Введение в математический анализ

Модуль 3

Понятие функции. Способы задания функций

- Пусть *X* – некоторое множество действительных чисел.

- **Определение.** Если каждому элементу x из множества X по некоторому закону f ставится в соответствие вполне определённое действительное число y, то говорят, что y есть *функция* переменной величины x и пишут $y = f(x)$.

- Множество X называется *областью определения функции $f(x)$* и обозначается $D(f)$. Множество всех значений y функции $y = f(x)$, когда x пробегает всю область определения, называется *областью изменения* или *областью значений функции* и обозначается $E(f)$.

- Например, для функции $y = \sin x$ область определения $D(f) = \mathrm{R}$, область значений $E(f) = [-1; 1]$.

- Различают следующие *способы задания функции:* табличный, графический, аналитический (с помощью формул).

- Под *графиком функции* понимают множество точек плоскости, абсциссы которых есть значения независимой переменной, а ординаты равны соответствующим значениям функции. График фукции есть некоторая линия на плоскости. Например, уравнение $y = x^2$ задает функцию, графиком которой является парабола.

- К *основным элементарным функциям* относятся:
- $y = x^a$ (при постоянном а $\in$ R) – степенная функция;
- $y = a^x$ (при постоянном а $\in$ R, а > 0, а ≠ 1) – показательная функция;
- $y = \log_a x$ (при постоянном а $\in$ R, а > 0, а ≠ 1) – логарифмическая функция;

- $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg}\, x$, $y = \mathrm{ctg}\, x$ – тригонометрические функции;
- $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arctg}\, x$, $y = \mathrm{arcctg}\, x$ – обратные тригонометрические функции.

- Функция, заданная последовательной цепью нескольких функций ($y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$), называется *сложной* функцией. Например, функция $y = \lg^3(2^x)$ сложная, и она может быть представлена следующей цепью основных элементарных функций: $y = z^3$, $z = \lg u$, $u = 2^x$.

- Функции, образованные из основных элементарных функций посредством конечного числа алгебраических операций и взятия функции от функции, называются *элементарными*.

- Все остальные функции называются *неэлементарными.* Примером неэлементарной функции может служить функция вида

$$y = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$$

- Функция, определяемая уравнениями $\begin{cases} y = \varphi(t), \\ x = \psi(t), \end{cases}$

в которых зависимость между *y* и *x* устанавливается посредством третьей переменной *t*, называется заданной *параметрически,* при этом *t – параметр.*

- Например, уравнения

$$y = 2t + 1, \quad x = t - 2$$

определяют линейную функцию

$$y = 2(x + 2) + 1 = 2x + 5$$

Предел числовой последовательности. Предел функции

- **Определение.** Число A называется *пределом последовательности*

a_1, a_2, …,a_n,…, если для любого положительного числа ε существует такой номер N = N(ε), что при всех n > N выполняется неравенство .

$$|a_n - A| < \varepsilon$$

- Если последовательность a_1, a_2, …a_n,… имеет своим пределом число A, то это записывается следующим образом:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A$$

- или

$$a_n \to A \text{ при } n \to \infty$$

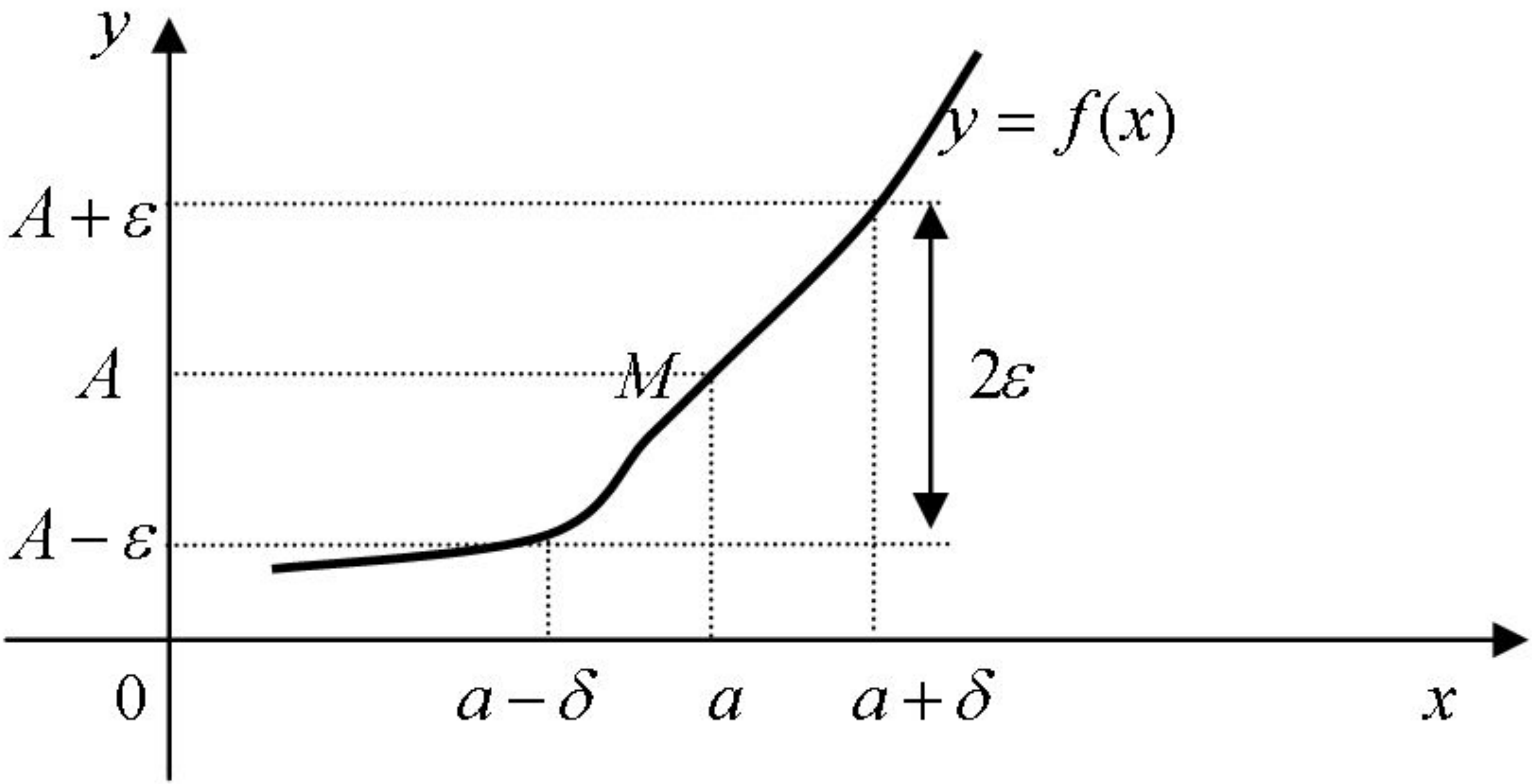
- **Определение.** Число *A* называется *пределом функции* y = f(x) *при x* → *a* (*в точке x* = *a*), если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что при $0 < |x - a| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

- Обозначают этот факт так:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

- Если число А является пределом функции у = f(x) *при* $x \to a$, то на графике это иллюстрируется следующим образом.

- Так как из неравенства $0 < |x - a| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, то это значит, что для всех x, отстоящих от a не далее чем на δ, точка M графика функции $y = f(x)$ лежит внутри полосы шириной 2ε, ограниченной прямыми $y = A - \varepsilon$ и $y = A + \varepsilon$. Очевидно, что с уменьшением ε величина δ также уменьшается.



y
$y = f(x)$
$A+\varepsilon$
A
M
2ε
$A-\varepsilon$
0
$a-\delta$
a
$a+\delta$
x

- Число А называется *пределом функции* $y = f(x)$ *при* $x \to \pm\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $M > 0$, что при всех $|x| > M$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

- Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной в области D*, если существует постоянное число $M > 0$, что для всех $x \in D$ выполняется неравенство $|f(x)| < M$.

- Например, функция

$$y = \frac{2}{1+x^2}$$

ограничена для всех x $\in$ R, так как в этой области $|f(x)| \leq 2$.

Бесконечно малые и бесконечно большие функции

- **Определение.** Функция α(x) называется *бесконечно малой при x → a*, если $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$

- Функция β(x) называется *бесконечно большой при x → a,* если $\lim\limits_{x \to a} \beta(x) = \infty$

- Например, функция y = sin x является бесконечно малой при *x* → *0*, а функция $y = \frac{1}{x^2+1}$ есть бесконечно малая при *x* → ±∞, так как их пределы равны нулю. Функция y = tg x является бесконечно малой при *x* → *0* и бесконечно большой при *x* → *π/2*.

- **Теорема.** *Если функция* α(x) – *бесконечно малая при x → a*, *то* $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ — *бесконечно большая функция при x → a*

$$\left(\frac{1}{0} = \infty\right)$$

- *Если функция* β(x) *– бесконечно большая при x → a, то*

$$\frac{1}{\beta(x)}$$ *– бесконечно малая функция при x → a*

$$\left(\frac{1}{\infty} = 0\right)$$

- Справедливы следующие утверждения:
- Сумма конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

- Произведение ограниченной функции на бесконечно малую есть бесконечно малая функция.
- Произведение конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

Теоремы о пределах

- Если пределы $\lim\limits_{x\to a} u(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} v(x)$

существуют и конечны, то

1) $$\lim_{x\to a} cu(x) = c\lim_{x\to a} u(x)$$

где $c = const$;

2) $$\lim_{x\to a}(u(x)+v(x)) =$$

$$= \lim_{x\to a} u(x) + \lim_{x\to a} v(x)$$

3) $$\lim_{x\to a}(u(x)\cdot v(x)) =$$

$$= \lim_{x\to a} u(x)\cdot \lim_{x\to a} v(x)$$

4) $$\lim_{x\to a}\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} u(x)}{\lim\limits_{x\to a} v(x)}$$

где $\lim\limits_{x\to a} v(x) \neq 0$

Замечательные пределы

- Первый замечательный предел:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

- Второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

где e — иррациональное число, e ≈ 2,718281828 — одна из фундаментальных величин в математике.

- Функция $y = e^x = \exp(x)$ называется *экспонентой*; $y = \log_e x = \ln x$ называется *натуральным логарифмом.*

- **Пример.** Вычислить

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+3}{x^2+x-3}$$

- **Решение.** Так как

$$\lim_{x\to 2}(x^2+x-3)=\lim_{x\to 2}x^2+\lim_{x\to 2}x-3=3\neq 0$$

то применима теорема о пределе частного. Значит,

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+3}{x^2+x-3}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+3)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2+x-3)}=\frac{1}{3}$$

- **Пример**. Вычислить

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x^2+1}{x^3+4x-2}$$

- **Решение.** Так как при $x \to \infty$ числитель и знаменатель дроби, стоящей под знаком предела, стремятся к бесконечности, то имеем неопределенность вида

$$\frac{\infty}{\infty}$$

- Для раскрытия таких неопределенностей делят числитель и знаменатель дроби на старшую степень x. После деления на x^3 получаем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x^2+1}{x^3+4x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{4}{x^2}-\frac{2}{x^3}}=$$

$$=\frac{2-0+0}{1+0-0}=2$$

- **Пример.** Вычислить

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 9}$$

- **Решение.** Так как

$$\lim_{x\to 3}(x^2 + x - 12) = 0,$$

$$\lim_{x\to 3}(x^2 - 9) = 0$$

то имеем неопределённость вида

$$\frac{0}{0}$$

- Так как,

$$x^2 + x - 12 = (x-3)(x+4);$$

$$x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$$

- то

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 9} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+4)}{(x-3)(x+3)} =$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{x+4}{x+3} = \frac{7}{6}$$

- **Пример.** Вычислить

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-3x+2}$$

- **Решение.** Имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$ Умножим числитель и знаменатель дроби на выражение ($\sqrt{x+7}+3$), а также разложим знаменатель на линейные множители:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-3x+2}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x+7}-3\right)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{(x-1)(x-2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+7-9}{(x-1)(x-2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-1)(x-2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-1)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=\frac{1}{6}$$

- **Пример.** Вычислить

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 7x}{tg 3x}$$

- **Решение.** Для раскрытия неопределённости $\frac{0}{0}$ воспользуемся первым замечательным пределом. Считая, что x ≠ 0, проведём очевидные преобразования:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{tg\,3x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 7x}{7x}\cdot 7x}{\dfrac{\sin 3x}{\cos 3x\cdot 3x}\cdot 3x}\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 7x}{7x}\cdot 7}{\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot 3}\cdot\cos 3x=$$

$$=\frac{7}{3}\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{7x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}}\cdot\lim_{x\to 0}\cos 3x=\frac{7}{3}\cdot\frac{1}{1}\cdot 1=\frac{7}{3}$$

- **Пример.** Вычислить

$$\lim_{x \to \infty}\left(1 - \frac{2}{x}\right)^{x}$$

- **Решение.** Для раскрытия неопределённости 1^∞ воспользуемся вторым замечательным пределом:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1-\frac{2}{x}\right)^{-\frac{x}{2}}\right)^{-2}=e^{-2}$$

поскольку

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{-\frac{x}{2}}=\lim_{y=-\frac{x}{2}\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}=e$$

Сравнение бесконечно малых функций

- Для сравнения двух бесконечно малых функций α(x) и β(x) в точке x = a находят предел отношения

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A$$

- Если $A \neq 0$ и $A \neq \infty$, то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *бесконечно малыми одного порядка.*
- Если $A = 0$, то $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой высшего порядка по сравнению с* $\beta(x)$. Записывается это так: $\alpha(x) = o(\beta(x))$.

- Если A = 1, то бесконечно малые функции α(x) и β(x) называют *эквивалентными* и обозначают α(x) ~ β(x). Например, sin x ~ x *при x → 0*, так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

- *Основные эквивалентности при $x \to 0$*:
- $\sin kx \sim kx$, $\quad \operatorname{tg} kx \sim kx$,
- $\arcsin kx \sim kx$, $\quad \operatorname{arctg} kx \sim kx$,
- $\ln(1+kx) \sim kx$, $\quad e^{kx} - 1 \sim kx$.

- При вычислении пределов используют следующую теорему.
- **Теорема.** *Предел отношения двух бесконечно малых функций в некоторой точке равен пределу отношения эквивалентных им бесконечно малых функций в той же точке.*

- **Пример**. Вычислить

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{x\sin 3x}$$

- **Решение.** Воспользуемся эквивалентными бесконечно малыми функциями. Так как при *x → 0*

$$1 - \cos 5x = 2\sin^2 \frac{5x}{2} \sim$$

$$\sim 2\left(\frac{5\mathrm{x}}{2}\right)^2 = 25\frac{x^2}{2}$$

- и sin 3x ~ 3x, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{x\sin 3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{25\dfrac{x^2}{2}}{x\cdot 3x}=\frac{25}{6}$$

Сравнение бесконечно малых функций

- Для сравнения двух бесконечно малых функций α(x) и β(x) в точке x = a находят предел отношения

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A$$

- Если A ≠ 0 и A ≠ ∞, то функции α(x) и β(x) называются *бесконечно малыми одного порядка.*
- Если A = 0, то α(x) называется *бесконечно малой высшего порядка по сравнению с* β(x). Записывается это так: α(x) = *o*(β(x)).

- Если A = 1, то бесконечно малые функции α(x) и β(x) называют *эквивалентными* и обозначают α(x) ~ β(x). Например, sin x ~ x *при x → 0*, так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

- *Основные эквивалентности при $x \to 0$*:
- $\sin kx \sim kx$, $\operatorname{tg} kx \sim kx$,
- $\arcsin kx \sim kx$, $\operatorname{arctg} kx \sim kx$,
- $\ln(1+kx) \sim kx$, $e^{kx} - 1 \sim kx$.

- При вычислении пределов используют следующую теорему.
- **Теорема.** *Предел отношения двух бесконечно малых функций в некоторой точке равен пределу отношения эквивалентных им бесконечно малых функций в той же точке.*

- **Пример**. Вычислить

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 5x}{x \sin 3x}$$

- **Решение.** Воспользуемся эквивалентными бесконечно малыми функциями. Так как при *x → 0*

$$1 - \cos 5x = 2\sin^2 \frac{5x}{2} \sim 2\left(\frac{5\mathrm{x}}{2}\right)^2 = 25\frac{x^2}{2}$$

и sin 3x ~ 3x, то

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos 5x}{x \sin 3x} = \left(\frac{0}{0} \right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{25 \dfrac{x^2}{2}}{x \cdot 3x} = \frac{25}{6}$$

Непрерывность функции

- **Определение.** Функция y = f(x) называется *непрерывной в точке* $x = x_0$, если предел функции в точке x_0 существует и

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

- *Односторонними* называются пределы:

левосторонний предел в точке a:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \lim_{x\to a-0} f(x) = f(a-0)$$

правосторонний предел в точке a:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x) = f(a+0)$$

- **Определение.** Функция у = f(x) называется *непрерывной в точке* $x = x_0$, если существуют односторонние пределы в точке x_0 и

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$$

- Если односторонние пределы конечны, но нарушается хотя бы одно из равенств

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$$

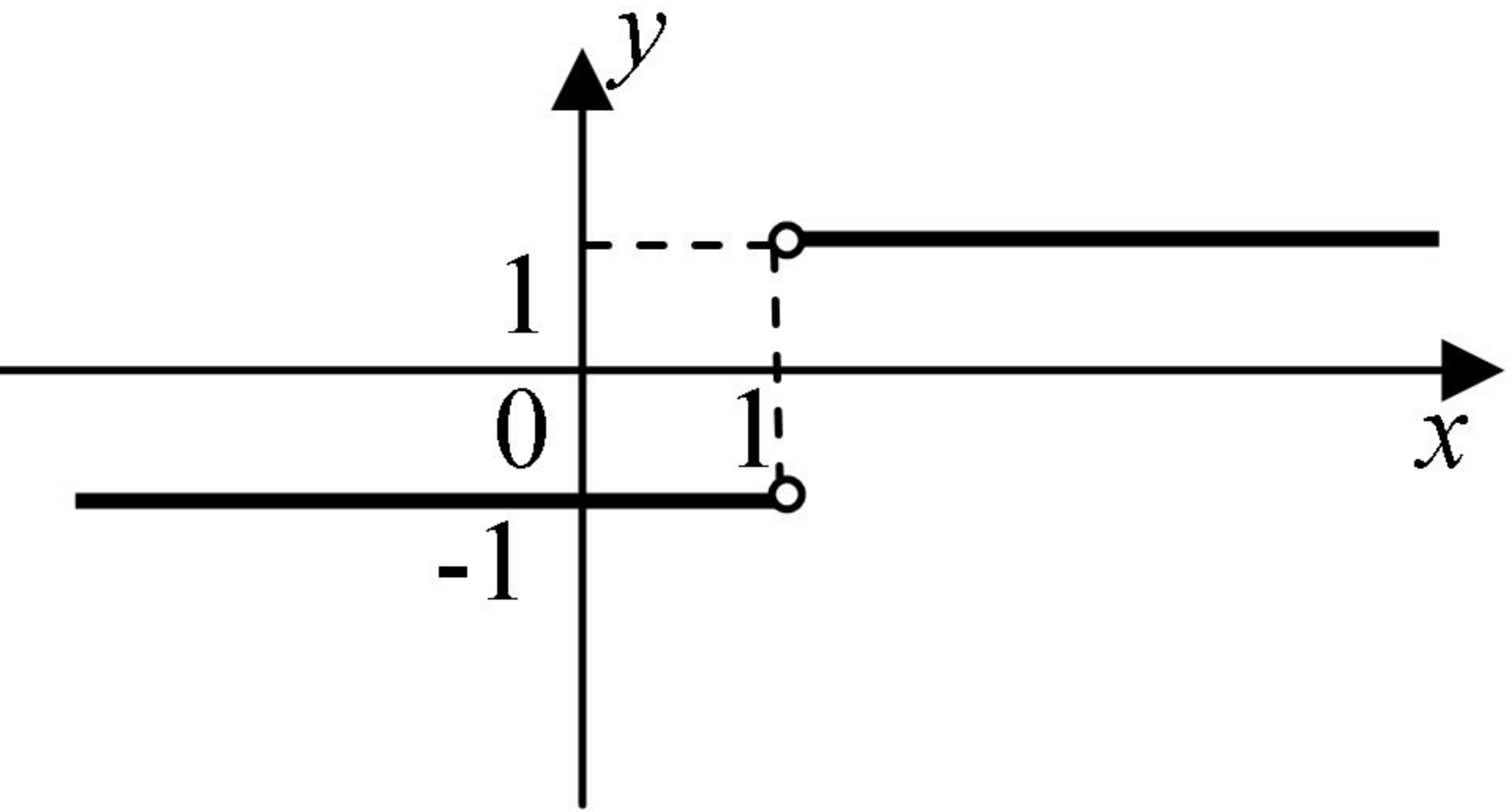
то x_0 называется *точкой разрыва 1-го рода*.

- Если хотя бы один из этих односторонних пределов не существует или равен бесконечности, то x_0 называется *точкой разрыва второго рода*.

- Например, функция

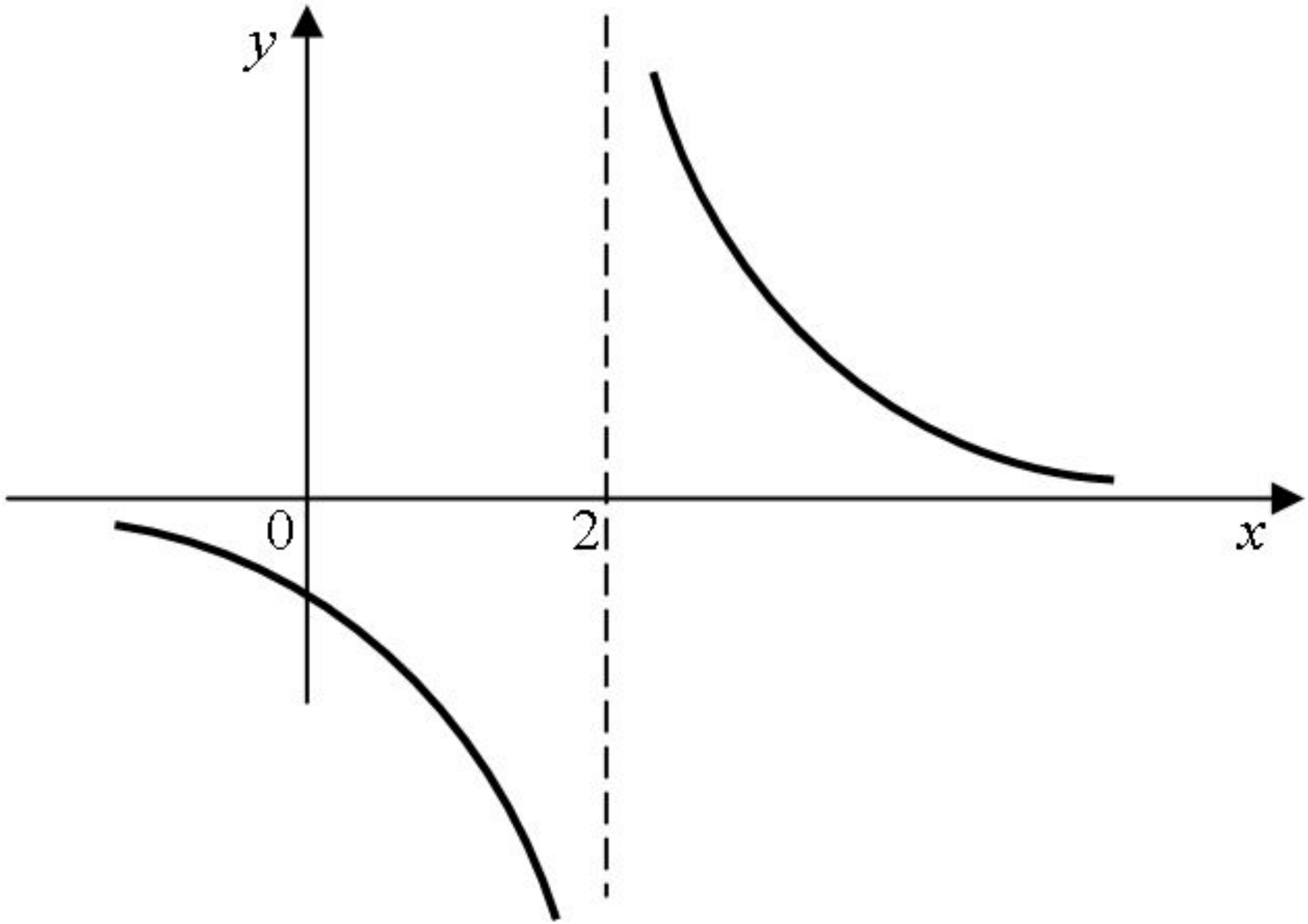
$$y = \frac{|x-1|}{x-1} = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad x > 1, \\ -1, & \text{при} \quad x < 1 \end{cases}$$

имеет в точке x = 1 разрыв 1-го рода


y
1
0
1
x
-1

- Функция $$y = \frac{1}{x-2}$$

имеет в точке x = 2 разрыв второго рода



y
0
2
x

- Если функция непрерывна во всех точках отрезка [a; b], то она называется *непрерывной на этом отрезке*.

- Из определения непрерывности функции и теорем о пределах следуют теоремы:
- **I.** Если функции f(x) и g(x) непрерывны в точке x_0, то в этой точке непрерывны функции

$$f(x)+g(x)$$

$$f(x)\cdot g(x)$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

$$(g(x_0)\neq 0)$$

- **II.** Сложная функция, составленная из непрерывных функций, непрерывна в соответствующей точке.
- **III.** Всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке своей области определения.