§19. Логарифмический вычет.

Пусть $f(z) \in C^{\infty}\left(\overline{g} \setminus z_1, \ldots, z_M\right)$

z_p *- полюса,* $\left. f(\xi) \right|_{\xi \in \partial g} \neq 0$

Тогда $\forall \ \xi \in \partial g$ *– правильная* **и**

$\exists \ \left. f(\xi) \right|_{\xi \in \partial g}$

<u>Определение</u>. Функция $\varphi(z)=\dfrac{f'(z)}{f(z)}$

называется *логарифмической производной* функции *f*(*z*).

Выч$[\phi(z), z_k]$ **называются *логарифмическими вычетами***

z_k **:** z_n ***-нули*** $f(z)$ **и** $z_з$ ***-полюса*** $f(z)$ **.**

Выч$[\phi(z), z_k] = ?$

1) z_n – *нуль* **порядка** n

$$f(z)=(z-z_n)^n f_1(z), \quad f_1(z_n)\neq 0.$$

$$\varphi(z)=\frac{n}{(z-z_n)}+\frac{f_1'(z)}{f_1(z)}$$

$$\text{Выч}[\varphi(z), z_n]=n$$

2) z_p – *полюс* **порядка** p

$$f(z)=\frac{f_2(z)}{(z-z_p)^p},\quad f_2(z_p)\neq 0.$$

$$\varphi(z)=\frac{-p}{(z-z_p)}+\frac{f_2'(z)}{f_2(z)}$$

$$\text{Выч}\left[\varphi(z), z_p\right]=-p$$

<u>Теорема 19.1</u> Если $f(z) \in C^{\infty}(\overline{g} \setminus z_1, \ldots, z_M)$

z_p *- полюса,* $f(\xi)\big|_{\xi \in \partial g} \neq 0$ **, то**

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial g^+} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi = N - P,$$

где N*- полное число нулей* $f(z)$ *с учетом кратности,* P*- полное число полюсов* $f(z)$ *с учетом кратности.*

Доказательство. По основной теореме теории вычетов

$$\int\limits_{\partial g^{+}} \varphi(\xi)d\xi = 2\pi i \sum_{k=1}^{M} Выч\left[\varphi(z), z_k\right] =$$

$$= 2\pi i \left[\sum_{k=1}^{N} n_k - \sum_{k=1}^{P} n_p\right] = 2\pi i \left(N - P\right) \qquad \blacksquare$$

В частности, если $f(z) \in C^{\infty}(\overline{g})$

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial g^{+}} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi$$

Принцип аргумента.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial g^+}\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial g^+}d\ln f(\xi)d\xi=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial g^+}d\ln\left|f(\xi)\right|+\frac{1}{2\pi}\int_{\partial g^+}d\arg f(\xi)=$$

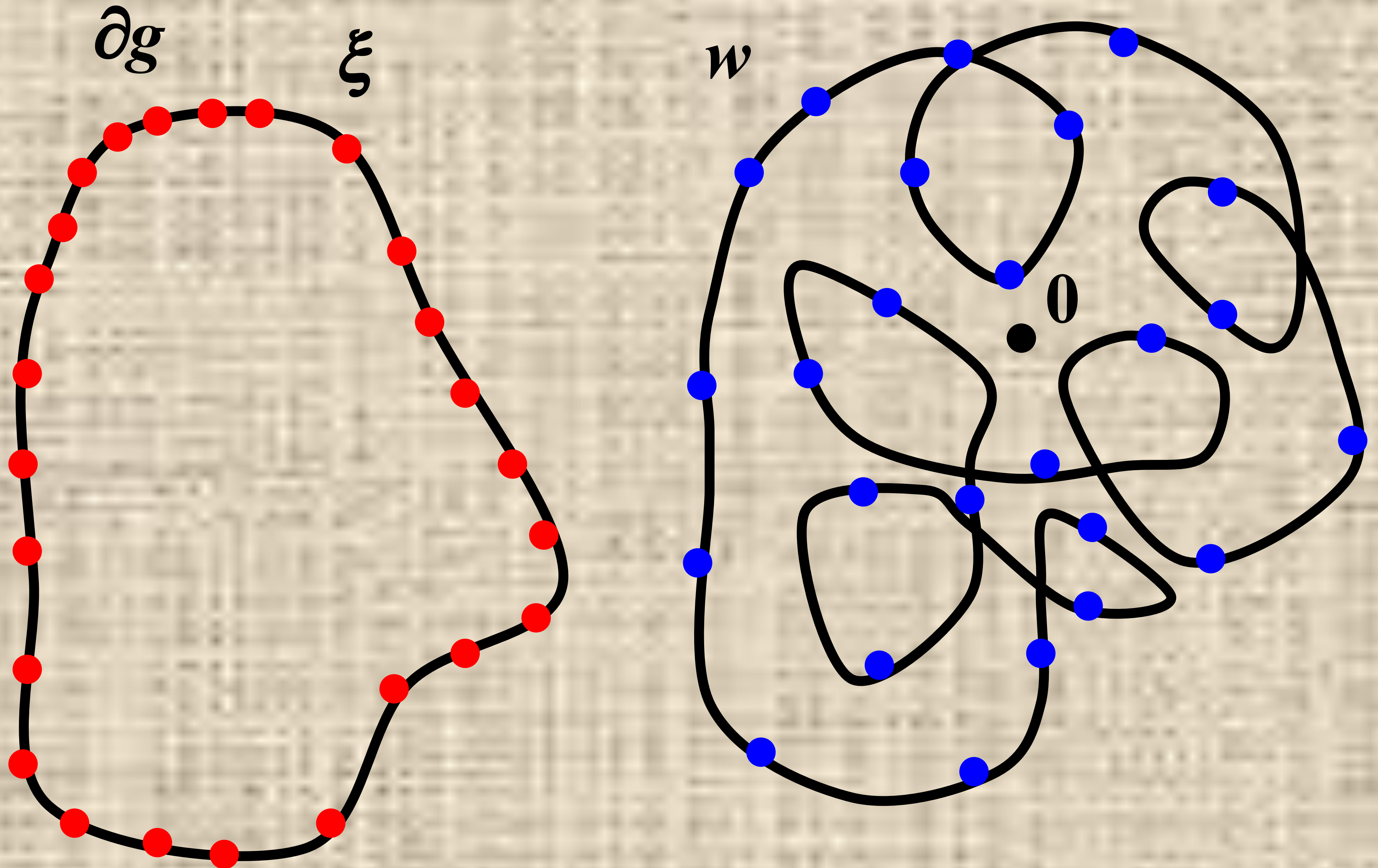
$$=\frac{1}{2\pi i}Var\left[\ln\left|f(\xi)\right|\right]_{\partial g^+}+\frac{1}{2\pi}Var\left[\arg f(\xi)\right]_{\partial g^+}$$

$\ln|f(\xi)|$ *действительная, однозначная*

$$\Rightarrow \quad Var\left[\ln|f(\xi)|\right]_{\partial g^+} = 0.$$

$$N - P = \frac{1}{2\pi} Var\left[\arg f(\xi)\right]_{\partial g^+}$$

Геометрическая интерпретация



<u>Принцип аргумента.</u> Разность между полным числом нулей и полюсов функции $f(z)$ в области g определяется *числом оборотов*, которое совершает точка $w=f(z)$ вокруг точки $w=0$, при *положительном* обходе точкой z контура ∂g.

Теорема Руше

Если $f(z), \varphi(z) \in C^{\infty}\left(\overline{g}\right)$

$\left|f(z)\right|_{\partial g} > \left|\varphi(z)\right|_{\partial g}$ **, то** $N\left[f+\varphi\right]_g = N\left[f\right]_g$

Доказательство. $f(z) \in C^{\infty}(\overline{g})$

$\Rightarrow f(z)\big|_{\partial g}$ не имеет особых точек.

$$\left|f(z)\right|_{\partial g} > \left|\varphi(z)\right|_{\partial g} \Rightarrow \left|f(z)\right|_{\partial g} \neq 0.$$

$$F(z) \equiv f(z) + \varphi(z) \in C^{\infty}(\overline{g})$$

$\Rightarrow F(z)\big|_{\partial g}$ не имеет особых точек.

$$\left|F(z)\right|_{\partial g} = \left|f(z)+\varphi(z)\right|_{\partial g} \geq \left|f(z)\right|_{\partial g} - \left|\varphi(z)\right|_{\partial g} > 0$$

$$\Rightarrow f(z),\quad F(z) = f(z)+\varphi(z) \in T.19.1$$

$$\Rightarrow N[f+\varphi]_g = \frac{1}{2\pi} Var[\arg(f+\varphi)]_{\partial g}$$

$$N[f]_g = \frac{1}{2\pi} Var[\arg(f)]_{\partial g}$$

$$N[f+\varphi]_g - N[f]_g =$$

$$= \frac{1}{2\pi} Var[\arg(f+\varphi) - \arg(f)]_{\partial g} = \ (*)$$

$$z_1 = |z_1| e^{i\arg(z_1)}, \quad z_2 = |z_2| e^{i\arg(z_2)}$$

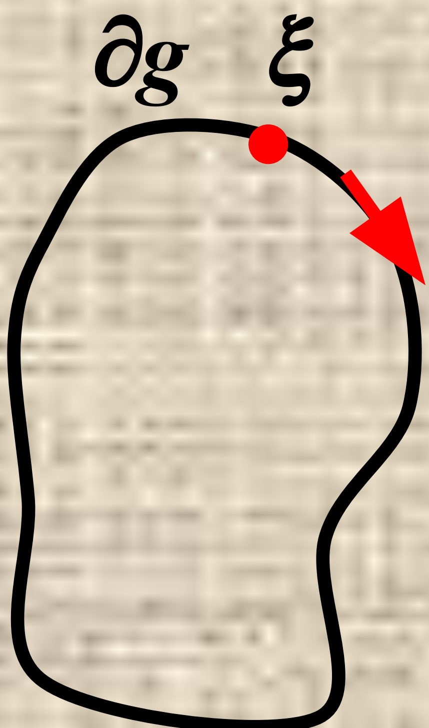
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i\left(\arg(z_1) - \arg(z_2)\right)} \Rightarrow$$

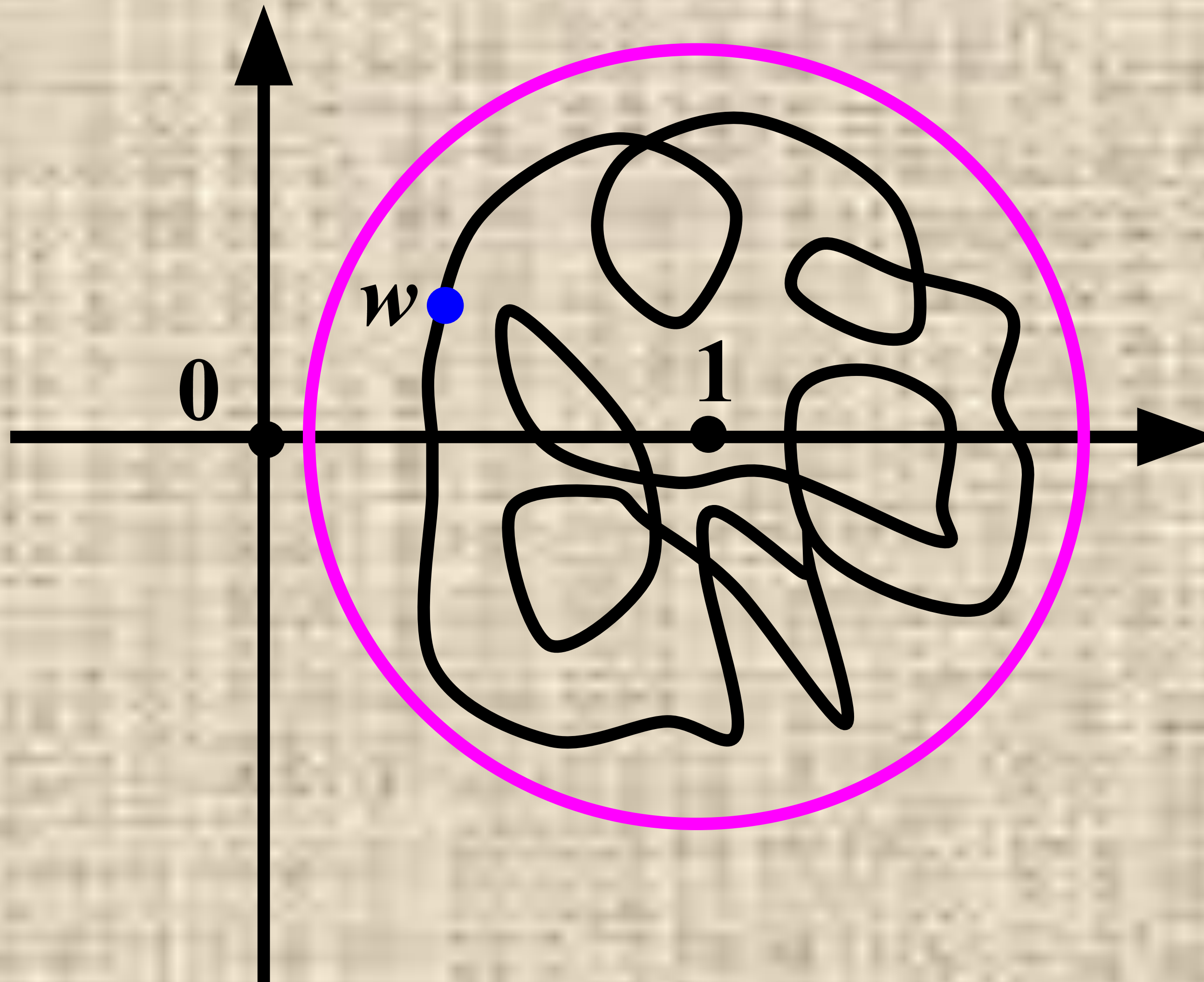
$$\arg(z_1) - \arg\left(z_2\right) = \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$$

$$(*) = \frac{1}{2\pi} Var\left[\arg\left(\frac{f+\varphi}{f}\right)\right]\Big|_{\partial g} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} Var\left[\arg\left(1+\frac{\varphi}{f}\right)\right]\Big|_{\partial g}$$

$$w = 1 + \frac{\varphi}{f} \qquad w - 1 = \frac{\varphi}{f} \Rightarrow \qquad |w-1| = \frac{|\varphi|}{|f|} \le \rho < 1$$





$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi} Var\left[\arg\left(1+\frac{\varphi}{f}\right)\right]\Bigg|_{\partial g} = 0 \qquad \blacksquare$$

Основная теорема высшей алгебры.

Полином *n*-ой степени имеет *на комплексной плоскости* ровно *n* нулей (*с учетом их кратности*).

Доказательство.

$$F(z)=a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\dots+a_1 z+a_0=$$

$$=f(z)+\varphi(z)$$

$$f(z)=a_n z^n \qquad \varphi(z)=a_{n-1}z^{n-1}+\dots+a_1 z+a_0$$

$$\frac{\varphi(z)}{f(z)}=\frac{a_{n-1}}{a_n}z^{n-1}+\dots+\frac{a_1}{a_n}z+\frac{a_0}{a_n}$$

$$\forall a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \quad \exists R_0 : \forall |z| = R > R_0$$

$$0 < \left| \frac{f(z)}{\varphi(z)} \right|_{|z|=R} < 1 \Rightarrow т.Руше$$

$$N[F]_{|z|=R} = N[f]_{|z|=R}$$

$$f(z) = a_n z^n \quad z = 0 - корень \quad кр. \quad n$$

$$\Rightarrow N[F]_{|z|=R} = N[f]_{|z|=R} = n \qquad \blacksquare$$