Формулы понижения степени

Упражнение

- Вычислить

$$\sin 35°25' \cdot \cos 24°35' + \sin 24°35' \cdot \cos 35°25' = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2 \sin 15° \cdot \cos 15° = \frac{1}{2}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$= 1 - \sin^2 x$$

$$=$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x)$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Формулы понижения степени

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$tg^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\frac{1 - \cos 2x}{2}}{\frac{1 + \cos 2x}{2}} = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$$

$$tg\, x \cdot ctg\, x = 1 \Rightarrow ctg^2 x = \frac{1}{tg^2 x} \Rightarrow ctg^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x}$$

Пример:

$$\frac{\pi}{2} \le \frac{\alpha}{2} \le \frac{3\pi}{4} \Rightarrow sin\frac{\alpha}{2} > 0, cos\frac{\alpha}{2} < 0$$

- Пусть $cos\,\alpha = -\frac{12}{13}, \pi \le \alpha \le \frac{3\pi}{2}$. Найти $sin\frac{\alpha}{2}, cos\frac{\alpha}{2}, tg\frac{\alpha}{2}, ctg\frac{\alpha}{2}$.

Решение:

$$sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - cos\,\alpha}{2} = \frac{1 - \left(-\frac{12}{13}\right)}{2} = \frac{25}{26} \Rightarrow sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{25}{26}} = \frac{5}{\sqrt{26}}$$

$$cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + cos\,\alpha}{2} = \frac{1 - \frac{12}{13}}{2} = \frac{1}{26} \Rightarrow cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1}{26}} = -\frac{1}{\sqrt{26}}$$

$$tg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{sin\frac{\alpha}{2}}{cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{5}{\sqrt{26}}}{-\frac{1}{\sqrt{26}}} = -5 \quad ctg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{tg\,\frac{\alpha}{2}} = -\frac{1}{5}$$

Ответ: $sin\frac{\alpha}{2} = \frac{5}{\sqrt{26}}, cos\frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{\sqrt{26}}, tg\,\frac{\alpha}{2} = -5, ctg\,\frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{5}$

Пример:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t$$

- Пусть $\sin\alpha = 0{,}2$. Найти $\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$.

Решение:

$$\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$t = \frac{\pi}{2} - \alpha \Rightarrow \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \sin^2\frac{t}{2}$$

$$\sin^2\frac{t}{2} = \frac{1 - \cos t}{2}$$

$$\cos t = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha = 0{,}2$$

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - 0{,}2}{2} = 0{,}4$$

Ответ: 0,4.

Пример:

- Решить уравнение $1 - \cos x = \sin x \cdot \sin\frac{x}{2}$.

Решение:

$$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$$

$$2\sin^2\frac{x}{2} =$$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}$$

$$2\sin^2\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} = 0$$

$$2\sin^2\frac{x}{2}(1-\cos\frac{x}{2}) = 0$$

$= 0$ или $= 0$

$\frac{x}{2} = \pi k, k \in Z$ | $\cos\frac{x}{2} = 1$

$x = 2\pi k, k \in Z$ | $\frac{x}{2} = 2\pi k, k \in Z$

$x = 4\pi k, k \in Z$

Ответ: $2\pi k, k \in Z$.