональных форм

Этапы построения модели

1. Выбор теоретических предпосылок
2. Формализация предпосылок
3. Построение математической модели
4. Анализ построенной модели

Производственная функция Кобба-Дугласа

Многие экономические процессы не являются линейными по сути. Их моделирование линейными уравнениями не даст положительного результата.

Пример. Производственная функция Кобба – Дугласа

$$Y = AK^{\alpha} L^{\beta}$$

Y – объем выпуска; K, L – затраты капитала и труда; α, β – параметры модели.

Анализ экономического роста

Анализ теоретических предпосылок: прирост пропорционален накопленному потенциалу

Формализация предпосылок:

$$dY = \beta Y \Rightarrow \frac{dY}{Y} = \beta \Rightarrow \ln Y = \alpha + \beta t$$

Интерпретация и анализ: коэффициент регрессии β – годовой темп роста, возможно сопоставление с реальными данными

Классы нелинейных регрессий

Различают ***два класса*** нелинейных регрессий:

1. Регрессии, нелинейные относительно переменных, но линейные по оцениваемым параметрам.
2. Регрессии, нелинейные по оцениваемых параметрам.

Регрессии, нелинейные относительно объясняющих переменных, всегда сводятся к линейным моделям.

Альтернативные функциональные формы: правила выбора

Правила выбора формы зависимости:

1. ***Исходить из экономической теории.***
2. ***Оценивать формальное качество модели.***
3. ***Дополнительно проверять по нескольким содержательным критериям.***
4. ***Ответить на вопросы, возникающие при анализе модели:***

- каковы признаки качественной модели;
- какие ошибки спецификации встречаются и каковы их последствия;
- как обнаружить ошибку спецификации;
- каким образом можно исправить ошибку спецификации и перейти к более качественной модели.

Линейная форма

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i$$

Интерпретация коэффициента регрессии

β – предельный эффект независимого фактора

$$\beta = Y'_X = \frac{dY}{dX} = \frac{\Delta Y}{\Delta X}$$

Линейная форма

Для полученных оценок *a*, *b* уравнения регрессии:

$$Y = a + bX$$

$$b = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \qquad \Delta X = 1 \qquad \Rightarrow \qquad b = \Delta Y$$

$$a = \overline{Y} - b\overline{X} \qquad \Rightarrow \qquad a = \overline{Y}(\overline{X} = 0)$$

Линейная форма

Коэффициент регрессии *b* показывает прирост зависимой переменной при изменении объясняющей переменной на единицу.

Коэффициент регрессии *b* – угловой коэффициент линии регрессии

Коэффициент регрессии *a* – среднее значение зависимой переменной при нулевом значении объясняющей переменной

Линейная форма от времени

$$Y_i = a + bt_i$$

Интерпретация коэффициента регрессии от времени – ежегодный (ежемесячный и т.д.) прирост зависимой переменной

$$b = \frac{\Delta Y}{\Delta t}$$

Моделирование эластичности

Независимо от вида математической связи между *Y* и *X* ***эластичность*** равна:

$$L = \frac{dY / Y}{dX / X} = \frac{dY / dX}{Y / X} \approx \frac{\Delta Y / Y}{\Delta X / X} = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \cdot \frac{X}{Y}$$

Эластичность *y* по *x* рассчитывается как относительное изменение *y* на единицу относительного изменения *x*.

Пример расчета эластичности

Рассмотрим кривую Энгеля: $$Y = \alpha X^{\beta}$$

где Y – спрос на товар, X – доход. Имеем:

$$\text{Эластичность} = \frac{dY / dX}{Y / X} = \frac{\alpha\beta X^{\beta-1}}{\alpha X^{\beta-1}} = \beta,$$

Например для модели $Y = 0{,}01X^{0,3}$ эластичность спроса по доходу равна 0,3. Иными словами, изменение дохода (X) на 1% вызывает изменение спроса (Y) на 0,3%

Эластичность – переменная величина

Эластичность не всегда бывает постоянной для различных значений X и Y

Например, для линейной модели

$$L = \frac{dY / dX}{Y / X} = \frac{\beta}{Y / X} = \beta \frac{X}{Y}$$

Средний коэффициент эластичности

Средний коэффициент эластичности $\overline{L}$ показывает, на сколько процентов в среднем по совокупности изменится результат Y от своей средней величины при изменении фактора X на 1% от своего среднего значения

$$\overline{L} = f'(\overline{X}) \frac{\overline{X}}{\overline{Y}}$$

Логарифмическая форма

$$Y_i = \alpha' X_i^{\beta} \varepsilon_i'$$

Прологарифмировав обе части уравнения, получим

$$\ln Y_i = \alpha + \beta \ln X_i + \varepsilon_i$$

Логарифмическая форма

$$\ln Y_i = \alpha + \beta \ln X_i + \varepsilon_i$$

Интерпретация коэффициента регрессии β – эластичность зависимой переменной по объясняющей переменной

$$\frac{dY}{Y} = \beta \frac{dX}{X} \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{dY / Y}{dX / X}$$

Коэффициент при объясняющей переменной показывает, на сколько процентов возрастает Y при возрастании X на 1%.

Логарифмическую форму следует использовать там, где есть основание предполагать постоянство эластичности

Логарифмическая форма

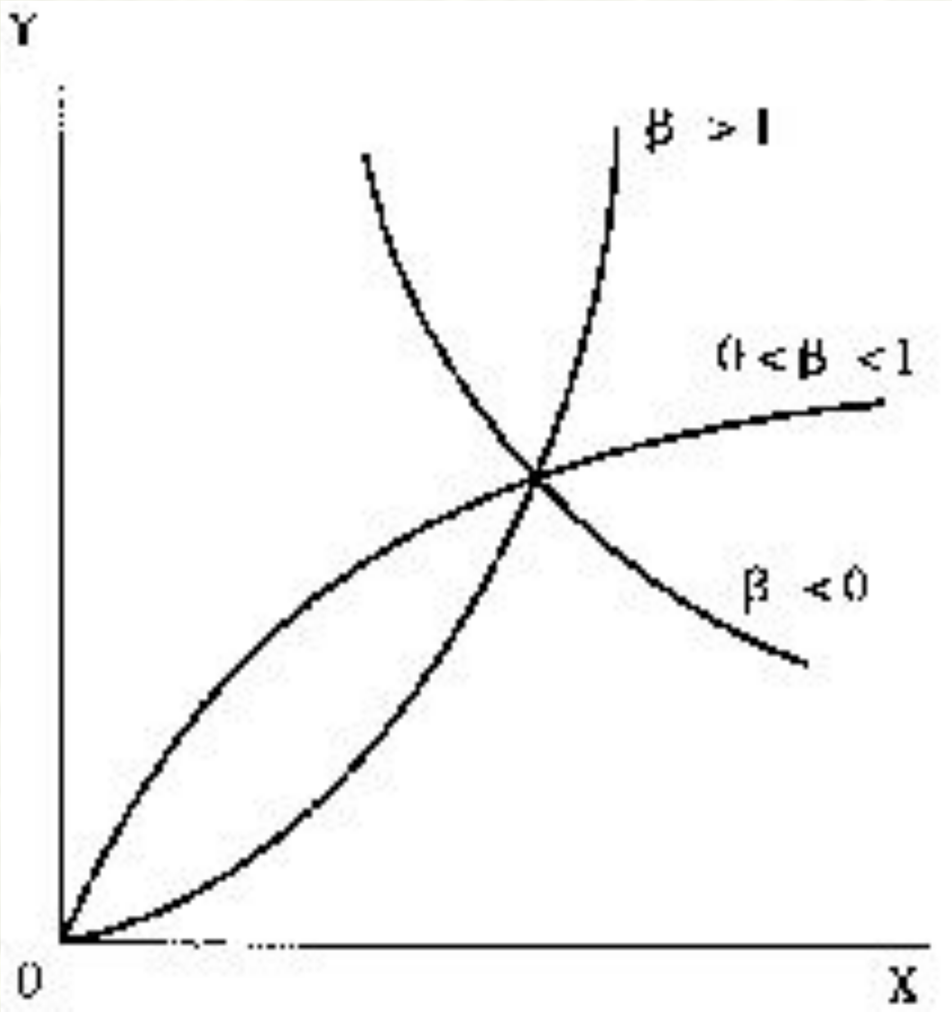
$$\ln Y_i = \alpha + \beta \ln X_i + \varepsilon_i$$

Вычисление наклона (скорости роста)

$$\frac{dY}{dX} = \beta \frac{Y}{X}$$

Наклон постоянно меняется с изменением номера наблюдения

Графики логарифмической формы зависимости



Полулогарифмические формы

1. Линейно-логарифмическая форма (логарифм при объясняющей переменной)

2. Логарифмически-линейная форма (логарифм при зависимой переменной)

Линейно-логарифмическая форма

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \ln X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$$

Интерпретация коэффициента регрессии β:

$$dY = \beta \frac{dX}{X} \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{dY}{dX / X} \quad \Rightarrow \quad \frac{\beta}{100} = \frac{dY}{100 \cdot (dX / X)}$$

Коэффициент при объясняющей переменной показывает на сколько единиц возрастает Y при возрастании X на 1%

При интерпретации коэффициент следует делить на 100

Если X увеличится на 1%, то прирост Y составит β /100 единиц (в которых измеряется Y)

Линейно-логарифмическая форма

$$Y_i = \alpha + \beta \ln X_i + \varepsilon_i$$

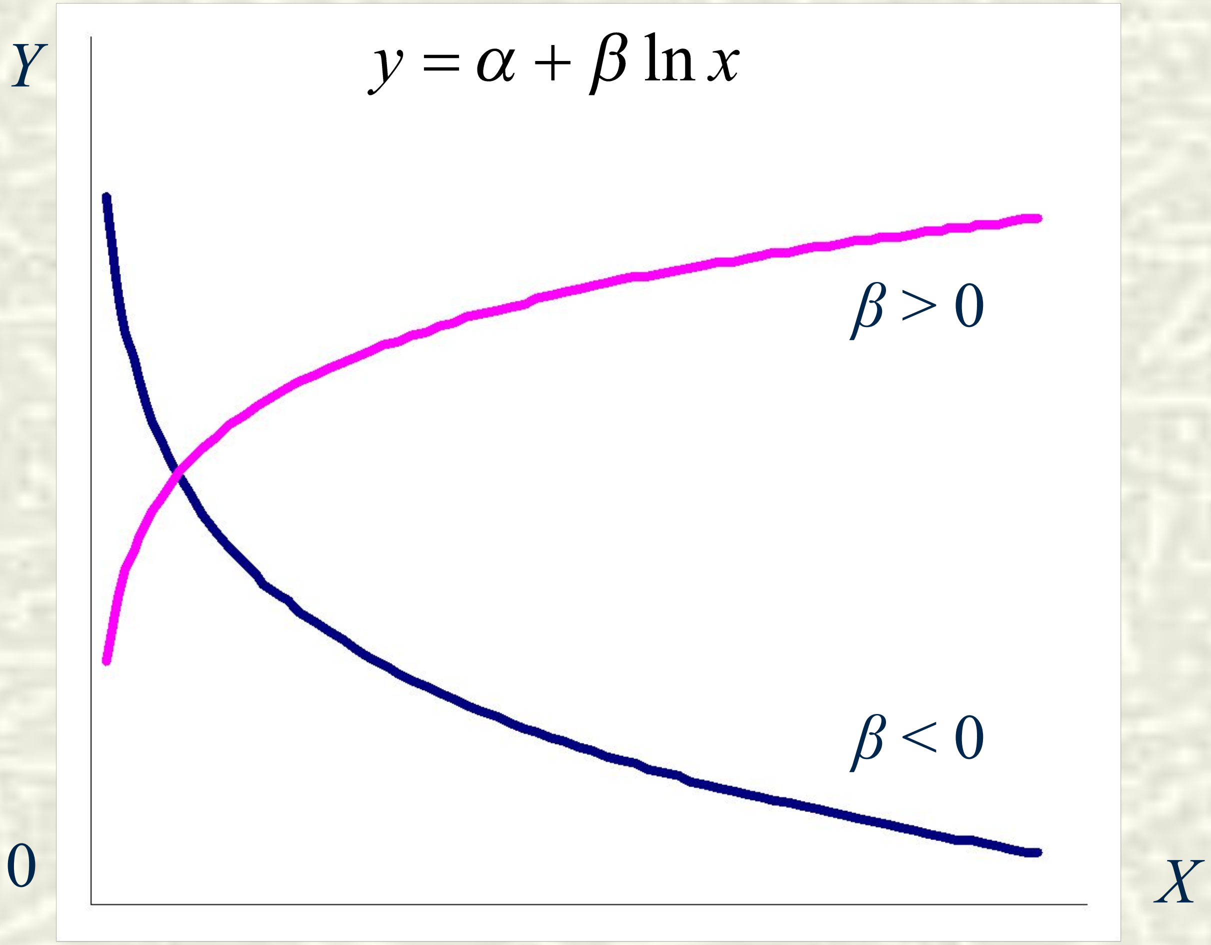
Эластичность убывает с ростом *Y*:

$$dY = \beta \frac{dX}{X} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{dY}{dX} \cdot \frac{X}{Y} = \beta \frac{1}{X} \cdot \frac{X}{Y} = \beta \frac{1}{Y}$$

Это указывает на класс зависимостей, где следует применять линейно-логарифмическую форму регрессии

Логарифм при *X* снижает влияние роста *X* (*степень влияния X снижается с ростом X*). Моделирование эффектов насыщения на уровне скорости роста: «возрастание с убывающей скоростью»

Графики линейно-логарифмической формы зависимости



Логарифмически-линейная форма

$$\ln Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i$$

Интерпретация коэффициента регрессии β:

$$\frac{dY}{Y} = \beta dX \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{dY}{YdX} \quad \overset{dX=1}{\Rightarrow} \quad \beta \cdot 100\% = \frac{dY}{Y} \cdot 100\%$$

Коэффициент при объясняющей переменной показывает на сколько процентов возрастает Y при возрастании X на одну единицу

При интерпретации коэффициент следует умножать на 100

Логарифмически-линейная форма

$$\ln Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i$$

Эластичность растет с ростом Y:

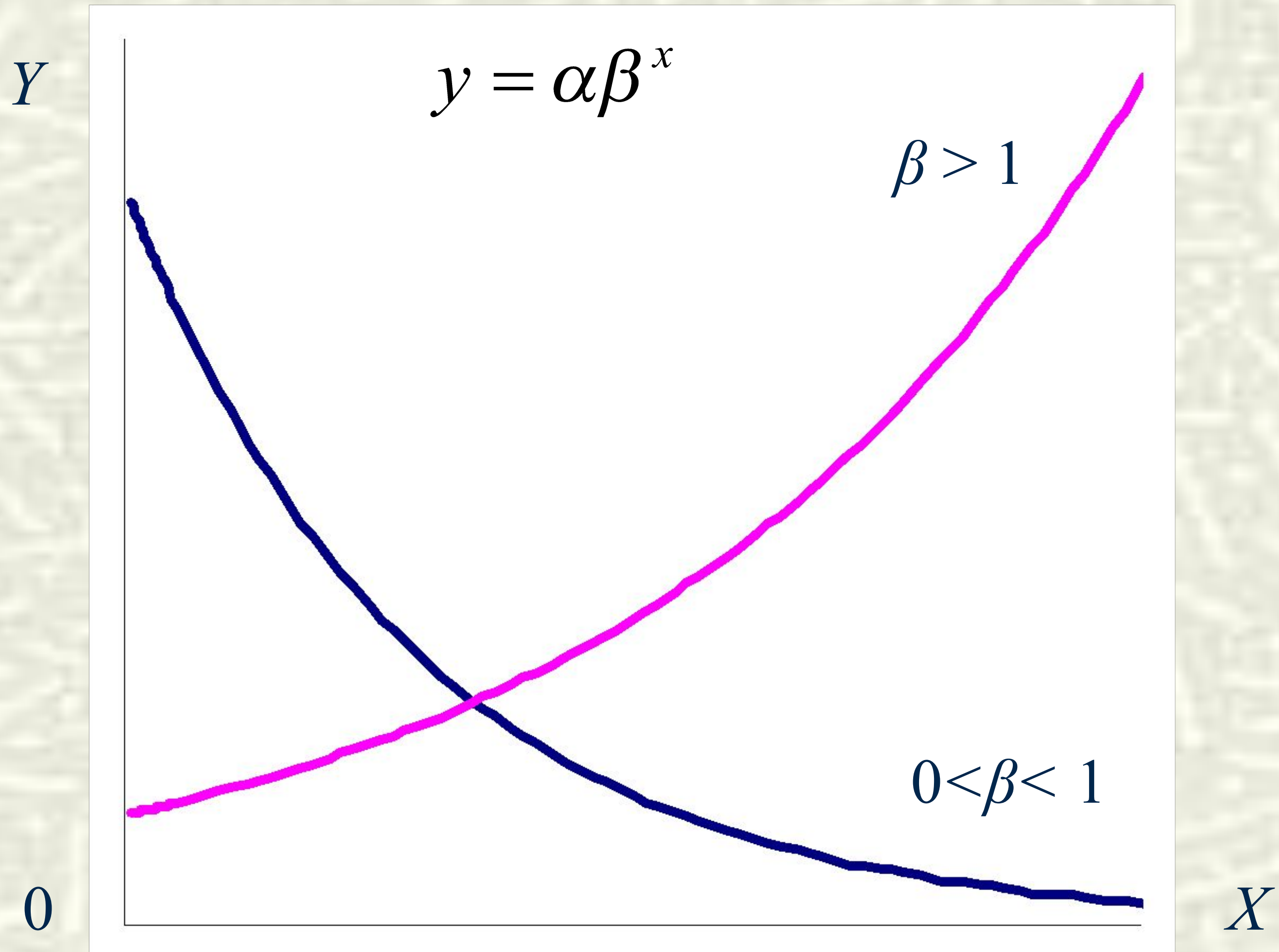
$$\beta = \frac{dY}{YdX} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{dY}{dX} \cdot \frac{X}{Y} = \beta \frac{YX}{Y} = \beta X$$

Это указывает на класс зависимостей, где следует применять линейно-логарифмическую форму регрессии

Моделирование эффектов насыщения на уровне скорости роста: «возрастание с возрастающей скоростью»

Примеры: кривые Энгеля для товаров роскоши, моделирование оплаты труда (процентная надбавка за стаж и опыт)

Графики логарифмически-линейной формы зависимости



Логарифмически-линейная форма от времени

$$\ln Y_i = \alpha + \beta t_i + \varepsilon_i$$

Вид уравнения: $$Y_i = e^{\alpha} e^{\beta t_i} e^{\varepsilon_i}$$

Интерпретация: $$\frac{dY}{Y} = \beta t$$

Коэффициент при переменной времени выражает темп прироста. Он показывает на сколько процентов (если умножить его на 100) возрастает Y ежегодно

Эту функциональную форму удобно использовать для моделирования процессов экономического роста

Обратные зависимости

$$Y_i = \alpha + \beta \frac{1}{X_i} + \varepsilon_i$$

Вычисление эластичности

$$L = \frac{dY / Y}{dX / X} = \beta \cdot \left(-\frac{1}{XY} \right)$$

С ростом X зависимая переменная приближается к некоторому числу (моделирование эффекта насыщения)

Пример: Моделирование потребления товаров первой необходимости (быстрое достижение насыщения)

Сводка результатов для альтернативных функциональных форм в парной регрессии

Функциональная форма	Уравнение (без учета других факторов)	Наклон $\frac{\Delta Y}{\Delta X}$	Эластичность $\frac{\Delta Y}{\Delta X}\cdot\frac{X}{Y}$
Линейная	$Y_i = \alpha + \beta X_i + u$	β	$\beta\left(\frac{X_i}{Y_i}\right)$
Двойная логарифмическая	$\ln Y_i = \alpha + \beta \ln X_i + u$	$\beta\left(\frac{Y_i}{X_i}\right)$	β
Линейно-логарифмическая (lnX)	$Y_i = \alpha + \beta \ln X_i + u$	$\beta\left(\frac{1}{X_i}\right)$	$\beta\left(\frac{1}{Y_i}\right)$
Логарифмически-линейная (lnY)	$\ln Y_i = \alpha + \beta X_i + u$	βY_i	βX_i
Обратная	$Y_i = \alpha + \beta \frac{1}{X_i} + u$	$-\beta\left(\frac{1}{X_i^2}\right)$	$-\beta\left(\frac{1}{X_i Y_i}\right)$

Сводка линеаризующих преобразований для основных зависимостей в экономике

Вид уравнения регрессии	Постоянство отношения приращения	Функциональная сетка, выпрямляющая график	Система уравнений для определения параметров по МНК
1	2	3	4
$\hat{y} = kx + b$	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = const$	-	$\begin{cases} bn + k\sum x_i = \sum y_i \\ b\sum x_i + k\sum x_i^2 = \sum x_i y_i \end{cases}$

Сводка линеаризующих преобразований для основных зависимостей в экономике

1	2	3	4
$\hat{y} = ax^2 + bx + c$	$\dfrac{\Delta^2 y}{\Delta^2 x} = const$	-	$\begin{cases} cn + b\sum x_i + a\sum x_i^2 = \sum y_i \\ c\sum x_i + b\sum x_i^2 + a\sum x_i^3 = \sum y_i x_i \\ c\sum x_i^2 + b\sum x_i^3 + a\sum x_i^4 = \sum y_i x_i^2 \end{cases}$

Сводка линеаризующих преобразований для основных зависимостей в экономике

1	2	3	4
$\hat{y} = \frac{k}{x} + b$	$\frac{\Delta y}{\Delta \frac{1}{x}} = const$	$u = \frac{1}{x}$, $v = y$	$\begin{cases} bn + k\sum u_i = \sum v_i \\ b\sum u_i + k\sum u_i^2 = \sum u_i v_i \end{cases}$

Сводка линеаризующих преобразований для основных зависимостей в экономике

1	2	3	4
$\hat{y} = ke^{-x} + b$	$\dfrac{\Delta y}{\Delta e^{-x}} = const$	$u = e^{-x}$, $v = y$	$\begin{cases} bn + k\sum u_i = \sum v_i \\ b\sum u_i + k\sum u_i^2 = \sum u_i v_i \end{cases}$

Сводка линеаризующих преобразований для основных зависимостей в экономике

1	2	3	4
$\hat{y} = k \ln x + b$	$\dfrac{\Delta y}{\Delta \ln x} = const$	$u = \ln x,$ $v = y$	$\begin{cases} bn + k\sum u_i = \sum v_i \\ b\sum u_i + k\sum u_i^2 = \sum u_i v_i \end{cases}$

Сводка линеаризующих преобразований для основных зависимостей в экономике

1	2	3	4
$\hat{y} = \dfrac{1}{\dfrac{k}{x} + b}$	$\dfrac{\Delta \dfrac{1}{y}}{\Delta \dfrac{1}{x}} = const$	$u = \dfrac{1}{x}$, $v = \dfrac{1}{y}$	$\begin{cases} bn + k\sum u_i = \sum v_i \\ b\sum u_i + k\sum u_i^2 = \sum u_i v_i \end{cases}$

Сводка линеаризующих преобразований для основных зависимостей в экономике

1	2	3	4
$\hat{y} = \dfrac{1}{ke^{-x} + b}$	$\dfrac{\Delta \dfrac{1}{y}}{\Delta e^{-x}} = const$	$u = e^{-x}$, $v = \dfrac{1}{y}$	$\begin{cases} bn + k\sum u_i = \sum v_i \\ b\sum u_i + k\sum u_i^2 = \sum u_i v_i \end{cases}$

Сводка линеаризующих преобразований для основных зависимостей в экономике

1	2	3	4
$\hat{y} = bx^k$	$\dfrac{\Delta \ln y}{\Delta \ln x} = const$	$u = \ln x$, $v = \ln y$	$\begin{cases} \ln b \cdot n + k\sum u_i = \sum v_i \\ \ln b \cdot \sum u_i + k\sum u_i^2 = \sum u_i v_i \end{cases}$

Сводка линеаризующих преобразований для основных зависимостей в экономике

1	2	3	4
$\hat{y} = be^{kx}$	$\dfrac{\Delta \ln y}{\Delta x} = const$	$u = x,$ $v = \ln y$	$\begin{cases} \ln b \cdot n + k\sum u_i = \sum v_i \\ \ln b \cdot \sum u_i + k\sum u_i^2 = \sum u_i v_i \end{cases}$

Сводка линеаризующих преобразований для основных зависимостей в экономике

1	2	3	4
$\hat{y} = be^{\frac{k}{x}}$	$\dfrac{\Delta \ln y}{\Delta \dfrac{1}{x}} = const$	$u = \dfrac{1}{x}$, $v = \ln y$	$\begin{cases} \ln b \cdot n + k\sum u_i = \sum v_i \\ \ln b \cdot \sum u_i + k\sum u_i^2 = \sum u_i v_i \end{cases}$

Сводка линеаризующих преобразований для основных зависимостей в экономике

1	2	3	4
$\hat{y} = cx^a e^{bx}$	$v = au + bx + \ln c$	$u = \ln x$, $v = \ln y$	$\begin{cases} \ln c \cdot n + b\sum x_i + a\sum \ln x_i = \sum v_i \\ \ln c \cdot \sum \ln x_i + b\sum x_i \ln x_i + a\sum \ln^2 x_i = \sum v_i \ln x_i \\ \ln c \cdot \sum x_i + b\sum x_i^2 + a\sum x_i \ln x_i = \sum v_i x_i \end{cases}$

Преобразование случайного отклонения

МНК применяется к преобразованным (линеаризованным) уравнениям. Поэтому необходимо особое внимание уделять рассмотрению свойств случайных отклонений – выполнимости предпосылок теоремы Гаусса-Маркова.

Пример.

$$Y = \alpha X^{\beta} + \varepsilon \quad \overset{\ln(\cdot)}{\Rightarrow} \quad \ln Y = \ln(\alpha X^{\beta} + \varepsilon)$$

Логарифмирование нелинейной модели с аддитивным случайным членом не приводит к линеаризации соотношения относительно параметров.

Признаки качественной модели

1. ***Простота модели*** (из примерно одинаково отражающих реальность моделей, выбирается та, которая содержит меньше объясняющих переменных.
2. ***Единственность*** (для любых данных коэффициенты модели должны вычисляться однозначно).
3. ***Максимальное соответствие*** (модель тем лучше, чем больше скорректированный коэффициент детерминации).
4. ***Согласованность с теорией*** (уравнение регрессии должно соответствовать теоретическим предпосылкам).
5. ***Прогнозные качества*** (прогнозы, полученные на основе модели, должны подтверждаться реальностью).

Сравнение различных моделей

1. Содержательный анализ
2. Формальный анализ:

- *Метод Зарембки*
- *Преобразование Бокса-Кокса*

Метод Зарембки

Применим для выбора из двух форм (несравнимых непосредственно), в одной из которых зависимая переменная входит с логарифмом, а в другой – нет

Метод позволяет сравнить линейную и логарифмическую регрессии и оценить значимость наблюдаемых различий

Сравнение различных моделей парной регрессии методом Зарембки

1. Вычисляем среднее геометрическое значений зависимой переменной и все ее значения делим на это среднее:

$$Y_i^* = Y_i / \sqrt[n]{Y_1 Y_2 \cdots Y_n} = Y_i / e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln Y_i}$$

2. Рассчитываются линейная и логарифмическая регрессии, и сравниваются значения их сумм квадратов остатков (RSS)

$$Y_i^* = \alpha_1 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i \quad (RSS_1) \qquad \ln Y_i^* = \alpha_2 + \beta_2 \ln X_i + \varepsilon_i' \quad (RSS_2)$$

Сравнение различных моделей парной регрессии методом Зарембки

3. Вычисляем χ^2-статистику для оценки значимости различий

$$\chi^2 = \left(\frac{n}{2}\right) \cdot \left| \ln \frac{SSR_1}{SSR_2} \right|$$

4. Сравниваем с критическим значением χ^2-распределения $\chi^2_{\alpha;m}$. Различия значимы на уровне значимости α, если

$$\chi^2 > \chi^2_{\alpha;m}$$

Метод Бокса-Кокса

Идея метода. Переменная $\dfrac{Y^{\lambda}-1}{\lambda}$:

при λ=1 превращается в линейную функцию $\dfrac{Y-1}{1}$

при $\lambda \to 0$ переходит в логарифм $\dfrac{Y^{\lambda}-1}{\lambda} \to \ln Y$

Плавно изменяя λ, можно постепенно перейти от линейной регрессии к логарифмической, все время сравнивая качество

Сравнение различных моделей парной регрессии методом Бокса-Кокса

1. Преобразуют зависимую переменную по методу Зарембки:

$$Y_i^* = Y_i / \sqrt[n]{Y_1 Y_2 \cdots Y_n} = Y_i / e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln Y_i}$$

2. Рассчитывают новые переменные (преобразование Бокса-Кокса) при значениях λ от 1 до 0:

$$Y_i^{(B-C)} = \frac{{Y_i^*}^{\lambda} - 1}{\lambda} \qquad X_i^{(B-C)} = \frac{X_i^{\lambda} - 1}{\lambda}$$

Сравнение различных моделей парной регрессии методом Бокса-Кокса

3. Рассчитывают уравнения регрессии для новых переменных при значениях λ от 1 до 0:

$$Y_i^{(B-C)} = \alpha + \beta X_i^{(B-C)} + \varepsilon_i$$

4. Определяют минимальное значение суммы квадратов остатков (SSR).

5. Выбирают одну из крайних регрессий, к которой ближе точка минимума.

Конец лекции