Комплексные числа

Основные понятия

Комплексным числом z называется выражение вида

$$z = \alpha + i\beta$$

где α и β – действительные числа, а i – **мнимая единица.**

$$i^2 = -1$$

Два комплексных числа

$$z_1 = \alpha_1 + i\beta_1 \qquad z_2 = \alpha_2 + i\beta_2$$

называются **равными** $(z_1 = z_2)$ тогда и только тогда, когда

$$\alpha_1 = \alpha_2 \qquad \beta_1 = \beta_2$$

Комплексное число $z_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ равно 0 тогда и только тогда, когда

$$\alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = 0$$

Понятия «больше» и «меньше» для комплексных чисел не определяются.

Два комплексных числа

$$z = \alpha + i\beta, \quad \overline{z} = \alpha - i\beta$$

называются **сопряженными**.

Справедливо равенство

$$z \cdot \overline{z} = \alpha^2 + \beta^2$$

Извлечение корней из комплексных чисел

Корнем n-ой степени из комплексного числа z называется комплексное число w,

удовлетворяющее равенству $w^n = z$

Т.е. $\sqrt[n]{z} = w$, если $w^n = z$

Пример

1. Вычислить $\sqrt{-4}$
2. Решить уравнение $x^2 + 25 = 0$
3. Решить уравнение

$$x^2 - 2x + 5 = 0$$

Решение. 1.

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot i^2} = 2i$$

2. $x^2+25=0 \quad x^2=-25$

$$x=\pm\sqrt{-25}=\pm 5i$$

3. $x^2-2x+5=0$

$$D=(-2)^2-4\cdot 5=-16$$

$$x_1=\frac{2-\sqrt{-16}}{2}=\frac{2-4i}{2}=1-2i$$

$$x_2=\frac{2+\sqrt{-16}}{2}=1+2i$$

Тема: ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§1. Дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальные уравнения первого порядка

Уравнение $F(x, y, y') = 0$

связывающее независимую переменную ***x***, искомую функцию ***y*** и ее производную ***y'***, называется

дифференциальным уравнением первого порядка

(ДУ первого порядка).

Если дифференциальное уравнение можно записать в виде $y' = f(x, y)$

то говорят, что оно разрешимо относительно производной.

Это уравнение можно записать в виде

$$dy = f(x, y)dx$$

так как $y' = \dfrac{dy}{dx}$

или, в более общем виде

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

Решение дифференциального уравнения

Решением (или **интегралом**) дифференциального уравнения первого порядка называется любая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

График функции в этом случае называется **интегральной кривой**.

Процесс нахождения решений данного дифференциального уравнения называется **интегрированием** этого уравнения.

Задача Коши

Задача отыскания решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному **начальному условию** $y(x_0) = y_0$, называется **задачей Коши**.

Задача Коши:

$$y' = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

Общее решение ДУ

Общим решением дифференциального уравнения $F(x, y, y') = 0$ называется такая функция $y = \varphi(x, C)$

где – C произвольная постоянная, что при любом конкретном C она является решением дифференциального уравнения;

для любого допустимого начального условия $y(x_0) = y_0$ найдется такое $C = C_0$, что

$$\varphi(x_0, C_0) = y_0$$

Если общее решение записать в виде

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

то это соотношение называется **общим интегралом** дифференциального уравнения.

Частным решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция $y = \varphi(x, C_0)$ которая получается из общего решения при конкретном значении c.

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Уравнение вида

$$P_1(x)Q_1(y)dx + P_2(x)Q_2(y)dy = 0 \quad (1)$$

Где $P_1(x)$ $P_2(x)$ $Q_1(y)$ $Q_2(y)$ – заданные функции, называется **дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными**.

Если $Q_1(y) \neq 0$ $P_2(x) \neq 0$

то, разделив уравнение (1) на $P_2(x)Q_1(y)$

получим уравнение

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = 0 \qquad (2)$$

которое называется дифференциальным уравнением **с разделенными переменными** (коэффициент при dx есть функция переменной *x*, при dy – функция переменной *y*).

Общий интеграл полученного уравнения находится почленным интегрированием:

$$\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = C$$

Уравнение

$$y' = P(x)Q(y)$$

Где $P(x),\quad Q(y)$ – заданные функции, сводится к уравнению (2).

Нужно положить $y' = \dfrac{dy}{dx}$ и разделить переменные

Схема решения ДУ с разделяющимися переменными

Этапы	Пример для уравнения $(x + xy^2)dx + (y + yx^2)dy = 0$
1. **Приводим заданное уравнение к виду (1). Для этого вынесем из скобок общие множители**	$x(1 + y^2)dx + y(1 + x^2)dy = 0$
2. **Разделим переменные, выполнив деление обеих частей уравнения на произведение** $(1 + y^2)(1 + x^2)$	$\dfrac{x(1 + y^2)dx}{(1 + y^2)(1 + x^2)} + \dfrac{y(1 + x^2)dy}{(1 + y^2)(1 + x^2)} = 0$

3. **Сократив дроби, получим уравнение с разделенными переменными**	$$\frac{xdx}{1+x^2}+\frac{ydy}{1+y^2}=0$$
4. **Интегрируем полученное уравнение** $\ln\lvert x\rvert+\ln\lvert y\rvert=\ln\lvert xy\rvert$ $C_1=\frac{1}{2}\ln C$	, , , где , , , . $$\int\frac{xdx}{1+x^2}+\int\frac{ydy}{1+y^2}=C_1$$ $$\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}\ln(1+y^2)=\frac{1}{2}\ln C$$ $$(1+x^2)(1+y^2)=C$$

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение вида

$$y' + p(x)\,y = g(x) \qquad \mathbf{(3)}$$

Где $g(x) \neq 0$, $p(x)$, $g(x)$

– непрерывные функции, называется **линейным неоднородным уравнением первого порядка**.

§2. Дифференциальные уравнения второго порядка

Уравнение вида

$$F(x, y, y', y'') = 0 \text{ или } y'' = f(x, y, y')$$

называется **дифференциальным уравнением второго порядка**.

Начальные условия для данного уравнения имеют вид

$$y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y_0'$$

x_0, y_0, y_0' – некоторые числа.

Решением уравнения $y'' = f(x, y, y')$ называется всякая функция , которая при подстановке вместе с y' и y'' в это уравнение обращает его в тождество.

Пример. Показать, что функция $y = \cos 8x$ является решением уравнения $y'' + 64y = 0$

Решение. $y' = -8\sin 8x, \quad y'' = -64\cos 8x$

$$y'' + 64y = -64\cos 8x + 64\cos 8x = 0$$

Общим решением уравнения

$$y'' = f(x, y, y')$$

называется функция $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, зависящая от двух произвольных постоянных C_1 и C_2 и такая, что:

1) она является решением уравнения при любых конкретных значениях C_1 и C_2;

2) для любых допустимых начальных условий можно подобрать такие C_{10} и C_{20}, что функция $y = \varphi(x, C_{10}, C_{20})$ будет удовлетворять этим условиям.

Понижение порядка дифференциальных уравнений

В некоторых частных случаях удается понизить порядок дифференциального уравнения второго порядка. В итоге дифференциальное уравнение приводится к дифференциальному уравнению первого порядка одного из ранее изученных типов.

Типы уравнений, допускающих понижение порядка

Уравнение $y'' = f(x)$

Способ понижения порядка

$$y' = \int f(x)dx = F(x) + C_1$$

$$y = \int (F(x) + C_1)dx + C_2$$

Пример

Найти общее решение уравнения

$$y'' = x^2 + \sin 3x$$

Решение. Интегрируя, получим

$$y' = \int (x^2 + \sin 3x)dx + C_1$$

$$y' = \int x^2 dx + \int \sin 3x dx + C_1$$

$$y' = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}\cos 3x + C_1$$ – уравнение с разделяющимися переменными.

Так как $y' = \frac{dy}{dx}$

разделяем переменные и интегрируем:

$$dy = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}\cos 3x + C_1 \right) dx$$

$$y = \int \left(\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}\cos 3x + C_1 \right) dx + C_2$$

$$y = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{9}\sin 3x + C_1 x + C_2$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДУ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Уравнение вида $y'' + py' + qy = 0,$ **(4)**
(p и q – постоянные) называется **линейным однородным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами**.

Уравнение $k^2 + pk + q = 0$

называется **характеристическим** для дифференциального уравнения

$$y'' + py' + qy = 0.$$

Для составления характеристического уравнения в уравнении (4) заменяют

$$y'' \to k^2, \quad y' \to k, \quad y \to 1.$$

Вид общего решения этого уравнения определяется корнями характеристического уравнения k_1 и k_2.

Пример

Составить характеристические уравнения для следующих дифференциальных уравнений:

1. $$3y''+5y'+6y=0,$$
2. $$y''-3y'+y=0,$$
3. $$7y''+2y=0,$$
4. $$y''+9y'=0.$$

Корни характеристического уравнения	Форма общего решения уравнения (4):
1. $k_1 \neq k_2$ – действительные числа ($D > 0$)	$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
2. $k_1 = k_2$ – действительные числа ($D = 0$)	$y = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x)$

3. $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ – комплексные числа ($D < 0$)	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$	

Пример

1. Найти общее решение уравнения

$$y''-5y'+6y=0$$

Решение. Составим характеристическое уравнение, заменяя в данном уравнении

$$y''\to k^2 \qquad y'\to k \qquad y\to 1$$

Получим

$$k^2-5k+6=0$$

Найдем дискриминант квадратного уравнения:

$$D = b^2 - 4ac = 5^2 - 4\cdot 1\cdot 6 = 1$$

$$k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \quad k_1 = 2, \; k_2 = 3,$$

$$k_1 \neq k_2$$

Имеем случай 1, следовательно,

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$

– общее решение уравнения.