МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1. Какие методы решения тригонометрических уравнений вы знаете?

2. Определите и ответьте, какими методами нужно решать данные тригонометрические уравнения?

а) $\sin 2x - \cos x = 0$

б) $2\sin^2 x - 5\sin x = -3$

в) $\cos^2 x - \sin^2 x = \sin x - \cos x$

г) $\sin 2x - 3\sin x \cos x + 2\cos^2 x = 0$

3. Решите простейшие тригонометрические уравнения:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2};$

б) $\cos(\pi - x) - 1 = 0;$

в) $\cos\left(\frac{\pi}{3} + 2\right) = 1;$

г) $\sin\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right) + 2 = 0;$

д) $tg 3x - 2 = 0.$

Некоторые типы тригонометрических уравнений.

1. Уравнения, сводящиеся к квадратным, относительно
   $\cos x = t$, $\sin x = t$.

$$A \sin^2 x + B \cos x + C = 0$$
$$A \cos^2 x + B \sin x + C = 0$$

Решаются методом введения новой переменной.

2.Однородные уравнения первой и второй степени.

I степени. $A \sin x + B \cos x = 0 \quad : \cos x$

$$A \operatorname{tg} x + B = 0$$

II степени. $A \sin^2 x + B \sin x \cos x + A \cos^2 x = 0 \quad : \cos^2 x$

$$A \operatorname{tg}^2 x + B \operatorname{tg} x + C = 0$$

Решаются методом разложения на множители и методом введения новой переменной.

3. Уравнение вида:

$A \sin x + B \cos x = C$. $\quad A, B, C \neq 0$

Применимы все методы.

4. Понижение степени.

$A \cos 2x + B \cos^2 x = C.$

$A \cos 2x + B \sin^2 x = C.$

Решаются методом разложения на множители.

$A \sin 2x + B \sin^2 x = C.$

$A \sin 2x + B \cos^2 x = C.$

Сводятся к однородным уравнениям $C = C(\sin^2 x + \cos^2 x).$

Формулы.

Универсальная подстановка.

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}; \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}; \quad \operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}};$$

x ≠ π + 2πn;
Проверка обязательна!

Понижение степени.

$\cos^2 x$ = *(1 + cos2x) : 2*

$\sin^2 x$ = *(1 – cos 2x) : 2*

Метод вспомогательного аргумента.

a cosx +b sinx заменим на C sin(x+ϕ), где $C = \sqrt{a^2 + b^2}$;

sinϕ = $\frac{a}{C}$; cosϕ = $\frac{b}{C}$; ϕ - вспомогательный аргумент.

Сведение к однородному.

Уравнения вида $A \sin 2x + B \sin^2 x = C$, $A \sin 2x + B \cos^2 x = C$.

Пример. $5 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x + 6 \cos^2 x = 5$.

Разложение на множители.

Пример. $\cos^2 x - 2 \cos x = 4 \sin x - \sin 2x$

Проблемы ,возникающие при решении тригонометрических уравнений

1.Потеря корней:

- делим на g(x).
- опасные формулы (универсальная подстановка).

Этими операциями мы сужаем область определения.

2. Лишние корни:

- возводим в четную степень.
- умножаем на g(x) (избавляемся от знаменателя).

Этими операциями мы расширяем область определения.

Уравнение $2\sin x - 3\cos x = 0$.

Уравнение $2\sin x - 3\cos x = 0$.

Поделив уравнение на $\cos x$, получим $2tgx - 3 = 0$, $tgx = \frac{3}{2}$, $x = arctg\frac{3}{2} + \pi n, n \in Z$.

При решении этой задачи обе части уравнения $2\sin x - 3\cos x = 0$ были поделены на $\cos x$.

Напомним, что при делении уравнения на выражение, содержащее неизвестное, могут быть потеряны корни. Поэтому нужно проверить, не являются ли корни уравнения $\cos x = 0$ корнями данного уравнения. Если $\cos x = 0$, то из уравнения $2\sin x - 3\cos x = 0$ следует, что $\sin x = 0$. Однако $\sin x$ и $\cos x$ не могут одновременно равняться нулю, так как они связаны равенством $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Следовательно, при делении уравнения $a\sin x + b\cos x = 0$ где $a \neq 0$, $b \neq 0$, на $\cos x$ (или $\sin x$) получаем уравнение, равносильное данному.

Решить уравнение $\cos^2 x + \sin x \cos x = 0$

1) Делить на cosx нельзя, так как в условии не указано , что cosx не равен нулю. Но можно утверждать, что sinx не равен нулю, так как в противном случае cosx равен 0, что невозможно , так как $\sin^2 x - \cos^2 x = 1$. Значит можно разделить на $\sin^2 x$.

2) Решим уравнение разложением на множители:

$\cos^2 x + \sin x \cos x = 0$,

$\cos x(\cos x + \sin x) = 0$,

$\cos x = 0$ или $\cos x + \sin x = 0$,

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;$$

$\mathrm{tg}\, x = -1$,

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z;$$

Уравнения, линейные относительно sin x и cos x

a sin x + в cos x = c.

Если а=в=0, а с не равно 0, то уравнение теряет смысл;

Если а=в=с=0, то х – любое действительное число, то есть уравнение обращается в тождество.

Рассмотрим случаи, когда а,в,с не равны 0.

$$2\sin x + \cos x = 2$$

Примеры:

3 sin 5x - 4 cos 5x = 2

$$a^2 + b^2 \geq c^2$$

2 sin 3x + 5 cos 3x = 8.

Последнее уравнение не имеет решений, так как левая часть его не превосходит 7.

Уравнения, этого вида можно решить многими способами: с помощью универсальной подстановки, выразив sin x и cos x через tgx ; сведением уравнения

$$2\sin x+\cos x=2$$

Данное уравнение является уравнением
вида $a\sin x+b\cos x=c$, (1)

где $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$, которое можно решить другим способом.
Разделим обе части этого уравнения на $\sqrt{a^2+b^2}$:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad (2)$$

Введем вспомогательный аргумент φ , такой, что

$$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Такое число существует, так как

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$$

Таким образом, уравнение можно записать в виде

$$\sin x\cos\varphi+\cos x\sin\varphi=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$\sin(x+\varphi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Последнее уравнение является простейшим тригонометрическим уравнением.

Уравнение $2\sin x + \cos x = 2$.

Используя формулы **sin x = 2 sin** $\frac{x}{2}$**cos** $\frac{x}{2}$, **cos x = cos²** $\frac{x}{2}$**- sin²** $\frac{x}{2}$ и

записывая правую часть уравнения в виде $2 = 2\cdot 1 = 2(\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2})$

получаем $4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 2\sin^2\frac{x}{2} + 2\cos^2\frac{x}{2}$,

$3\sin^2\frac{x}{2} - 4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} = 0$. Поделив это уравнение на $\cos^2\frac{x}{2}$,

получим равносильное уравнение $3tg^2\frac{x}{2} - 4tg\frac{x}{2} + 1 = 0.$

Обозначая $tg\frac{x}{2} = y$, получаем $3y^2 - 4y + 1 = 0$, откуда $y_1 = 1, y_2 = \frac{1}{3}$.

1) $tg\frac{x}{2} = \frac{1}{3}, \quad \frac{x}{2} = arctg\frac{1}{3} + \pi n, \quad x = 2arctg\frac{1}{3} + 2\pi n, n \in Z.$

2) $tg\frac{x}{2} = 1, \quad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z;$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z; \quad x = 2arctg\frac{1}{3} + 2\pi n, n \in Z.$

Решить уравнение

- $4\sin^2 x - 4\sin x - 3 = 0$
- $2\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$

Ответы.

- $4\sin^2 x - 4\sin x - 3 = 0$
- $(-1)^{n+1}\,\Pi/6 + \Pi n,\ n \in Z.$

- $2\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$
- $\pm\Pi/6 + \Pi n;\quad -\Pi/2 + 2\Pi n,\ n \in Z.$

Решить уравнение

$$4\sin x + 3\cos x = 5.$$

Решить уравнение $4\sin x + 3\cos x = 5.$

Здесь $a = 4,\ b = 3,\ c = 5,\ \sqrt{a^2 + b^2} = 5$

Поделим обе части уравнения на 5:

$$\frac{4}{5}\sin x + \frac{3}{5}\cos x = 1.$$

Введем вспомогательный аргумент φ, такой, что $\cos\varphi = \frac{4}{5},\quad \sin\varphi = \frac{3}{5}$

Исходное уравнение можно записать в виде

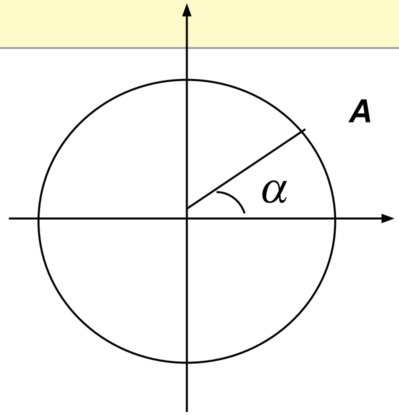
$$\sin x\cos\varphi + \cos x\sin\varphi = 1$$

$$\sin(x + \varphi) = 1$$

откуда $x + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ где\ \varphi = \arccos\frac{4}{5},\ x = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{4}{5} + 2\pi n,\ n \in Z$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{4}{5} + 2\pi n, n \in Z.$

	$\frac{\pi}{6}$=30°	$\frac{\pi}{4}$=45°	$\frac{\pi}{3}$= 60°
***sin* x**	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
***cos* x**	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
***tg* x**	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
***ctg* x**	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$



	$0°$	$\frac{\pi}{2} = 90°$	$\pi = 180°$	$\frac{3\pi}{2} = 270°$	$2\pi = 360°$
***sin* x**	0	1	0	-1	0
***cos* x**	1	0	-1	0	1
***tg* x**	0	-	0	-	0
***ctg* x**	-	0	-	0	-