

Лекция №3

Раздел 1. Основанные понятия и основные законы теории вероятностей.

Тема 2. Основные законы теории вероятностей.

Цель лекции: дать знания об основных законах теории вероятностей.

Вопросы лекции:

- 1.14. Применение теорем умножения и сложения вероятностей к расчету надежности систем.**
- 1.15. Формула полной (средней) вероятности.**
- 1.16. Формула Байеса (теорема гипотез).**
- 1.17. Теорем о повторении опытов (формула Я. Бернулли).**

1.14. Применение теорем умножения и сложения вероятностей к расчету надежности систем.

- **Надежностью системы** называется ее способность выполнять заданные функции, сохраняя свои эксплуатационные показатели в заданных пределах в течение требуемого промежутка времени или требуемой наработки.
- Одним из основных количественных показателей надежности системы является **вероятность $P(t)$ безотказной работы** за время t , которая представляет собой вероятность того, что система проработает безотказно в течение времени t , начав работать в момент времени $t=0$, или вероятность того, что время работы системы до отказа T окажется больше заданного времени работы t : $P(t) = P(T > t)$.
- При объединении элементов в систему различают их последовательное (основное), параллельное (резервное) и смешанное соединения.
- Соединение элементов в систему называется *последовательным*, если отказ системы происходит при отказе любого ее элемента.
- Вычислим вероятность $P = P(t)$ безотказной работы системы при последовательном соединении элементов.
- Надежная работа системы (событие A) представляет собой произведение событий A_i , состоящих в безотказной работе каждого элемента: $A = A_1 A_2 \dots A_n$. Так как события A_1, A_2, \dots, A_n независимы, то в соответствии с теоремой умножения будем иметь

$$P = P(A) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n) = \prod_{i=1}^n P_i.$$

Применение теорем умножения и сложения вероятностей к расчету надежности систем

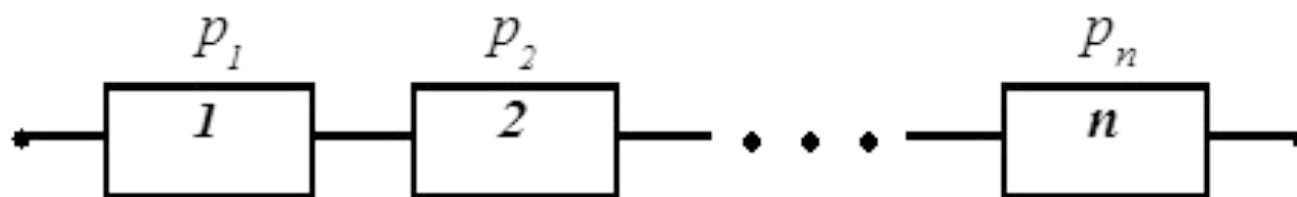


Рис. 1.16. Последовательное соединение элементов в систему

1.14. Применение теорем умножения и сложения вероятностей к расчету надежности систем.

- Соединение элементов в систему называется *параллельным*, если отказ системы происходит при отказе всех ее элементов.
- Для определения надежности системы при параллельном соединении элементов в систему рассмотрим следующие события: \bar{A} отказ системы; \bar{A}_i отказ i -го элемента,

$$P(\bar{A}_i) = 1 - P(A_i) = 1 - p_i \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Очевидно, что

- $\bar{A} = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_n$. Так как события \bar{A}_i , $i = 1, 2, \dots, n$ - независимы, то по теореме умножения получим

$$P(\bar{A}) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2) \dots P(\bar{A}_n) = \prod_{i=1}^n (1 - p_i).$$

- Безотказная работа системы является событием A , противоположным отказу. Поэтому

$$P = P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i). \quad (1.14.2)$$

- Формула (2) показывает, что с увеличением числа элементов в системе надежность системы при параллельном соединении увеличивается, причем вероятность безотказной работы системы превышает вероятность безотказной работы любого элемента, в том числе и самого надежного. При резервировании структура системы усложняется. Поэтому на практике применяют не поэлементное резервирование, а поблочное, при котором надежность хотя и ниже, чем при поэлементном резервировании, но выше, чем при резервировании всей системы.
- Вероятности безотказной работы элементов берутся или из прошлого опыта эксплуатации, или оцениваются с помощью проведения испытаний элементов на надежность.

Применение теорем умножения и сложения вероятностей к расчету надежности систем

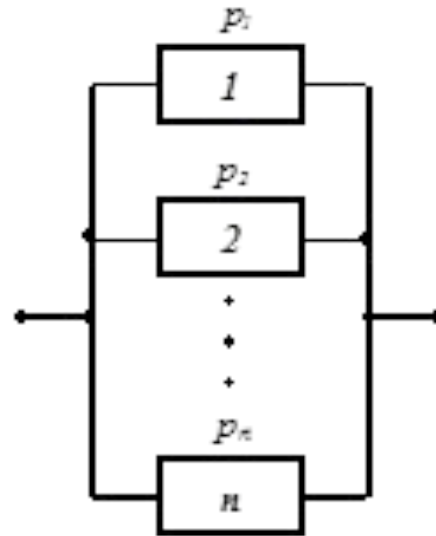


Рис. 1.17.
Параллельное
соединение
элементов в
систему

1.15. Формула полной (средней) вероятности

- Иногда событие A может произойти как случайное следствие одного из несовместных событий H_1, H_2, \dots, H_n , которые входят в полную группу и называются *гипотезами*.
- Полная (средняя) вероятность $P(A)$ события A , которое может произойти вместе с одной из гипотез H_1, H_2, \dots, H_n , равна сумме произведений вероятностей гипотез $P(H_i)$ на условные вероятности $P(A/H_i)$ события A при каждой из гипотез:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad \bullet \quad (1.15.1)$$

- Докажем это утверждение. Событие A осуществляется тогда и только тогда, когда осуществляются события ИЛИ AH_1 , ИЛИ AH_2, \dots , ИЛИ AH_n , которые, как и события H_1, H_2, \dots, H_n несовместны. Поэтому

$$A = AH_1 + AH_2 + \dots + AH_n = \sum_{i=1}^n AH_i.$$

- По теореме сложения несовместных событий имеем

$$P(A) = P(AH_1) + P(AH_2) + \dots + P(AH_n) = \sum_{i=1}^n P(AH_i).$$

- Применив теорему умножения к слагаемым, получим

$$P(AH_i) = P(H_i)P(A/H_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

- Следовательно

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(AH_i) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i).$$

- Формула полной вероятности (1) применяется тогда, когда рассматриваемое событие может появиться по нескольким каналам.

1.16. Формула Байеса (теорема гипотез)

- Пусть событие A может произойти только при появлении одного из несовместных событий (гипотез) H_1, H_2, \dots, H_n . Предполагается, что известны априорные вероятности гипотез $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n)$ и условные вероятности $P(A/H_i), i = 1, 2, \dots, n$, события A при каждой из гипотез. Допустим, что произведено испытание, в результате которого появилось событие A . Необходимо определить, с какой из гипотез следует связывать появление события A , т.е. определить, следствием какой гипотезы явилось это событие. Иначе говоря, требуется определить обратные вероятности гипотез $P(H_1/A), P(H_2/A), \dots, P(H_n/A)$ при условии, что событие A произошло. Если событие A произошло, то это, очевидно, должно вызвать переоценку вероятностей гипотез $H_i, i = 1, 2, \dots, n$. Количественную оценку изменения вероятностей гипотез дает формула Байеса.
- Вероятность гипотезы $P(H_i/A)$ равна отношению вероятности $P(H_i A)$ совместного появления событий H_i и A к полной вероятности $P(A)$ события A :

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i A)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P(A / H_i)}{\sum_{i=1}^n P(H_i)P(A / H_i)}. \quad (1.16.1)$$

- Правая часть выражения (1) состоит из ^{двух} сомножителей: априорной вероятности $P(H_i)$, характеризующей неопределенность гипотезы H_i до опыта и коэффициента
- $$\frac{P(A / H_i)}{\sum_{i=1}^n P(H_i)P(A / H_i)},$$
- уточняющего априорную вероятность на основе эксперимента. Апостериорная вероятность $P(H_i/A)$ гипотезы H_i характеризует пересмотренное значение априорной вероятности $P(H_i)$ после получения дополнительной информации о появлении события A . Вероятность $P(A/H_i)$ события A (наблюдения, сообщения и т.п.) в предположении, что верна гипотеза H_i иногда называют *правдоподобием гипотезы H_i* .

1.17. Теорема о повторении опытов (формула Я. Бернулли)

- Если производится n независимых опытов, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна и равна p , а вероятность противоположного события есть $q = 1 - p$, то вероятность $P_n(k)$ того, что при этих опытах событие A появится ровно k раз, где $k = 0, 1, 2, \dots, n$, равна

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}. \quad \bullet \quad (1.17.1)$$

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}.$$

- С помощью формулы Бернулли можно решать также следующие задачи.
- 1. Вычислить вероятность того, что при n независимых опытах событие A появится не менее m раз, т.е. $k = m, m+1, \dots, n$:

$$P_n(k \geq m) = \sum_{k=m}^n C_n^k p^k q^{n-k}. \quad \bullet \quad (1.17.2)$$

- 2. Определить вероятность того, что при n опытах событие A появится не более m раз, т.е. когда $k = 0, 1, \dots, m$:

$$P_n(k \leq m) = \sum_{k=0}^m C_n^k p^k q^{n-k}. \quad \bullet \quad (1.17.3)$$

- 3. Найти вероятность того, что при n опытах событие A появится от m_1 до m_2 раз, т.е. когда $k = m_1, \dots, m_2$:

$$P_n(m_1 \leq k \leq m_2) = \sum_{k=m_1}^{m_2} C_n^k p^k q^{n-k}. \quad \bullet \quad (1.17.4)$$

- 4. Определить вероятность того, что при n опытах событие A появится хотя бы один раз, т.е. когда $k = 1, 2, \dots, n$:

$$P_n(k \geq 1) = \sum_{k=1}^n C_n^k p^k q^{n-k}. \quad \bullet \quad (1.17.5)$$