

4. Линейность изображений.

а) Многочлен.

$$f(t) = \sum_{n=0}^N a_n t^n \stackrel{\bullet}{=} \sum_{n=0}^N a_n \frac{n!}{p^{n+1}} \cdot$$

$$b) \quad f(t) = \sin \omega t = \frac{1}{2i} \left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t} \right)$$

$$= \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{p - i\omega} - \frac{1}{p + i\omega} \right)$$

$$= \frac{1}{2i} \left(\frac{p + i\omega - p + i\omega}{p^2 + \omega^2} \right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

5. Теорема запаздывания.

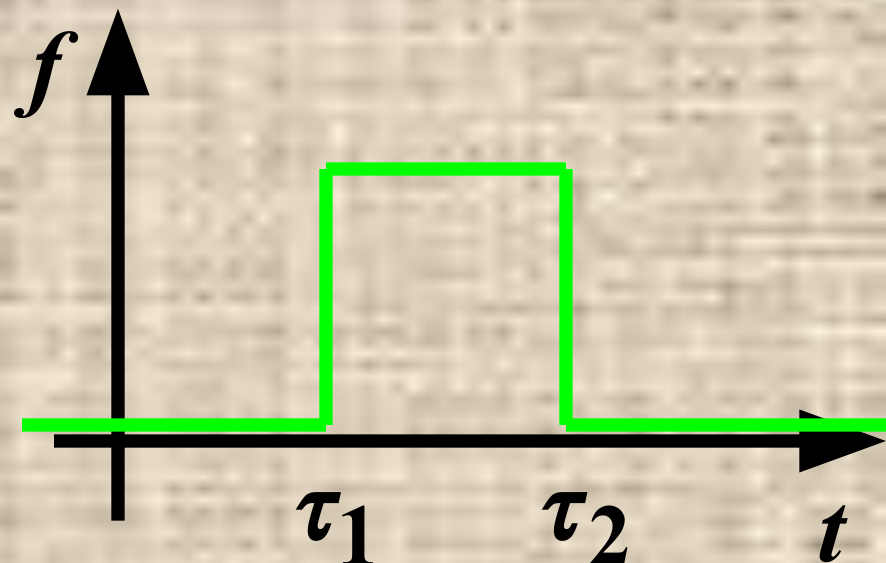
$$f(t) \in A(a) \quad \bullet \quad \dot{f(t)} = F(p) \quad \bullet$$

$$f_{\tau}(t) = \begin{cases} 0, & t < \tau \\ f(t - \tau), & t > \tau \end{cases} \quad f_{\tau}(t) \in A(a)$$

$$\begin{aligned}
 f_{\tau}(t) &= \int_{\tau}^{\infty} e^{-pt} f(t-\tau) dt = \{t-\tau=T\}= \\
 &= \int_{\tau}^{\infty} e^{-pT-\tau p} f(T) dT = e^{-\tau p} \int_{\tau}^{\infty} e^{-pT} f(T) dT = \\
 &= e^{-\tau p} F(p)
 \end{aligned}$$

Изображение прямоугольного импульса.

$$f_{\tau}(t) = \begin{cases} 0, & t < \tau_1 \\ 1, & \tau_1 < t < \tau_2 \\ 0, & t > \tau_2 \end{cases}$$



$$F(p) = \frac{1}{p} \left(e^{-p\tau_1} - e^{-p\tau_2} \right)$$

6. Изображение производной

$$f(t) \in C[0, \infty] \quad f(t) \in A(a) \quad \dot{f(t)} \stackrel{\bullet}{=} \dot{F(p)}$$

$$f'(t): \quad |f'(t)| < \infty, \quad f'(t) - \text{кусочно-непрерывная}$$

$$f'(t) \in A(a) \quad \dot{f(t)} \stackrel{\bullet}{=} ?$$

$$f(t) \stackrel{\bullet}{=} \int_0^{\bullet \infty} e^{-pt} f'(t) dt = \textit{(по частям)} =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-pt} df(t) = e^{-pt} f(t) \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt =$$

$$= -f(0) + pF(p) = p[F(p) - f(0)]$$

$$f^{(n-1)}(t) \in C[0, \infty]$$

$$f(t) \in A(a)$$

$$\dot{f(t)} = \dot{F(p)}$$

$$f^{(n)}(t): \quad |f^{(n)}(t)| < \infty, \quad f^{(n)}(t) - \text{кусочно-непрерывная}$$

$$f^{(k)}(t) \in A(a), \quad \forall k = 1, 2, \dots, n$$

$$\dot{f^{(k)}(t)} = \dot{?}$$

$$f^{(n)}(t) = p^n \left[F(p) - \frac{f(0)}{p} - \frac{f'(0)}{p^2} - \frac{f^{(n-1)}(0)}{p^n} \right]$$

7. Изображение интеграла.

$$f(t) \in A(a)$$

$$\dot{f(t)} \stackrel{\bullet}{=} F(p)$$

$$\varphi_1(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau \in A(a)$$

$$\dot{\varphi_1(t)} \stackrel{\bullet}{=} ?$$

$$\varphi_1(t) = \int_0^\infty e^{-pt} \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right] dt = \quad (\operatorname{Re} p > a) =$$

$$= \int_0^\infty \left[\int_\tau^\infty e^{-pt} dt \right] f(\tau) d\tau = \frac{1}{p} \int_0^\infty e^{-p\tau} f(\tau) d\tau =$$

$$= \frac{1}{p} F(p)$$

$$\varphi_n(t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^{\tau_1}\cdots\int\limits_0^{\tau_{n-1}}f(\tau_n)d\tau_n\cdots d\tau_1\in A(a)$$

$$\varphi_n(t)=\frac{1}{p^n}F(p)$$

8. Изображение свертки.

$$f_1(t) \in A(a_1)$$

$$f_1(t) \stackrel{\bullet}{=} F_1(p)$$

$$f_2(t) \in A(a_2)$$

$$f_2(t) \stackrel{\bullet}{=} F_2(p)$$

$$\varphi(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau =$$

$$= \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau \in A(a)$$

$$a = \max(a_1, a_2)$$

$$\varphi(t) \stackrel{\bullet}{=} ?$$

$$\begin{aligned}
 \varphi(t) &= \int_0^\infty e^{-pt} \left[\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \right] dt = \\
 &= (\operatorname{Re} p > a) = \int_0^\infty f_1(\tau) \left[\int_\tau^\infty e^{-pt} f_2(t-\tau) dt \right] d\tau = \\
 &= \{t-\tau=T\} = \\
 &= \int_0^\infty f_1(\tau) e^{-p\tau} \left[\int_0^\infty e^{-pT} f_2(T) dT \right] d\tau = \\
 &= F_1(p) F_2(p)
 \end{aligned}$$

п.3. Решение задачи Коши для

линейного обыкновенного

дифференциального уравнения с

постоянными коэффициентами

операционным методом.

$$\sum_{k=0}^n a_k y^{(k)}(t) = f(t), \quad t > 0$$

$$y^{(j)}(0) = 0, \quad j = 0, \dots, n-1$$

$$y(t) = ?$$

Пусть $\dot{f}(t) \equiv \dot{F}(p)$ $\dot{y}(t) \equiv \dot{Y}(p)$

$$\Rightarrow \dot{y}^{(k)}(t) \equiv p^k \dot{Y}(p), \quad k = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(\sum_{k=0}^n a_k p^k \right)}_{P_n(p)} \dot{Y}(p) = \dot{F}(p)$$

$$P_n(p)Y(p)=F(p)$$

$$Y(p)=\frac{F(p)}{P_n(p)}$$

$$y(t)=?$$

$$\sum_{k=0}^n a_k g^{(k)}(t) = 0, \quad t > 0$$

$$g^{(j)}(0) = 0, \quad j = 0, \dots, n-2;$$

$$g^{(n-1)}(0) = 1$$

$$\Rightarrow g(t)$$

$$g(t) = G(p)$$

$$\Rightarrow g^{(k)}(t) = p^k G(p), \quad k = 1, \dots, n-1$$

$$g^{(n)}(t) = p^n \left[G(p) - \frac{g^{(n)}(0)}{p^n} \right] = p^n G(p) - 1$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k \right) G(p) + a_n (p^n G(p) - 1) = 0$$

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k + a_n p^n \right) G(p) = a_n$$

$$P_n(p)$$

$$P_n(p)G(p) = a_n \Rightarrow P_n(p) = \frac{a_n}{G(p)}$$

$$Y(p) = \frac{F(p)}{P_n(p)} = \frac{F(p) \cdot G(p)}{a_n}$$

$$y(t) \stackrel{\bullet}{=} \frac{1}{a_n} F(p) \cdot G(p) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{a_n} \int_0^t g(t-\tau) f(\tau) d\tau$$

Интеграл Дюгамеля.

п.4. Теорема Меллина.

Пусть $F(p) \in C^\infty(\operatorname{Re} p > a)$, $p = x + iy$ и

$$1. \quad |F(p)| \Rightarrow 0, \quad \operatorname{Re} p > a, \\ |p| \rightarrow \infty$$

(равномерно относительно аргумента)

$$2. \quad \forall x > a: \quad \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} |F(p)| dy < M$$

(равномерно ограничен по x)

Тогда $\exists f(t) \in A(a): \quad \overset{\bullet}{f(t)} \overset{\bullet}{=} F(p)$

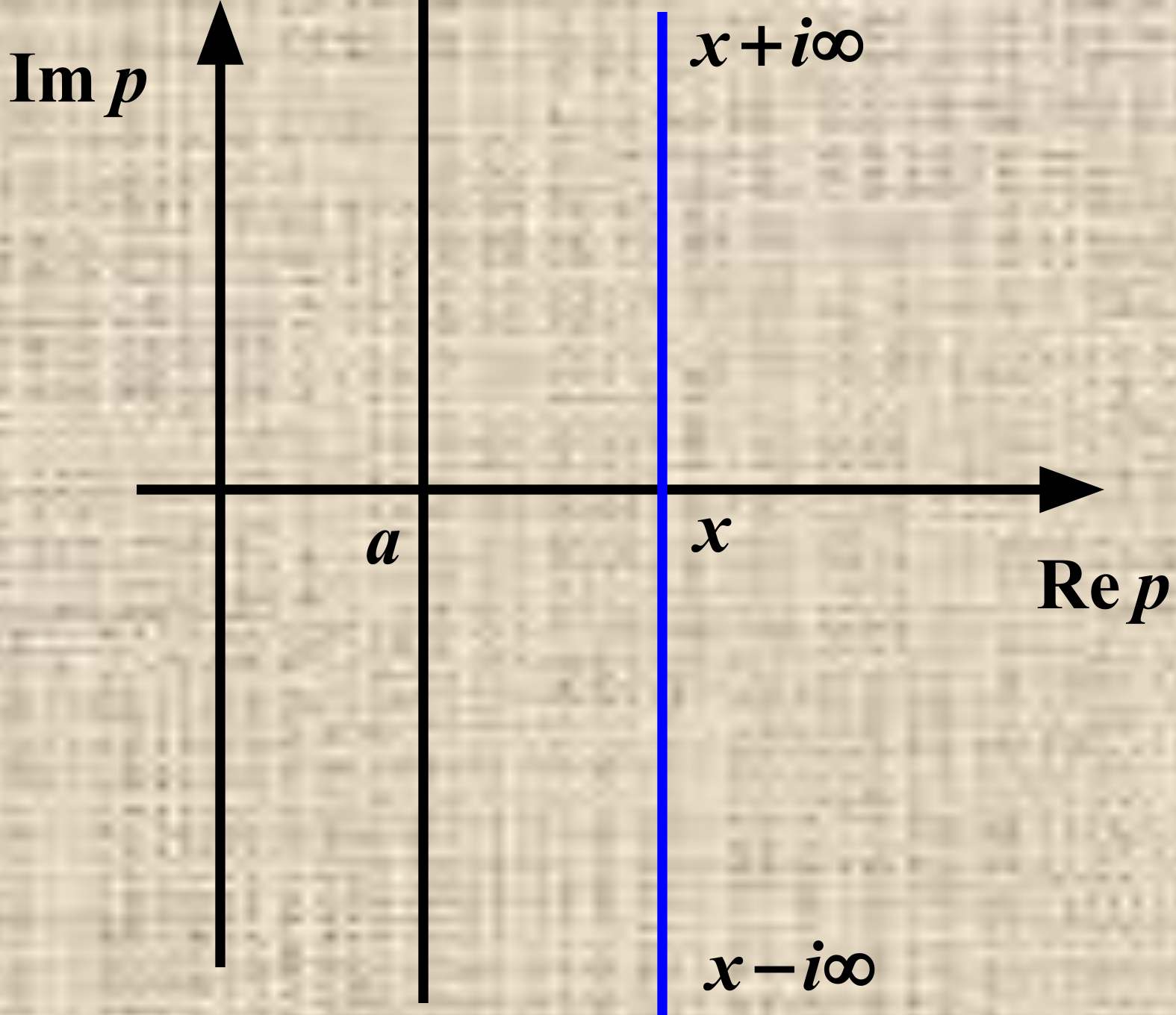
$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p) dp, \quad \forall x > a.$$

Замечание. Несобственный интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p) dp \quad \text{вычисляется}$$

вдоль прямой $\operatorname{Re} p = x > a$ и понимается
в смысле главного значения:

$$\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p) dp = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{x-iA}^{x+iA} e^{pt} F(p) dp$$



Доказательство. Рассмотрим

$$I(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p) dp, \quad p = x + iy$$

и докажем:

$$1) \quad I(x, t) \exists \quad \forall \quad x > a:$$

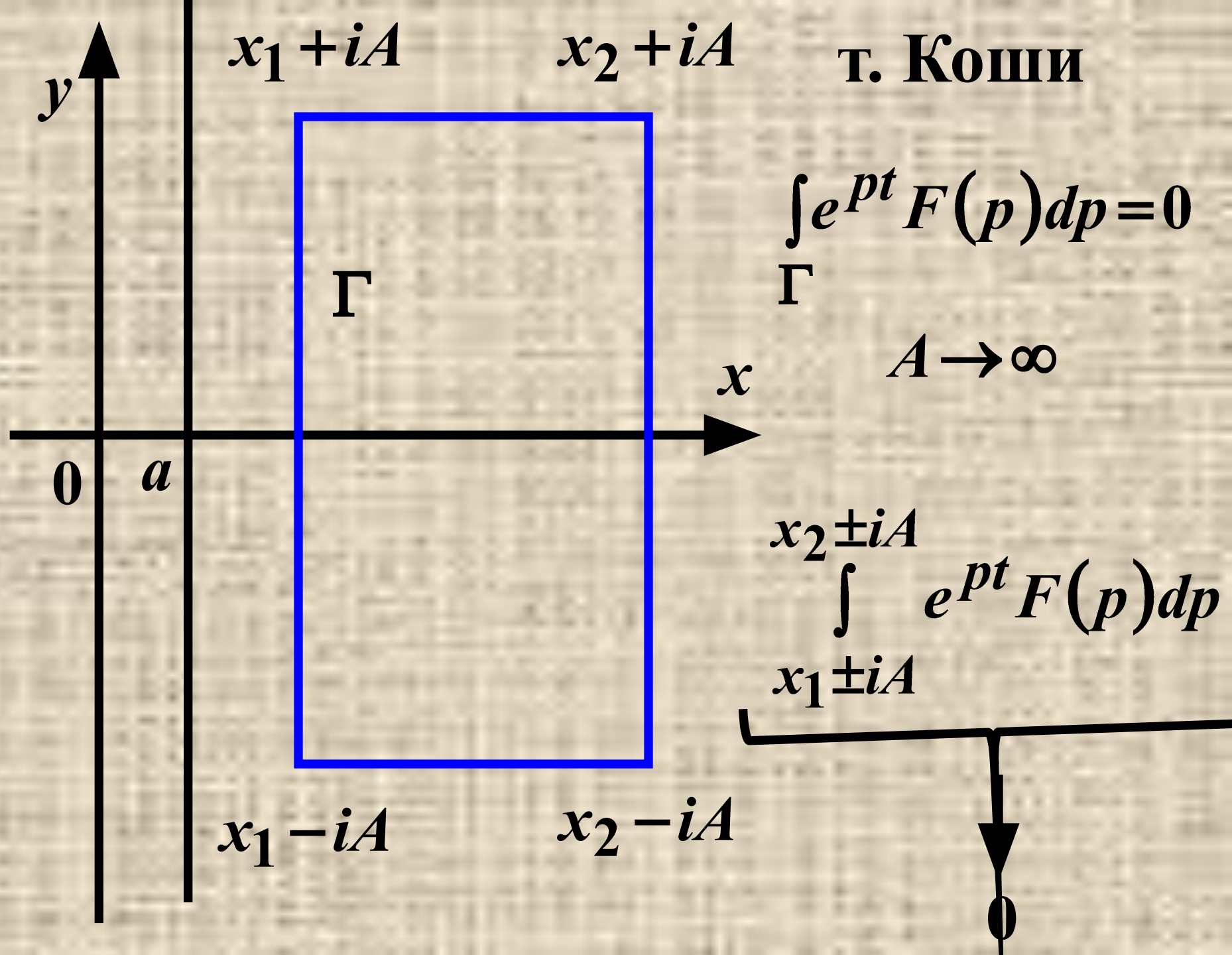
$$|I(x, t)| \leq \frac{1}{2\pi} e^{xt} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} |F(p)| dy \leq M' e^{xt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I(x, t) \exists \quad \forall \quad x > a.$$

Замечание: на $\forall [0, T]$ интеграл
сходится равномерно по t .

2) Покажем, что $I(x, t)$ не зависит от x при $x > a$.

Т.к. $F(p) \in C^\infty(\operatorname{Re} p > a)$



Т.к. $\lim_{|p| \rightarrow \infty} |F(p)| = 0, \operatorname{Re} p > a,$

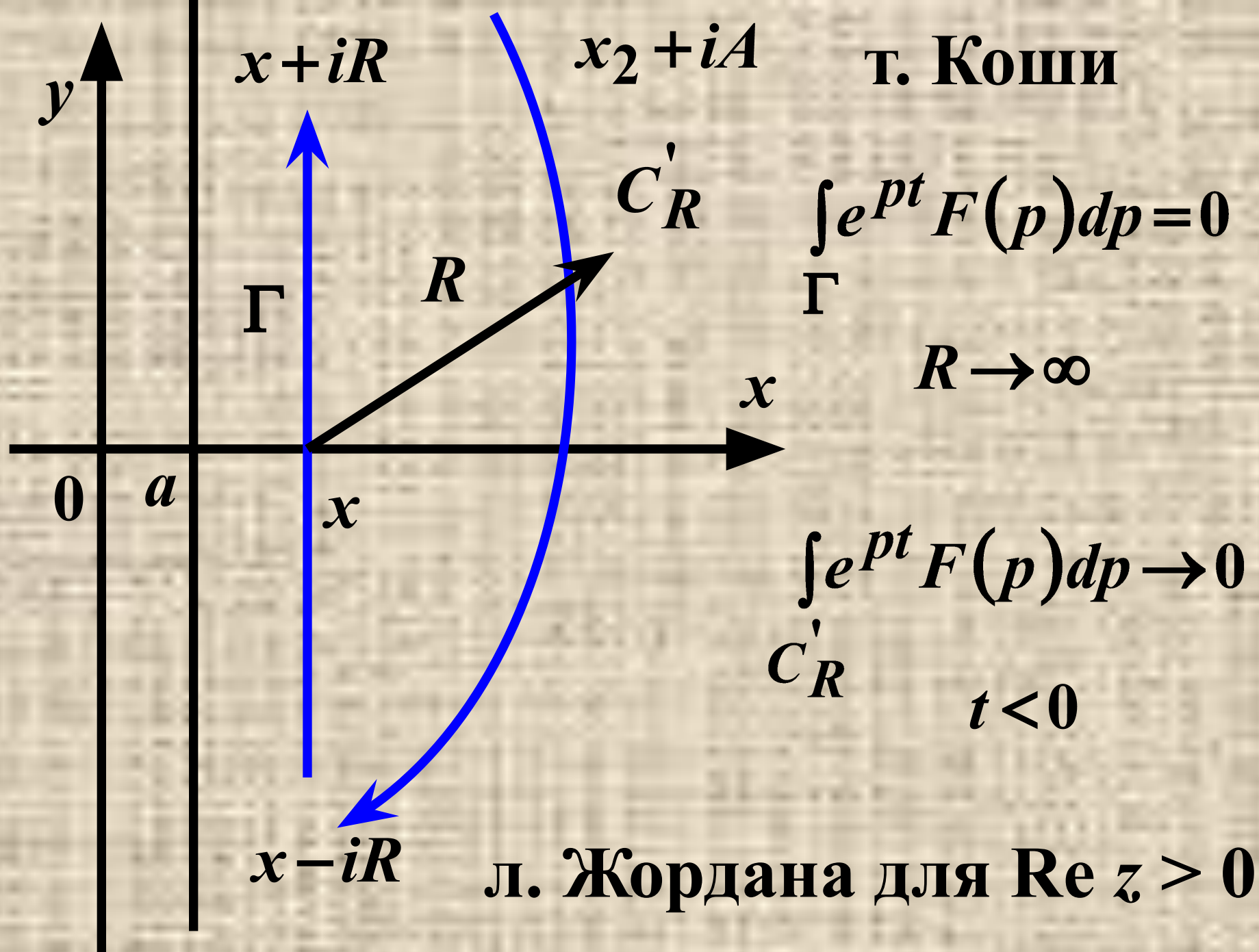
интегралы по *горизонтальным* отрезкам дадут в пределе 0.

Интегралы по *вертикальным прямым* перейдут в *несобственные интегралы*

$$\int_{x_1 - i\infty}^{x_1 + i\infty} e^{pt} F(p) dp = \int_{x_2 - i\infty}^{x_2 + i\infty} e^{pt} F(p) dp;$$

3) Докажем, что $I(x, t) \equiv 0, \quad t < 0$.

Рассмотрим $I(x, t)$ при $t < 0$



$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p) dp \equiv 0, \quad t < 0, \quad \forall x > a.$$

$$\Rightarrow \exists f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p) dp, \quad \forall x > a.$$

$$(\operatorname{Re} p > a)$$

$$|f(t)| < M e^{xt} \quad \inf(x) = a \Rightarrow f(t) \in A(a):$$

Покажем, что $f(t) \stackrel{\bullet}{=} F(p)$

$$f(t) \stackrel{\bullet}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} e^{-pt} \left[\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{qt} F(q) dq \right] dt =$$

$$= \{a < \operatorname{Re} q = x < \operatorname{Re} p\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F(q) \left[\int_0^{\infty} e^{-(p-q)t} dt \right] dq =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{F(q)}{p-q} dq = -\frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{F(q)}{q-p} dq =$$

=(интеграл можно вычислить с помощью вычетов, учитывая, что контур обходится *по часовой стрелке* “-”)=

$$= \text{Выч} \left[\frac{F(q)}{q-p}, q=p \right] = F(p) \quad \blacksquare$$

Замечание. Если $\exists$ аналитическое продолжение $F(p)$ в левую полуплоскость $(\operatorname{Re} p < a)$, имеющее конечное число N изолированных особых точек p_n и удовлетворяющее условиям леммы Жордана, то

$$f(t) = \sum_{n=1}^N \operatorname{Res} \left[e^{pt} F(p), p_n \right] \quad t \geq 0$$

В частности, если $F(p)=1/P_n(p)$, где все нули полинома $P_n(p)$ лежат в *левой полуплоскости* $\operatorname{Re} p < a$, то вычисление $f(t)$ не очень сложно.

Пример.

$$y'' + \omega_0^2 y = f(t), \quad t > 0$$

$$y(0) = y'(0) = 0$$

$$y(t) = ?$$

$$Y(p) = \frac{F(p)}{p^2 + \omega_0^2}$$

$$y(t) = ?$$

$$y(t) = \int_0^t g(t - \tau) f(\tau) d\tau$$

$$G(p) = \frac{1}{p^2 + \omega_0^2}$$

$$g(t) = ?$$

$$\begin{aligned}
g(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{e^{pt}}{p^2 + \omega_0^2} dp = \\
&= \text{Res} \left[\frac{e^{pt}}{p^2 + \omega_0^2}, i\omega_0 \right] + \text{Res} \left[\frac{e^{pt}}{p^2 + \omega_0^2}, -i\omega_0 \right] = \\
&= \frac{e^{i\omega_0 t}}{2i\omega_0} + \frac{e^{-i\omega_0 t}}{2i\omega_0} = \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0} \Rightarrow \\
\Rightarrow y(t) &= \frac{1}{\omega_0} \int_0^t \sin \omega_0 (t - \tau) f(\tau) d\tau
\end{aligned}$$

$$f(t) = \sin \omega_0 t$$

$$y(t) = \frac{1}{2\omega_0^2} (\sin \omega_0 t - t\omega_0 \cos \omega_0 t)$$

**осциллирующая функция с линейно
нарастающей амплитудой- *резонанс*.**

п.5. Изображение произведения.

$$f_1(t) \in A(a_1) \quad f_1(t) \stackrel{\bullet}{=} F_1(p) \in C^\infty(\operatorname{Re} p > a_1)$$

$$f_2(t) \in A(a_2) \quad f_2(t) \stackrel{\bullet}{=} F_2(p) \in C^\infty(\operatorname{Re} p > a_2)$$

$$f(t) = f_1(t)f_2(t) \in A(a_1 + a_2)$$

$$f(t) \stackrel{\bullet}{=} ?$$

$$\begin{aligned}
 f(t) &= F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f_1(\tau) f_2(t) dt = \\
 &= \left\{ f_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{qt} F_1(q) dq, \quad \forall x > a_1 \right\} = \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} e^{-pt} f_2(t) \left[\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{qt} F_1(q) dq \right] dt = \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F_1(q) \int_0^{\infty} e^{-(p-q)t} f_2(t) dt dq =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F_1(q) F_2(p-q) dq$$

$$(a_1 < x = \operatorname{Re} q < \operatorname{Re} p - a_2)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F_1(p-q) F_2(q) dq$$

$$(a_2 < x = \operatorname{Re} q < \operatorname{Re} p - a_1)$$

$$\bullet \quad f(t) \bullet \quad F(p) \in C^\infty(\operatorname{Re} p > a_1 + a_2)$$

Пример.

$$f_1(t) = t \quad \bullet \quad \frac{1}{p^2} \quad f_2(t) = \sin \omega t \quad \bullet \quad \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

$$f(t) = t \sin \omega t \quad \bullet \quad \frac{\omega}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{dq}{(p-q)^2 (q^2 + \omega^2)}$$

$$(0 < x = \operatorname{Re} q < \operatorname{Re} p)$$

= {при помощи вычетов, с учетом того, что контур интегрирования замыкается *вправо* и обходится *по часовой стрелке*- в отрицательном направлении} =

$$= -\omega \text{ Выч} \left[\frac{1}{(p-q)^2 (q^2 + \omega^2)} \right]_{q=p} =$$

{q=p- полюс 2-го порядка }

$$= -\omega \frac{d}{dq} \left[\frac{1}{(q^2 + \omega^2)} \right]_{q=p} = \frac{2\omega p}{(p^2 + \omega^2)}$$

Замечание. Можно считать контур интегрирования замкнутым *налево* и суммировать вычеты в $\pm i\omega$;