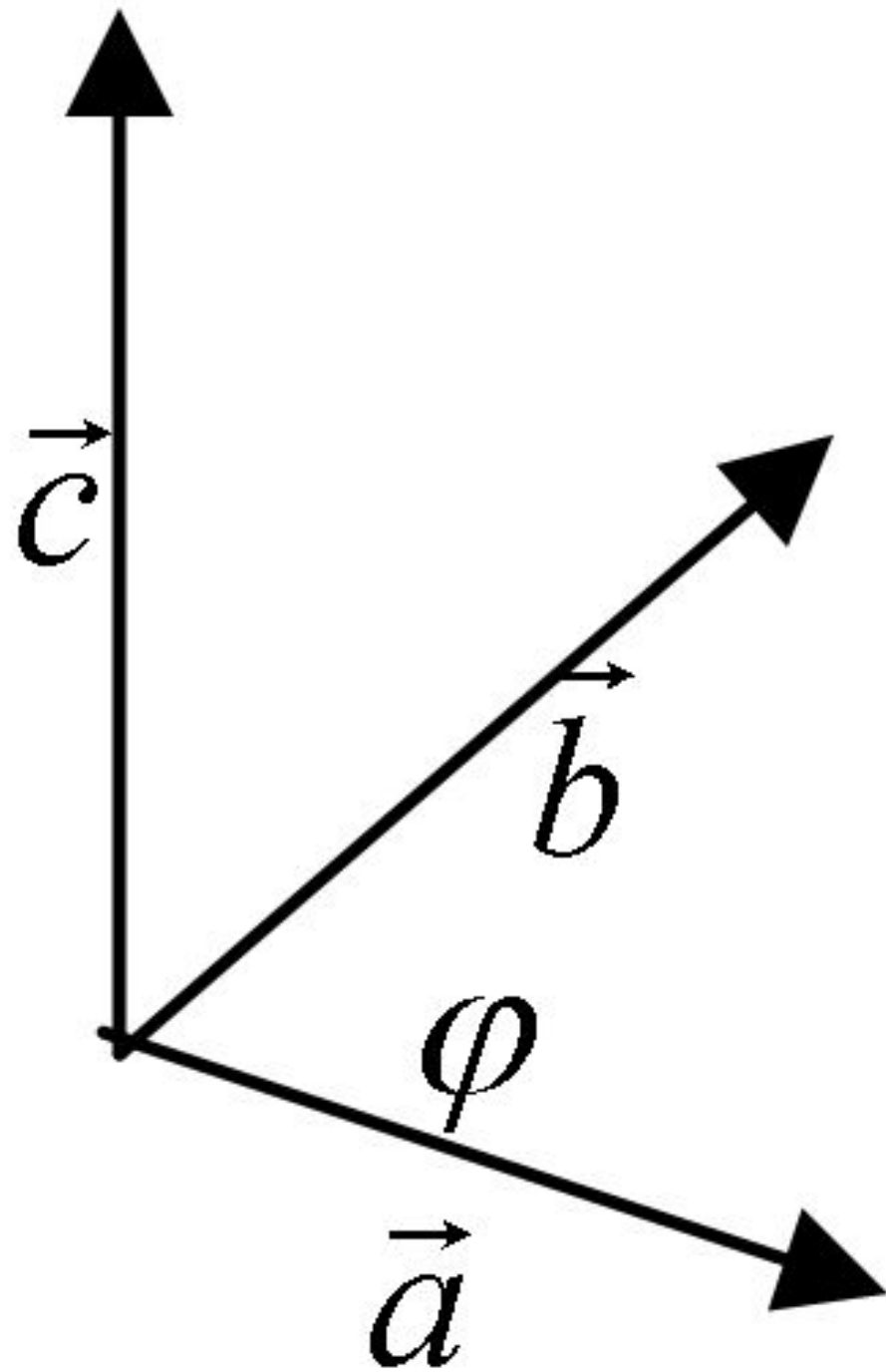


Векторное произведение векторов

- *Векторным произведением* векторов \vec{a} и \vec{b} называется вектор \vec{c} , обозначаемый $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, который удовлетворяет следующим трём условиям:

- **1.** $|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi;$
- **2.** $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b},$
- **3.** тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – правая (т.е. при наблюдении из конца вектора \vec{c} кратчайший поворот от \vec{a} к \vec{b} виден совершающимся против часовой стрелки).



Свойства векторного произведения

- 1. $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$
- 2. $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$
- 3. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
- 4. $\vec{a} \times \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \parallel \vec{b}$

• Если $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$

$$\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$$

то векторное произведение
вычисляется по формуле

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Приложения векторного произведения к задачам геометрии и механики.

- **Площадь параллелограмма** (геометрический смысл векторного произведения).

$$S = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

- **Площадь треугольника**

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

- ***Момент силы*** (механический смысл векторного произведения).
- Пусть точка A твердого тела закреплена, а в точке B приложена сила \vec{F} . Тогда возникает вращающий момент

$$\vec{M} = \vec{AB} \times \vec{F}$$

- **Пример.** Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(7,3,4)$, $B(1,0,6)$, $C(4,5,-2)$.

- **Решение.** Находим векторы

$$\overrightarrow{AB} = (-6, -3, 2), \quad \overrightarrow{AC} = (-3, 2, -6).$$

- Вычисляем векторное произведение

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -6 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & -6 \end{vmatrix} = \\
&= \hat{i} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} + \\
&+ \hat{k} \begin{vmatrix} -6 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} =
\end{aligned}$$

$$= 14\hat{i} - 42\hat{j} - 21\hat{k}.$$

• Тогда

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{14^2 + 42^2 + 21^2} =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 7\sqrt{2^2 + 6^2 + 3^2} = \frac{49}{2} = 24,5.$$

Смешанное произведение векторов

- **Определение.** *Смешанным произведением* трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется число

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

• Если

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1), \quad \vec{b} = (x_2, y_2, z_2),$$

$$\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$$

• то

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Приложения смешанного произведения к задачам геометрии

- **Объём параллелепипеда,**
 построенного на векторах
 \boxtimes \boxtimes \boxtimes
 a, b, c (геометрический смысл
 смешанного произведения).

$$V = \begin{vmatrix} \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

- **Объём пирамиды**

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

- **Условие компланарности векторов в координатной форме:**

a, b, c – компланарны

$$\Leftrightarrow a b c = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

- **Пример.** Вычислить объём пирамиды с вершинами в точках $A(2,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(4,0,6)$, $D(2,3,8)$.

• **Решение.** Находим векторы

$$\overrightarrow{AB} = (-2, 3, 0)$$

$$\overrightarrow{AC} = (2, 0, 6)$$

$$\overrightarrow{AD} = (0, 3, 8)$$

Вычислим смешанное

произведение этих векторов:

$$\begin{aligned} \vec{AB} \vec{AC} \vec{AD} &= \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 8 \end{vmatrix} = \\ &= -2 \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} + 0 = -2(0 - 18) - \\ &\quad - 3(16 - 0) = 36 - 48 = -12 \end{aligned}$$

• Тогда

$$V = \frac{1}{6} \left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{AB} & \overrightarrow{AC} & \overrightarrow{AD} \end{array} \right| = \frac{|-12|}{6} = 2.$$

Модуль 2

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Плоскость и её основные уравнения

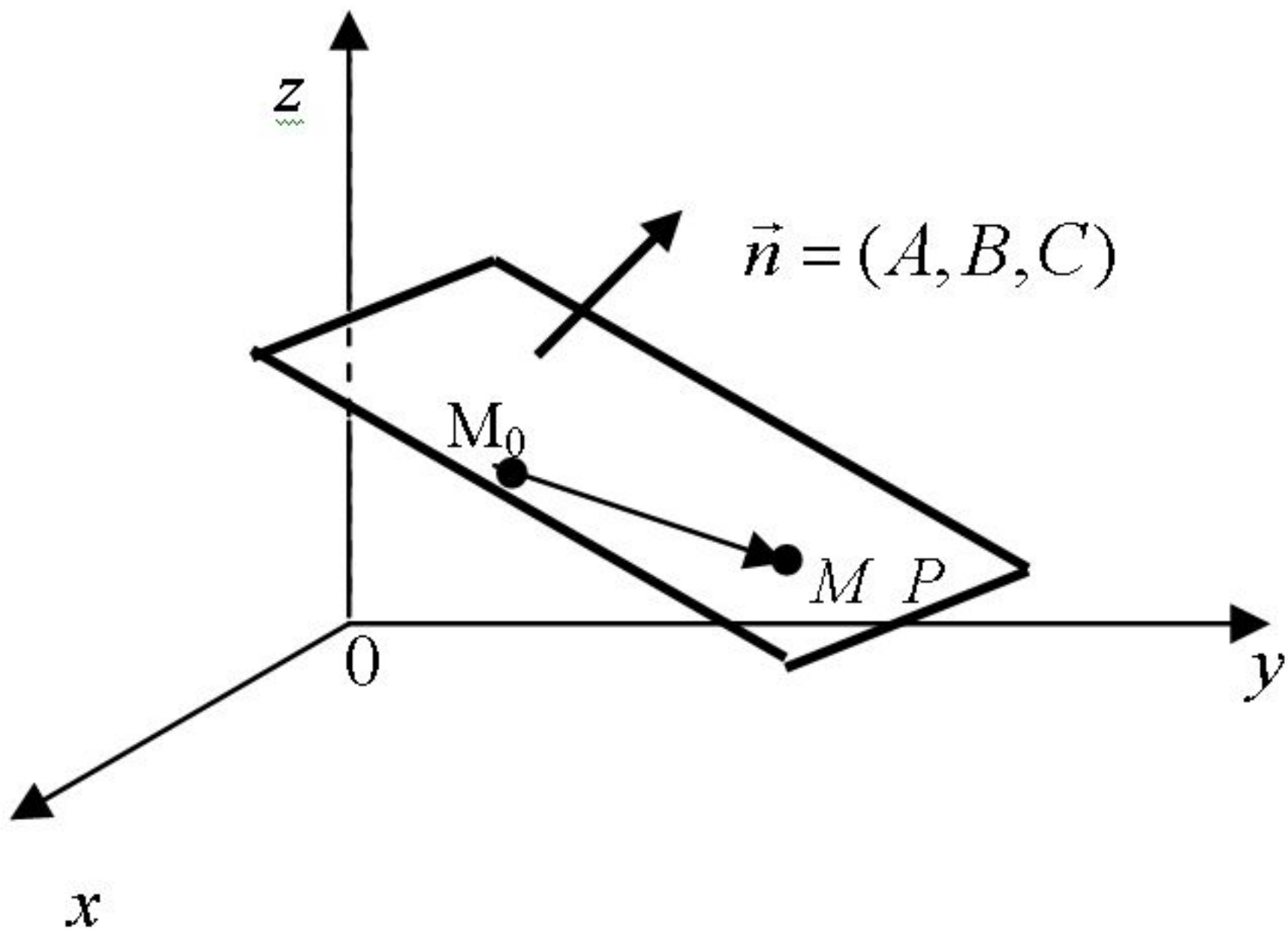
- Рассмотрим плоскость P в прямоугольной декартовой системе координат.

- Положение плоскости вполне определяется

точкой $M_0(x_0, y_0, z_0) \in P$

и вектором нормали

$$\vec{n} = (A, B, C) \perp P \quad (\vec{n} \neq \vec{0})$$

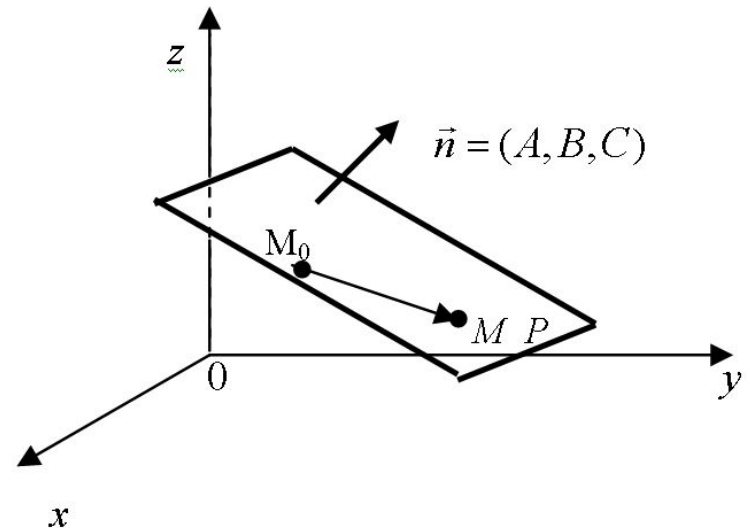


- Возьмём любую точку

$$M(x, y, z) \in P$$

и построим вектор

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

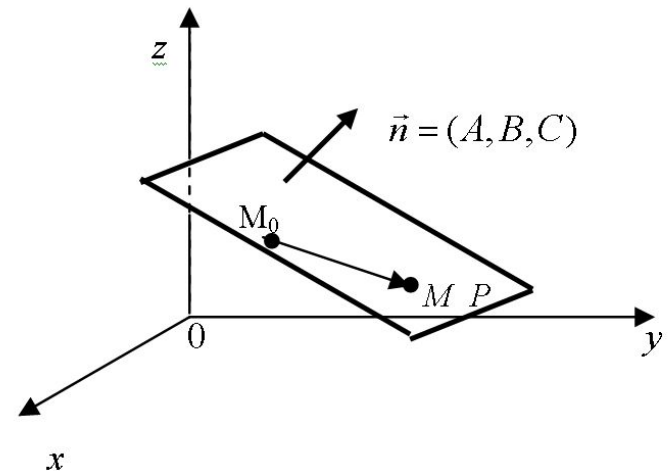


• Так как $\vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M}$, то скалярное произведение

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0,$$

или

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$



• Получили *уравнение плоскости,*
заданной

точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$

и вектором нормали $\vec{n} = (A, B, C)$

- Если в уравнении

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

раскрыть скобки и обозначить

$$D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$$

то получим *общее уравнение плоскости*:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$(A^2 + B^2 + C^2 > 0)$$

- **Теорема.** *Всякое уравнение вида*

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$(A^2 + B^2 + C^2 > 0)$$

определяет некоторую плоскость в пространстве.

- Если в этом уравнении какой-либо из коэффициентов A , B , C равен нулю, то плоскость расположена параллельно той оси, координата которой отсутствует в уравнении.

- Например, при $A = 0$ плоскость $Bu + Cz + D = 0$ параллельна оси Ox ; при $A = B = 0$ плоскость $Cz + D = 0$ параллельна осям Ox и Oy , т.е. плоскости xOy и т.д.

- Пусть в уравнении

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

ни один из коэффициентов не равен 0. Перепишем это уравнение в виде

$$Ax + By + Cz = -D$$

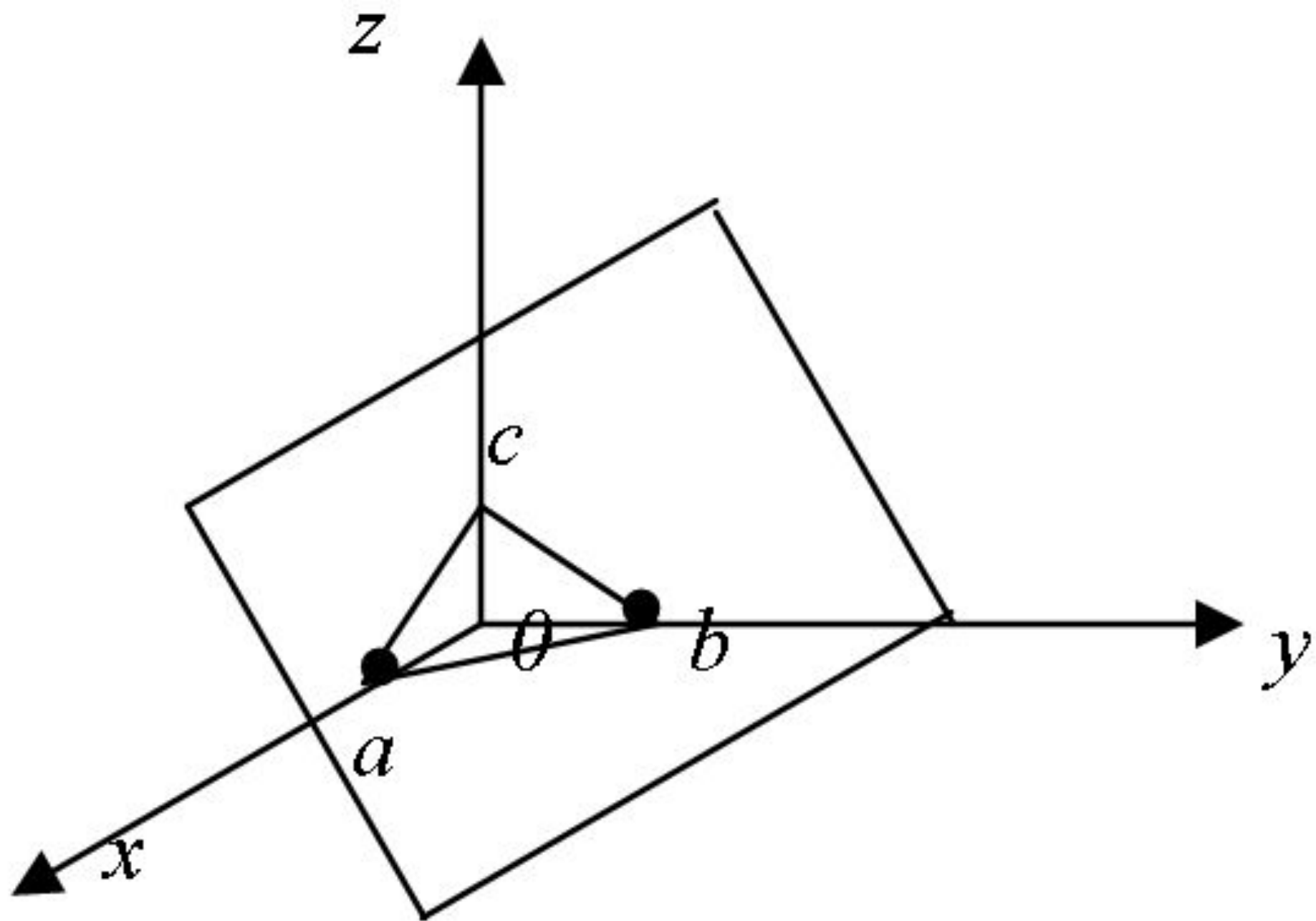
разделим обе части этого равенства на $-D$ и обозначим

$$-\frac{D}{A} = a, \quad -\frac{D}{B} = b, \quad -\frac{D}{C} = c$$

Получим уравнение плоскости в отрезках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

- где a , b , c – это величины направленных отрезков, отсекаемых плоскостью на осях координат

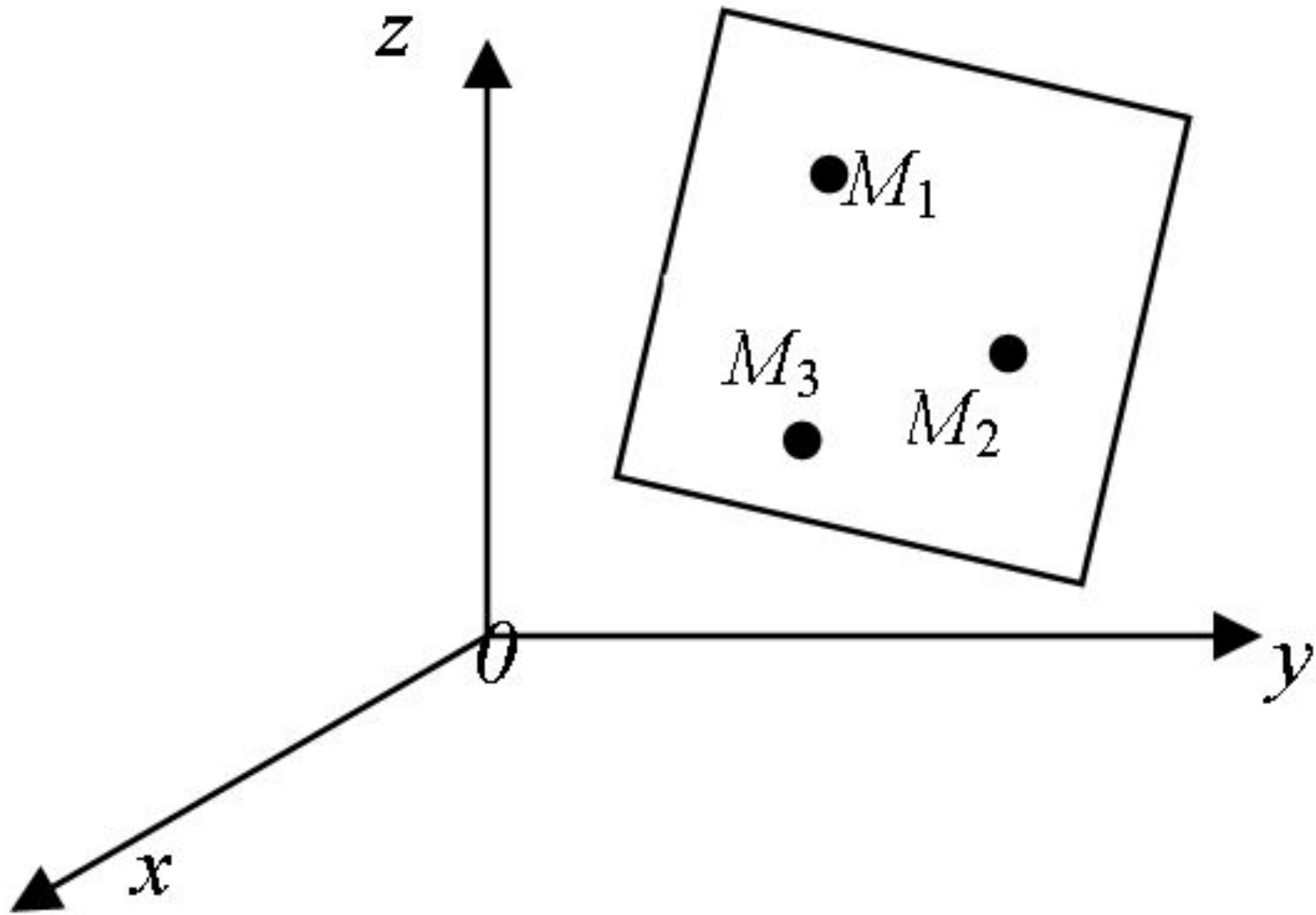


• Если три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$

$M_2(x_2, y_2, z_2)$

$M_3(x_3, y_3, z_3)$

не лежат на одной прямой, то
через эти точки проходит
единственная плоскость:



- *Уравнение плоскости, проходящей через три точки, имеет вид:*

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

- Пусть даны две плоскости

$$P_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

и

$$P_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

- *Угол φ между двумя плоскостями* равен углу между их векторами нормали:

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \\ &= \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}\end{aligned}$$

• Расстояние d от точки

$$M_1(x_1, y_1, z_1)$$

до плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

определяется по формуле

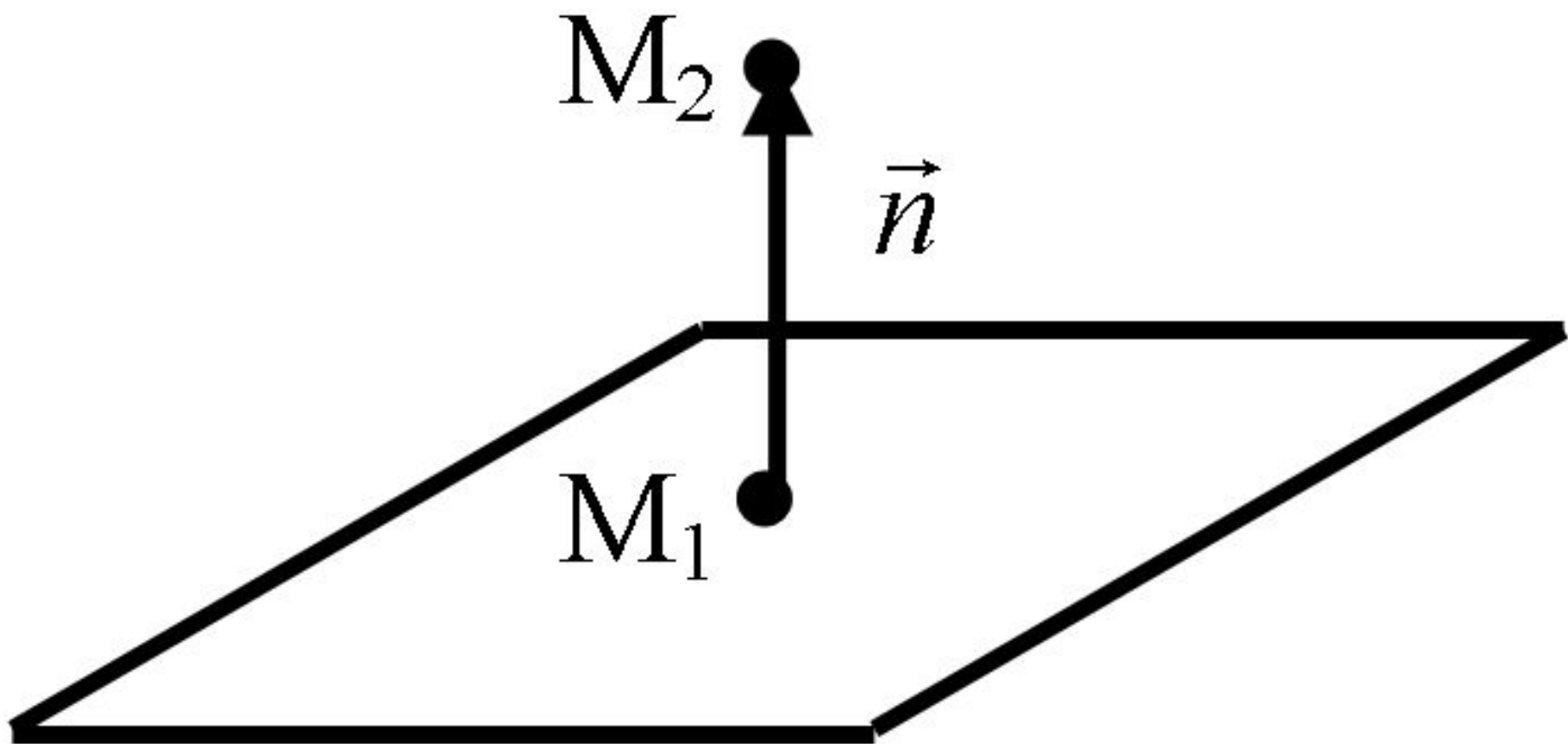
$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

• **Пример.** Даны две точки

$$M_1(-2, 0, 1) \quad M_2(1, 4, 2)$$

Записать уравнение плоскости,
проходящей через точку M_1
перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$.

- **Решение.** Поскольку искомая плоскость перпендикулярна вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$, то в качестве вектора нормали \vec{n} возьмем вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (3, 4, 1)$



• Подставив теперь в уравнение $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

$$A = 3, \quad B = 4, \quad C = 1$$

а также координаты точки M_1 :

$$x_0 = -2, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = 1$$

получим уравнение

$$3(x + 2) + 4(y - 0) + 1(z - 1) = 0$$

или

$$3x + 4y + z + 5 = 0$$

– это и есть искомое общее
уравнение плоскости