Признак Вейерштрасса равномерной сходимости

(для интеграла 2-го рода)(верен и для интегралов 1-го рода)

Если $\exists g(x)$ на $[a,b)$, интегрируемая на любом $[a,\eta)$, $\eta\in(b-\delta,b)$ *такая, что*

1) $|f(x,y)|\leq g(x), a < x < b, \forall y\in Y$

2) $\int_a^b g(x)dx$ сходится ,

то интеграл

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x,y)dx$$

сходится равномерно на Y.

Вспомним вторую теорему о среднем для интегралов Римана:

Если $f(x) \in C[a,b], g(x) \in C^1[a,b]$ и $g(x)$ монотонна, то $\exists c \in [a,b]$, что

$$\int_a^b g(x)f(x)dx = g(b)\int_c^b f(x)dx + g(a)\int_a^c f(x)dx$$

Теорема (признаки Абеля и Дирихле равномерной сходимости несобственных интегралов с параметром):

$$f(x.y), \qquad g(x,y) \text{ определены на } [a,+\infty) \times Y,$$

$$\exists C > 0 \quad |g(x,y)| \le C,$$

$$\forall y \in Y \quad g(x,y) \text{ монотонна по } x$$

$$f(x,y) \in R[a,A] \quad \forall y \in Y \quad \forall A > a.$$

Признак Абеля: если $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx \rightrightarrows$ на Y,

то $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)dx \rightrightarrows$ на Y.

Признак Дирихле: если $\exists c_1 > 0$, что $\forall A > a$ $\left|\int\limits_a^{A} f(x,y)dx\right| \leq C_1$ и $g(x,y) \rightrightarrows 0$ на Y при $x \to +\infty$, то

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)dx \rightrightarrows \text{ на } Y.$$

Теорема. Пусть $f(x,y)$ определена и непрерывна на $[a,b)$ по x для всех $y \in Y$. Если для любых η функция $f(x,y)$ равномерно сходится к $g(x)$ на $[a,b-\eta]$ при $y \to y_0$, интеграл

$$\int_a^b f(x,y)dx$$

равномерно сходится на Y,

$$\int_a^b g(x)dx$$

сходится. Тогда

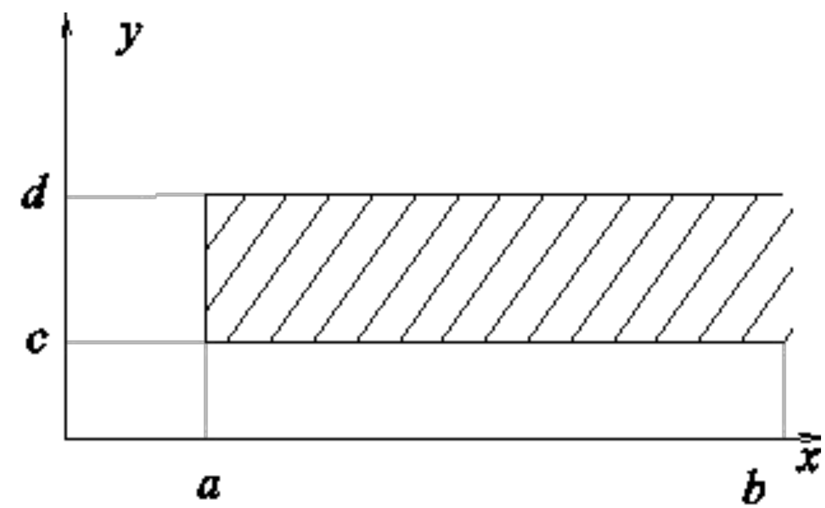
$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b g(x)dx$$

Непрерывность интеграла от параметра

Теорема. Если $f(x, y)$ определена и непрерывна на $[a, b)\times[c, d]$, интеграл

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y)dx$$

сходится равномерно на $[c, d]$, то этот интеграл является непрерывной функцией.



Интегрирование интегралов зависящих от параметра

Теорема. Если функция $f(x,y)$ определена и непрерывна на $[a,b)\times[c,d]$, интеграл

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x,y)dx$$

сходится равномерно на $[c,d]$, то

$$\int_c^d \Phi(y)dx = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$$

Дифференцирование интегралов, зависящих от параметра

Лемма. Если функция $f(x,y)$ непрерывна на $[a,b)\times[c,d]$, то сходимость интеграла

$$\int_a^b f(x,y)dx$$

эквивалентна условию для любой последовательности $\eta_n \to b$ сходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\eta_n}^{\eta_{n+1}} f(x,y)dx\,.$$

Теорема. Пусть функции $f(x,y)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны на $[a,b)\times[c,d]$. Если

$$\int_a^b f(x,y)dx$$

сходится для всех y, а

$$\int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx$$

сходится равномерно на $[c,d]$, то функция $\Phi(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ непрерывна дифференцируема на этом отрезке и

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx.$$

Теорема (Дини о последовательности):

$$f_n(x) \in C[a,b], \qquad \forall n \in N, \qquad \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

$$f(x) \in C[a,b],$$

$f_n(x)$ монотонно стремится к $f(x)$ $\quad \forall x \in [a,b]$

$$\Longrightarrow \quad f_n(x) \rightrightarrows f(x) \text{ на } [a,b].$$

Теорема (интеграл Дирихле):

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin xy}{x} dx = \frac{\pi}{2} \, sign \, y$$

$$I(\alpha) = \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$