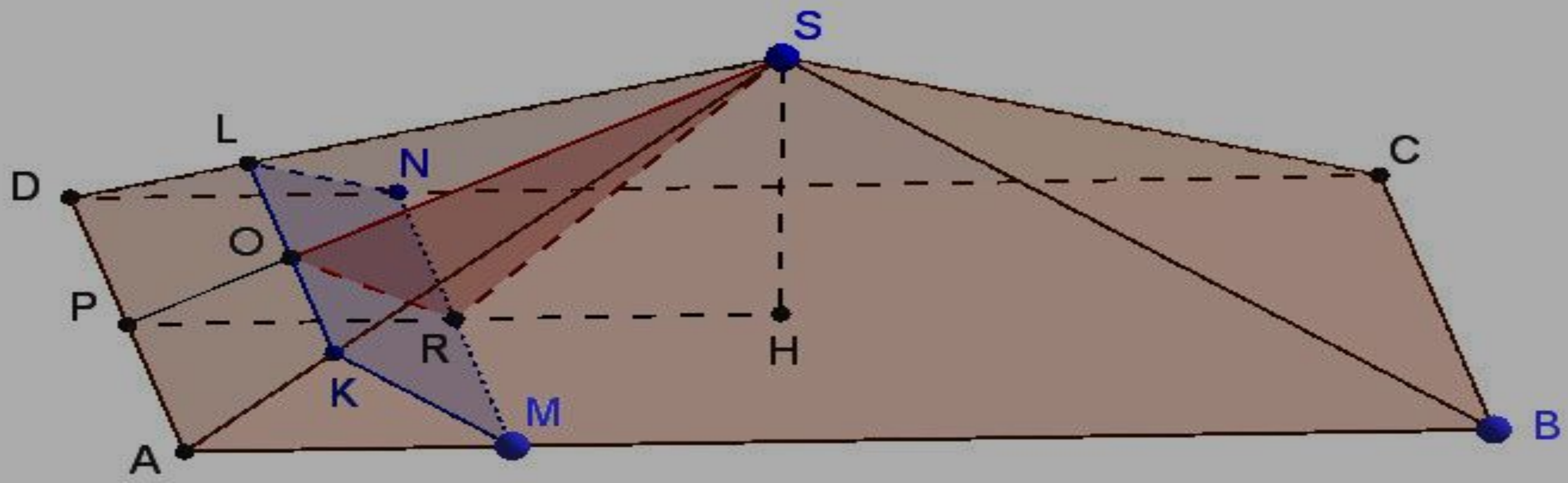
Решение задания 14 из ЕГЭ по математике

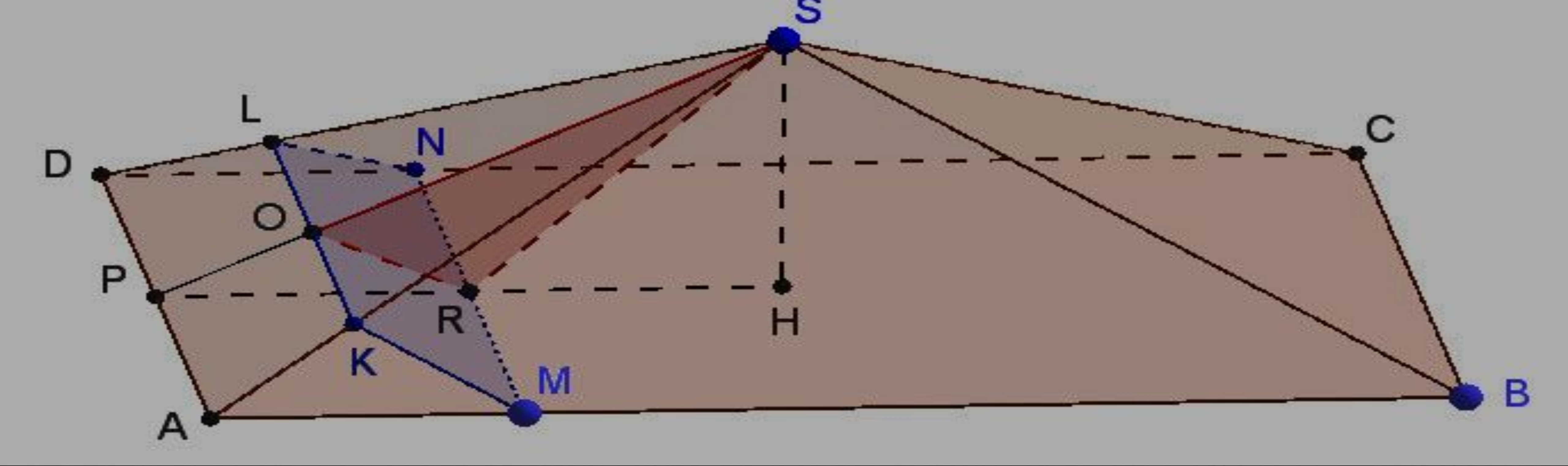
Китаев Г
10 «Б»



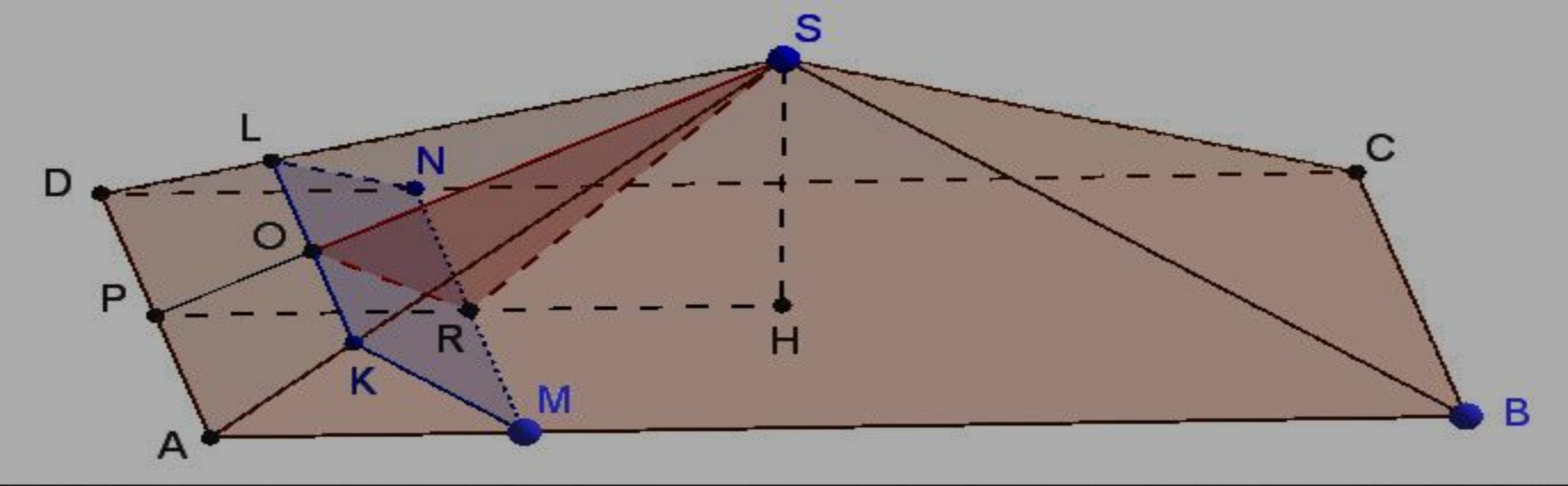
В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 16, а высота равна 4. На ребрах AB, CD и AS отмечены точки M, N и K соответственно, причем $AM = DN = 4$ и $AK = 3$.

а) Докажите, что плоскости MNK и SBC параллельны.

б) Найдите расстояние от точки KLN до плоскости SBC.



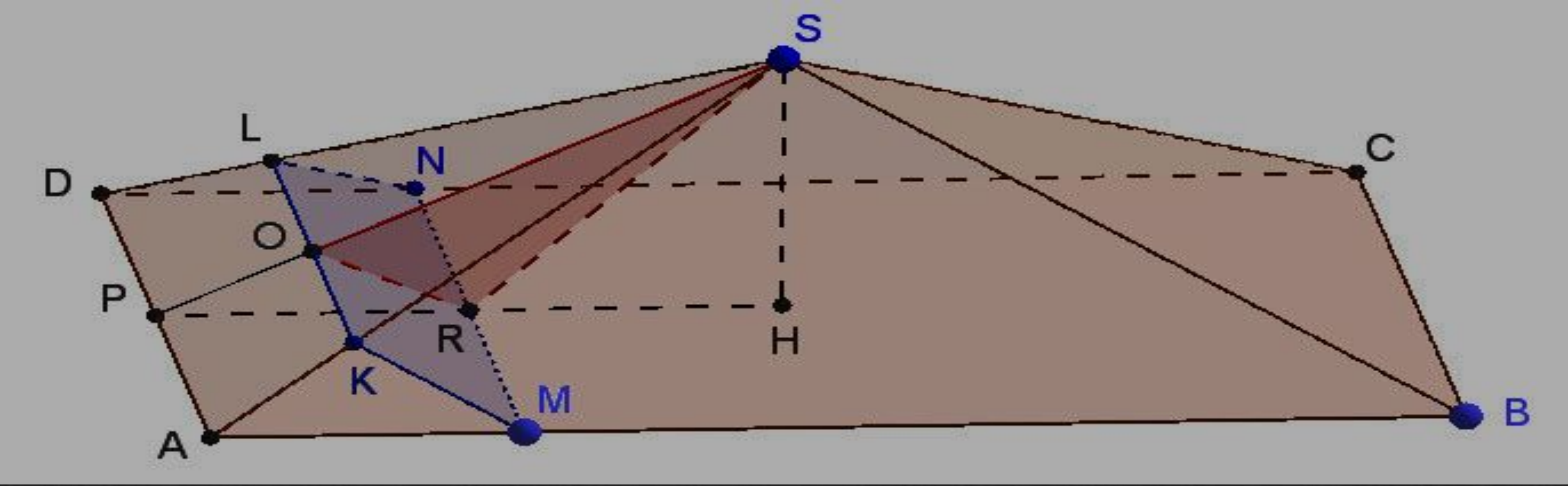
- а) Докажите, что плоскости *MNK* и *SBC* параллельны:
- Поскольку прямая MN параллельна прямой DA, которая принадлежит плоскости DAS, то прямая MN параллельна плоскости DAS. Следовательно, линия пересечения плоскости DAS и сечения KMN будет параллельна прямой MN. Тогда это линия KL. Следовательно KMNL — искомое сечение.
- Докажем, что плоскость сечения параллельна плоскости SBC. Прямая BC параллельна прямой MN, так как четырехугольник MNCB является прямоугольником .
- Теперь докажем подобие треугольников AKM и ASB. AC — диагональ квадрата. По теореме Пифагора для треугольника ADC находим: $AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = 16\sqrt{2}$



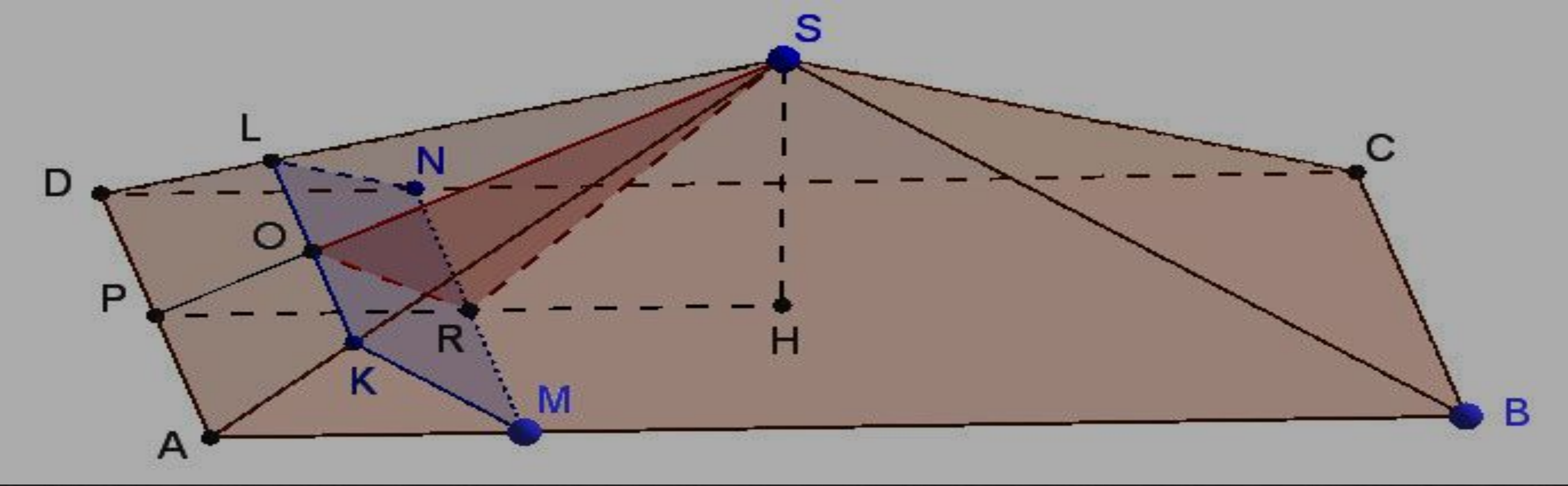
- AH — половина диагонали квадрата, поэтому $AH = 8\sqrt{2}$
- Тогда из теоремы Пифагора для прямоугольного треугольника AHS находим:

$$AS = \sqrt{AH^2 + SH^2} = 12$$

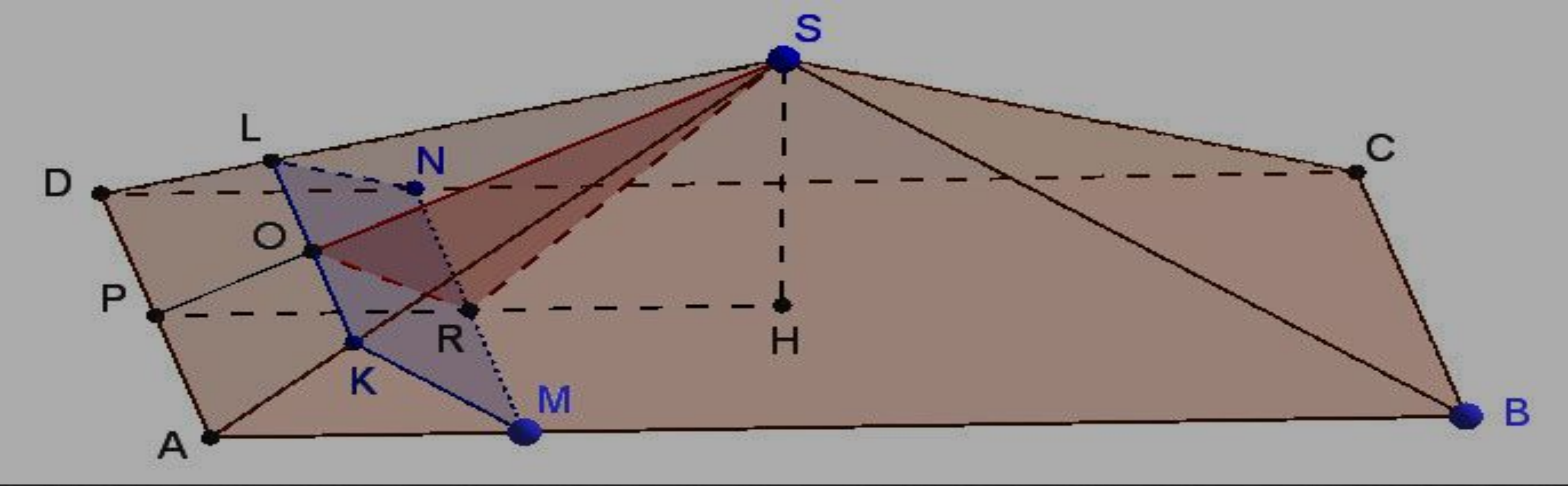
- Тогда получаем соотношения: $\frac{AK}{AS} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}; \frac{AM}{AB} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ Получается, что стороны, образующие угол А в треугольниках AKM и ASB, пропорциональны. Следовательно, треугольники подобны.
- Из этого следует равенство углов AMK и ABS. Так как эти углы соответственные при прямых KM, SB и секущей MB, то KM параллельна SB.



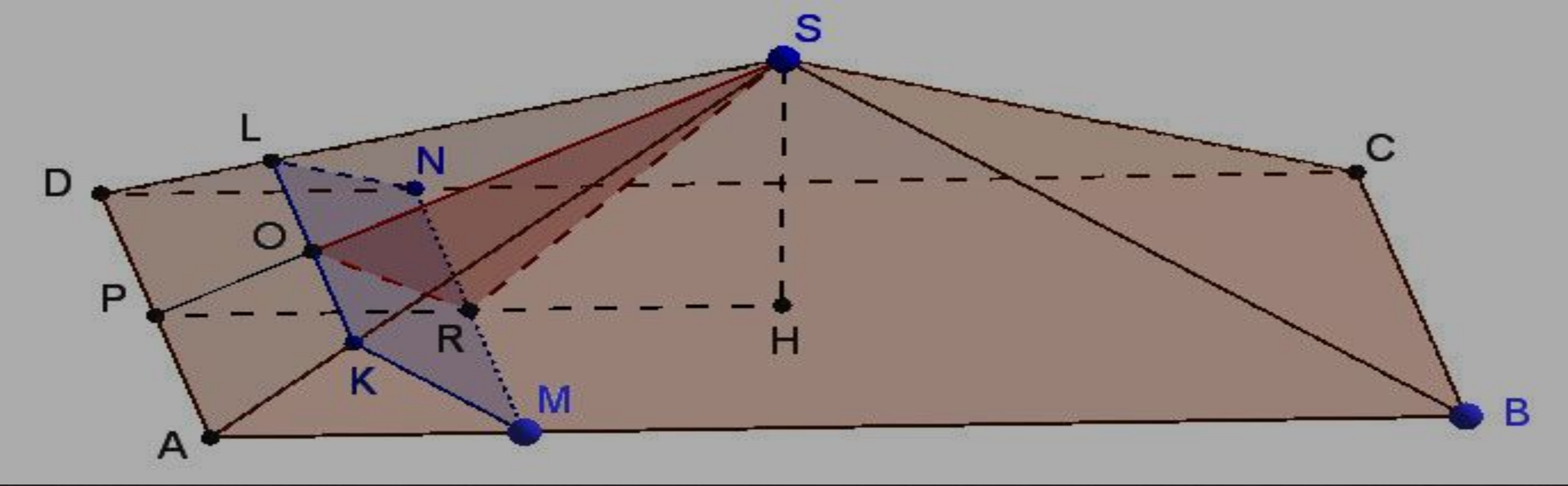
- Итак, мы получили, что две пересекающиеся прямые одной плоскости (KM и NM) соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости (SB и BC). Следовательно, плоскости MNK и SBC параллельны. $MNK \parallel SBC$ ЧТД.



- б) Найдите расстояние от точки *KLN* до плоскости *SBC*.
- Поскольку плоскости параллельны, расстояние от точки *K* до плоскости *SBC* равно расстоянию от точки *S* до плоскости *KMN*. Ищем это расстояние. Из точки *S* опускаем перпендикуляр *SP* к прямой *DA*. Плоскость *SPH* пересекается с плоскостью сечения по прямой *OR*. Искомое расстояние есть длин перпендикуляра из точки *S* к прямой *OR*.
- *KL* перпендикулярна плоскости *OSR*, так как она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости (*OR* и *OS*). Перпендикулярность *OR* и *KL* следует из теоремы о трёх перпендикулярах. Следовательно, *KL* перпендикулярна высоте треугольника *ORS*, проведенной к стороне *OR*. То есть эта высота перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости *KMN*, а значит перпендикулярна этой плоскости.



- Ищем стороны треугольника SOR.
  Сторону SR ищем по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника RSH: $SR = 4\sqrt{2}$
- Длину SP находим по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника PSH: $SP = 4\sqrt{5}$
- Треугольники SOK и SPA подобны с коэффициентом подобия $\frac{3}{4}$
- Тогда $SO = 3\sqrt{5}$ и $OP = \sqrt{5}$
- Из прямоугольного треугольника SPH находим $\cos\angle SPH = \frac{2}{\sqrt{5}}$



- Из теоремы косинусов для треугольника POR находим, что $OR = \sqrt{5}$
- Из теоремы косинусов для треугольника SOR находим $\cos \angle OSR = \frac{3}{\sqrt{10}}$
- Тогда из основного тригонометрического тождества находим $\sin \angle OSR = \frac{1}{\sqrt{10}}$
- Тогда площадь треугольника OSR равна: $S = \frac{1}{2} \cdot SO \cdot SR \cdot \sin \angle OSR = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = 6$
- Площадь можно представить так: $S = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot h$, где h искомая высота, тогда $h = \frac{12}{\sqrt{5}}$