Тема: НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§1. Неопределенный интеграл и его свойства.

1.1. Первообразная функция

ОПР. Функция $y = F(x)$ называется **первообразной** для функции $y = f(x)$ на данном промежутке (***a;b***), если для любого ***x*** из этого промежутка

$$F'(x) = f(x) \quad \text{или} \quad dF(x) = f(x)dx.$$

Пример. Первообразной для функции

$$f(x) = x^2$$

на всей числовой оси является $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$

$C = const$ так как $\left(\frac{1}{3}x^3 + C\right)' = x^2.$

Теорема 1.1. Если функция $f(x)$ непрерывна на данном интервале, то на этом интервале она имеет первообразную.

Теорема 1.2. Если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на $(a;b)$, то множество всех первообразных для $f(x)$ задается формулой $F(x)+C$, где C – постоянная.

1.2. Неопределенный интеграл

ОПР. Совокупность всех первообразных $F(x)+C$ для данной функции $f(x)$ называется ее неопределенным интегралом и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x)+C,$$

где C – произвольная постоянная.

Знак $\int$ называется **интегралом**, функция

$f(x)$ – **подынтегральной функцией**,

$f(x)dx$ – **подынтегральным выражением**,

x – **переменной интегрирования**.

Операция нахождения неопределенного интеграла для данной функции называется **интегрированием** этой функции.

Интегрирование – операция, обратная операции дифференцирования.

Основные свойства неопределенного интеграла

1. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d\int f(x)dx = f(x)dx$$

2. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

Таким образом,

правильность интегрирования проверяется дифференцированием!

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx.$$

5. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых функций:

$$\int \left(f(x) \pm g(x) \right) dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

6. Если $\int f(x)\,dx = F(x) + C,$ то

$$\int f(u)\,du = F(u) + C,$$

где $u = \varphi(x)$ − произвольная функция, имеющая непрерывную производную.

Данное свойство называется **инвариантностью** неопределенного интеграла.

При вычислении неопределенного интеграла использует формулу:

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C, \quad a \neq 0.$$

Таблица простейших интегралов

$$1.\ \int 0\cdot du = C;$$

$$2.\ \int 1\cdot du = u + C;$$

$$3.\ \int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1;$$

$$4.\ \int \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{u} + C;$$

$$5.\ \int \frac{1}{\sqrt{u}} du = 2\sqrt{u} + C;$$

$$6.\ \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C;$$

$$7.\ \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C;$$

$$8.\ \int e^u du = e^u + C;$$

$$9.\ \int \sin u\, du = -\cos u + C;$$

$$10.\ \int \cos u\, du = \sin u + C;$$

$$11.\ \int \frac{1}{\cos^2 u} du = \mathrm{tg} u + C;$$

$$12.\ \int \frac{1}{\sin^2 u} du = -\mathrm{ctg} u + C;$$

$$13.\ \int \frac{1}{u^2+a^2}\,du = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C;$$

$$14.\ \int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}}\,du = \arcsin\frac{u}{a} + C;$$

$$15.\ \int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C;$$

$$16.\ \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C.$$

Вычисление интегралов с помощью преобразования подынтегрального выражения к табличной форме и использования свойств неопределенного интеграла называется непосредственным интегрированием.

Вспомогательные сведения

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$;

3. $\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$;

4. $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$.

Пример 1. Используя таблицу и свойства интегралов, найти интегралы.

$$1. \quad \int \frac{dx}{x^5} = \int x^{-5} dx = (\hat{o}\ \hat{\imath}\ \eth\grave{\imath}\ \acute{o}\ddot{e}\grave{a}\ (3)) = \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + C =$$

$$= -\frac{1}{4x^4} + C.$$

$$2. \quad \int (2x + 7^x) dx = 2\int x dx + \int 7^x dx =$$

$$(\hat{o}\ \hat{\imath}\ \eth\grave{\imath}\ \acute{o}\ddot{e}\hat{u}\ (3), (7)) = 2\frac{x^2}{2} + \frac{7^x}{\ln 7} + C = x^2 + \frac{7^x}{\ln 7} + C.$$

3. $$\int \sqrt{x^5}\,dx = \int x^{5/2}\,dx = (\text{ô î ðì óëà (3)}) =$$

$$= \frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{5/2 + 1} + C = \frac{x^{7/2}}{7/2} + C.$$

4. $$\int \frac{dx}{x^2 + 16} = \quad = (\text{ô î ðì óëà (13)}) = \int \frac{dx}{x^2 + 4^2} =$$

$$= \frac{1}{4} arctg \frac{x}{4} + C.$$

5. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-25}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-25}\right| + C.$$

6. $$\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{3} + C.$$

1.3. Основные методы вычисления неопределенных интегралов

Непосредственное интегрирование

Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции (или выражения) и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам, называется **непосредствен-ным интегрированием.**

При сведении данного интеграла к табличному часто используется следующее преобразование дифференциала (операция **«подведения под знак дифференциала»**).

$$f'(u)du = d(f(u))$$

Например:

$$du = d(u+b), \qquad b = const;$$

$$du = \frac{1}{a}d(au+b), \quad a \neq 0, \quad a = const;$$

$$\cos u\,du = d(\sin u).$$

Примеры

1. $$\int (3x+1)^9 dx = \frac{1}{3}\int (3x+1)^9 d(3x+1) =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{(3x+1)^{10}}{10} + C.$$

2. $$\int \frac{dx}{4x+5} = \frac{1}{4}\int \frac{d(4x+5)}{4x+5} =$$

$$= \frac{1}{4}\ln|4x+5| + C.$$

3. $\int \cos\left(\frac{x}{5}+7\right)dx = 5\int \cos\left(\frac{x}{5}+7\right)d\left(\frac{x}{5}+7\right) =$

$= 5\sin\left(\frac{x}{5}+7\right)+C.$

Интегрирование заменой переменной

Метод замены переменной (метод подстановки) состоит в преобразовании интеграла $\int f(x)dx$ в другой интеграл

$$\int f(u)du,$$

который вычисляется проще, чем исходный.

Пример

$$\mathbf{1.}\quad \int (6x-3)^5\,dx = \left| \begin{array}{c} t = 6x-3 \\ dt = 6dx, dx = \dfrac{dt}{6} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{6}\int t^5\,dt = \frac{1}{6}\frac{t^6}{6} + C = (t = 6x-3) =$$

$$= \frac{1}{36}(6x-3)^6 + C.$$

2. $$\int \frac{dx}{5-7x} = \left| \begin{array}{c} t = 5-7x \\ dt = -7dx,\, dx = -\frac{1}{7}dt \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{1}{7}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{7}\ln|t| + C = (t = 5-7x) =$$

$$= -\frac{1}{7}\ln|5-7x| + C.$$

$$3.\quad \int \sin\left(\frac{x}{2}-8\right)dx = \left| \begin{array}{c} t=\dfrac{x}{2}-8, \\ dt=\dfrac{1}{2}dx, dx=2dt \end{array} \right| =$$

$$= 2\int \sin t dt = -2\cos t + C = (t=\frac{x}{2}-8) =$$

$$= -2\cos\left(\frac{x}{2}-8\right)+C.$$

Интегрирование по частям

Формула $\int u\,dv = uv - \int v\,du,$

где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – дифференцируемые функции, называется **формулой интегрирования по частям**.

Метод интегрирования по частям целесообразно применять, если

$$\int v\,du$$

более прост в вычислении, чем

$$\int u\,dv.$$

Некоторые типы интегралов, которые можно вычислять методом интегрирования по частям

1. Интегралы вида $\int P_n(x)e^{mx}dx, \int P_n(x)a^{mx}dx,$

$$\int P_n(x)\sin mxdx, \quad \int P_n(x)\cos mxdx,$$

где $P_n(x)$ − многочлен, m − число.

Здесь полагают $u = P_n(x),$

за dv обозначают остальные сомножители.

2. Интегралы вида $\int P_n(x)\ln x dx$, $\int P_n(x)\arcsin x dx$, $\int P_n(x)\arccos x dx$, $\int P_n(x)\mathrm{arctg} x dx$, $\int P_n(x)\mathrm{arcctg} x dx$.

Здесь полагают $P_n(x)dx = dv$

за *u* обозначают остальные сомножители.

3. Интегралы вида $\int e^{ax}\cos bx dx$, $\int e^{ax}\sin bx dx$,

где ***a*** и ***b*** − числа.

За *u* можно принять функцию e^{ax}.

Пример. Вычислить неопределенные интегралы методом интегрирования по частям.

$$1.\ \int (2x+5)\cos x\,dx = \left| \begin{array}{c} u = 2x+5,\ du = 2dx \\ dv = \cos x,\ v = \int \cos x\,dx = \sin x \end{array} \right| =$$

$$= (2x+5)\sin x - \int 2\sin x\,dx =$$

$$= (2x+5)\sin x + 2\cos x + C$$