Тема3. Нарушения предпосылок МНК

1. Мультиколлинеарность
2. Гетероскедастичность
3. Автокрреляция

Мультиколлинеарность (МТК) – это явление высокой взаимной коррелированности НП.

Два вида МТК:
1) совершенная (строгая, полная)
2) несовершенная (частичная)

Полная МТК при наличии функциональных связей между НП.

Это нарушение требования к рангу матрицы:

1) $$\operatorname{rank} \mathbf{X} < p + 1$$

2) $$\det \mathbf{X}'\mathbf{X} = 0$$

$$\mathbf{B} = \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

Частичная (реальная) МТК при сильных корреляционных связях между НП (высокие коэффициенты парной корреляции).

Если значения коэффициентов корреляции по абсолютной величине близки к 1, то почти совершенная МТК

Последствия МТК:

- Оценки коэффициентов УМР ненадежны и неустойчивы (увеличиваются стандартные ошибки оценок и уменьшаются t-статистики МНК-оценок)
- МНК-оценки коэффициентов неустойчивы (чувствительны к изменениям данных и размерности выборки)
- Возможность получения неверного знака у коэффициентов регрессии

Последствия МТК:

- Оценки коэффициентов УМР становятся очень чувствительными к ошибкам спец.
- Осложнение процесса определения наиболее существенных факторов
- Затрудняет экономическую интерпретацию коэффициентов УМР (выделение характеристик влияния факторов на ЗП в чистом виде)

ОДНАКО:

- Оценки коэффициентов остаются несмещенными
- Оценки коэффициентов немультикол.

факторов не ухудшаются

Практические рекомендации по выявлению МТК:

1. Плохая обусловленность матрицы (X'X), т.е. det(X'X)≈0
2. Близость к нулю минимального собственного числа λ_{min} матрицы (X'X).

$$\left|\mathbf{X}'\mathbf{X} - \lambda \mathbf{I}_{p+1}\right| = 0$$

Практические рекомендации по выявлению МТК:

4. **Анализ матрицы парных коэффициентов корреляции между НП (матрицы межфакторной корреляции)**

Присутствие в матрице парных коэффициентов корреляции значений коэффициентов интеркорреляции, превосходящих по абсолютной величине 0,7 – 0,80

Результаты анализа надежны лишь в случае двух НП

Практические рекомендации по выявлению МТК:

6. Анализ показателей частной корреляции

Коэффициент корреляции между двумя переменными, очищенный от влияния других переменных, наз. частным коэф. корреляции (ЧКК)

Методы устранения мультиколлинеарности

5. Переход к смещенным методам оценивания

«Ридж – регрессия» («гребневая регрессия»)

$$\mathbf{B}_\tau = \left(\mathbf{X}'\mathbf{X} + \tau \mathbf{I}_{p+1}\right)^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

$$\tau_0 \approx 0.1 - 0.4$$

2. Гетероскедастичность

Гомоскедастичность

1) $D(\varepsilon_i) = D(\varepsilon_j)$ для любых i и j

Гетероскедастичность

2) $D(\varepsilon_i) \neq D(\varepsilon_j)$ для любых i и j

Методы обнаружения гетероскедастичности:

1. Графический анализ остатков
2. Тест ранговой корреляции Спирмена
3. Тест Голдфелда-Квандта
4. Тест Глейзера
5. Тест Парка
6. Тест Бреуша-Пагана
7. Тест Уайта

Статистики

1. **Тест Бреуша-Пагана**

$$BP = ESS/[2(RSS/n)^2$$

2. **Тест Уайта**

$$\chi^2 = nR^2$$

Обобщенный метод наименьших квадратов

Теорема. Если в схеме Гаусса-Маркова не выполняется предпосылка о гомоскедастичности и некорелированности случайных возмущений, то наилучшей линейной процедурой оценки параметров модели является:

$$\mathbf{b} = \left(\mathbf{X}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{X}\right)^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{Y}$$

P - матрица ковариаций случайных возмущений

(положительно определенная матрица)

Взвешенный метод наименьших квадратов

Теорема. Если в схеме Гаусса-Маркова не выполняется предпосылка о гомоскедастичности случайных возмущений, то наилучшей линейной процедурой оценки параметров модели является:

$$\mathbf{b} = \left(\mathbf{X}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{X}\right)^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{Y}$$

P - матрица ковариаций случайных возмущений :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \sigma^2(e_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma^2(e_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma^2(e_n) \end{pmatrix}$$

3. Автокорреляция

Понятие автокорреляции

Модель называется автокоррелированной, если не выполняется третья предпосылка теоремы Гаусса-Маркова:

$Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \neq 0$ при $i \neq j$.

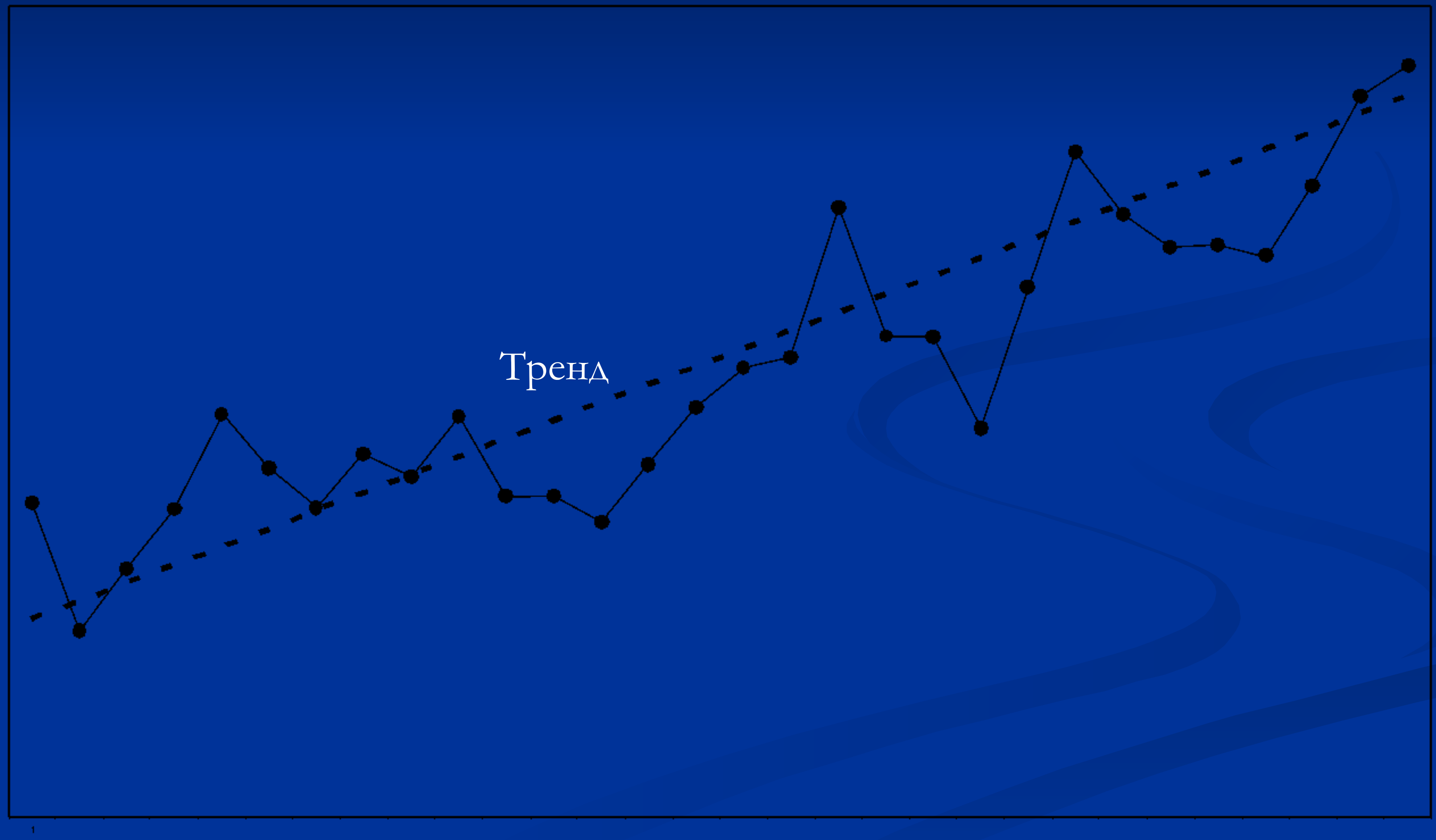
Автокорреляция чаще всего появляется в моделях временных рядов и моделировании циклических процессов.

Причины АК :

1) неправильный выбор спецификации модели
2) Наличие ошибок измерения ЗП
3) Цикличность значений экономических показателей
4) Запаздывание изменений значений экономических показателей по отношению к изменениям экономических условий
5) Сглаживание данных

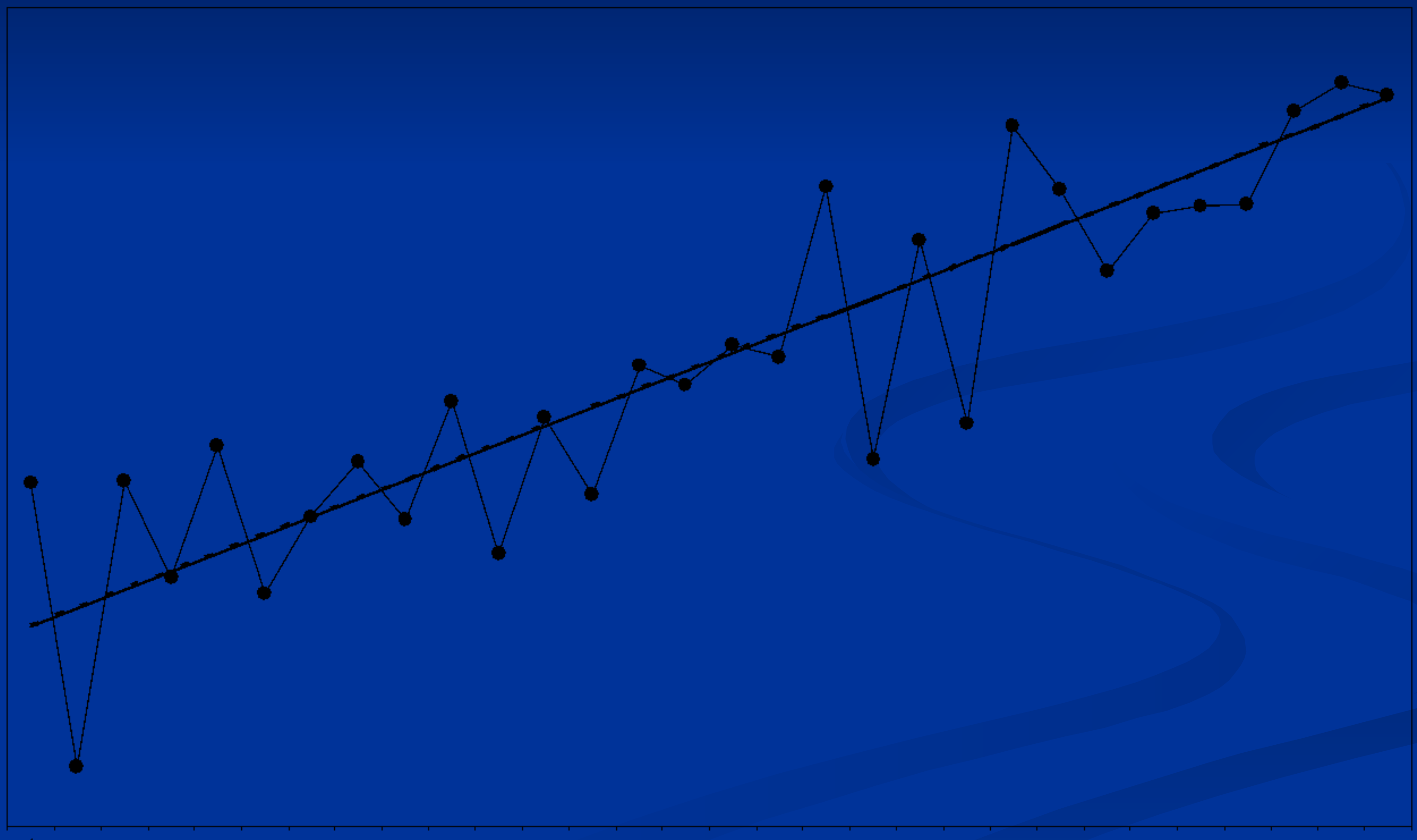
Понятие автокорреляции

Диаграмма рассеяния с положительной автокорреляцией.



Понятие автокорреляции

Пример отрицательной автокорреляции случайных возмущений.



Последствия автокорреляции при применении МНК:

1) оценки коэффициентов теряют эффективность
но остаются линейными и несмещенными
2) дисперсии оценок являются смещенными (часто занижены)
3) оценка остаточной дисперсии регрессии является смещенной (часто заниженной)
4) выводы по критериям Стьюдента и Фишера могут оказаться неверными. Это ухудшает прогнозные качества РМ.

Основные методы обнаружение АК:

1) Графический метод
2) Тест Дарбина-Уотсона
3) Метод рядов

Тест Дарбина-Уотсона

1. Предпосылки теста.

Случайные возмущения распределены по нормальному закону.

Имеет место авторегрессия первого порядка:

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$$

$M(u_t)=0$; $\sigma(u_t)=Const$

2. Статистика для проверки гипотезы:

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$$

Тест Дарбина-Уотсона

Для статистики DW не возможно найти критическое значение, т.к. оно зависит не только от $P_{дов}$ и степеней свободы p и n-1, но и от абсолютных значений регрессоров.

Возможно определить границы интервала D_L и D_u внутри которого критическое значение $DW_{кр}$ находится:

$$\mathbf{D_L \leq DW_{кр} \leq D_u}$$

Значения D_u и D_L находятся по таблицам.

Тест Дарбина-Уотсона

Нет автокорреляции $DW \to 2$

Положительная автокорреляция $DW \to 0$

Отрицательная автокорреляция $DW \to 4$

Интервалы (D_L, D_u) и (4-D_L, 4-D_u) зоны неопределенности.

Обобщенный метод наименьших квадратов

Теорема. Если в схеме Гаусса-Маркова не выполняется предпосылка о гомоскедастичности и некорелированности случайных возмущений, то наилучшей линейной процедурой оценки параметров модели является:

$$\mathbf{b} = \left(\mathbf{X}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{X}\right)^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{Y}$$

P - матрица ковариаций случайных возмущений

(положительно определенная матрица)