

Теорія ймовірностей

Лекція 5

Основні поняття теорії ймовірностей

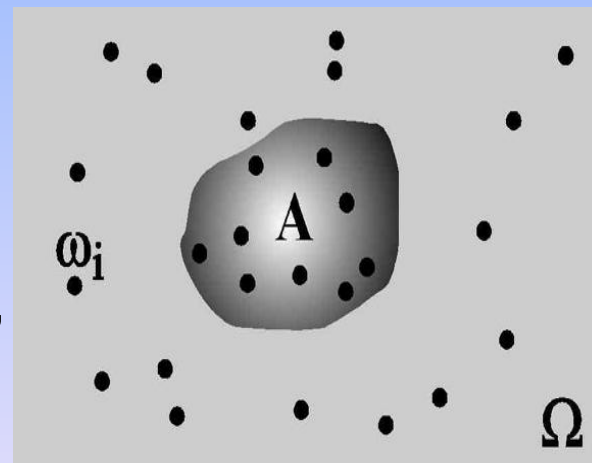
Експеримент (випробування) – може повторюватися багаторазово при незмінних умовах, при цьому результат експерименту в кожному конкретному випадку точно передбачити неможливо

Результат експерименту (елементарна подія)

Множина всіх результатів експерименту

Подія – підмножина множини всіх результатів

Повна група подій – сукупність всіх подій, які можуть відбутися в даному випробуванні



ПРИКЛАД ВИКОРИСТАННЯ ОСНОВНИХ ПОНЯТЬ



Кубик кладеться в стаканчик, струшується, з стаканчика викочується на стіл і котиться до повної зупинки.

Результат: кількість точок на верхній грані, наприклад, $\omega_i = 2 \quad i = 1, \dots, 6$

Множина всіх результатів –

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

A – випала парна кількість очок

B – випала непарна кількість очок

C – випало більше 3 очків

$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$B = \{1, 3, 5\}$$

$$C = \{4, 5, 6\}$$

Випадкова подія - це подія, яка за рівних умов може відбутися, а може і не відбутися в даному випробуванні, тобто її появу не можна гарантувати

ВИДИ ПОДІЙ

ПОДІЇ

ДОСТОВІРНА
(відбудеться обов'язково)

НЕМОЖЛИВА
(не відбудеться ні при яких
обставинах)

ВІРОГІДНА (ВИПАДКОВА)
(може статися, а може і ні)

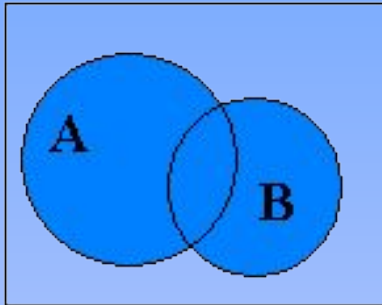
ПОДІЇ

СУМІСНІ-НЕСУМІСНІ

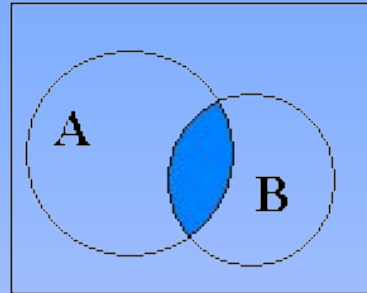
ЗАЛЕЖНІ-НЕЗАЛЕЖНІ

РІВНОМОЖЛИВІ

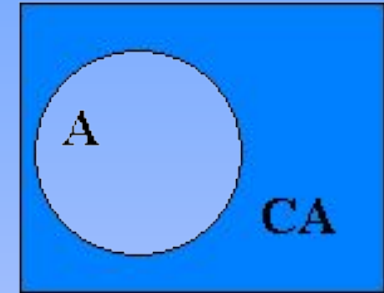
ОПЕРАЦІЇ НАД ПОДІЯМИ. ДІАГРАМИ ЕЙЛЕРА



Сума подій



добуток



протилежна подія

або ... або

і ... і

(хоча б один) –
(жодного)

$$A + B = \Omega$$

$$A \cdot B = \emptyset$$

$$\bar{A} = B$$

$$A + C = D$$

$$A \cdot C = E$$

$$\bar{C} = G$$

$$D = \{2, 4, 5, 6\}$$

$$E = \{4, 6\}$$

$$G = \{1, 2, 3\}$$

$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$B = \{1, 3, 5\}$$

$$C = \{4, 5, 6\}$$

Класичне визначення ймовірності

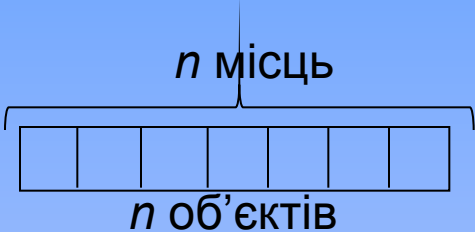

Ймовірність події дорівнює відношенню кількості виходів, що сприяють події, до загальної кількості виходів, тобто

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Ймовірність $P(A)$ може приймати значення від 0 до 1:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

ФОРМУЛЫ КОМБИНАТОРИКИ И ПРИМЕРЫ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

<p>Перестановки</p>		$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ $0! = 1$
<p>Сполучення</p>	<p>Вибір m об'єктів з n об'єктів; порядок не важливий</p>	$C_6^2 = \frac{6!}{2!(6-2)!} =$ $= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15$
<p>Розміщення</p>	<p>Вибір m об'єктів з n об'єктів; порядок важливий</p>	$A_6^2 = \frac{6!}{(6-2)!} =$ $= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{5 \cdot 6}{1} = 30$
<p>Розміщення з повтореннями</p>		<p>з цифр 1 і 2 скласти 4-х значні номери</p> $2^4 = 16$ <p>1111 1121 1222 1112 1211 і т.д. 1122 1212</p>

Теорема додавання ймовірностей несумісних подій

- *Імовірність появи однієї з двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій:*

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

- **Наслідок.** *Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці:*

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

- **Зауваження.** Якщо ймовірність подій позначена як p , то ймовірність протилежної події позначають як q , тоді:

$$p + q = 1$$

Теорема додавання ймовірностей сумісних подій

Ймовірність реалізації однієї із двох сумісних випадкових подій, дорівнює сумі ймовірностей цих подій, без ймовірності їхньої спільної появи, тобто:

- $P(A \text{ або } B) = P(A) + P(B) - P(AB).$

Теорема множення ймовірностей

- Імовірність події, обчислена за умови, що відбулася інша подія, називається *умовною ймовірністю* події A і позначається $P_B(A)$,
- або $P(A/B)$
- Можливість спільної появи двох подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність іншої, обчислену в припущенні, що перша вже відбулася:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

- Зокрема, для незалежних подій:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

тобто ймовірність спільної появи двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій.

Імовірність появи хоча б однієї події

- Імовірність настання події A , що полягає в появі хоч би однієї з подій A_1, A_2, \dots, A_n , незалежних у сукупності, дорівнює різниці між одиницею і добутком ймовірностей протилежних подій $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$:

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 \dots q_n$$

Формула повної ймовірності

- Ймовірність події A , що може настати лише за умови появи однієї з несумісних подій B_1, B_2, \dots, B_n , що утворюють **повну групу**, дорівнює сумі добутків ймовірностей кожної з цих подій на відповідну умовну ймовірність події :

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A) ,$$

де

$$P(B_1) + P(B_2) + \dots + P(B_n) = 1$$

Повторні незалежні випробування

Схема випробувань Бернуллі: тільки два можливих результату – «успіх» та «невдача». Ймовірність успіху p і ймовірність невдачі q , $p + q = 1$

- **Формула Бернуллі.** Ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях, в кожному з яких ймовірність появи події A дорівнює p , подія настане рівно m раз (байдуже, в якій послідовності), дорівнює:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}$$

Формула Пуассона:

- Використовують для рішення задач за схемою Бернуллі, коли $n \geq 10$ і $p < 0,1$

$$P_n(m) \approx \frac{\mu^m e^{-\mu}}{m!}$$

$$\mu = np$$

Формула Муавра-Лапласа

- Використовують для рішення задач за схемою Бернуллі, коли $n \geq 10$ і $p > 0,1$

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$$

- Для інтервала значень:

$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!