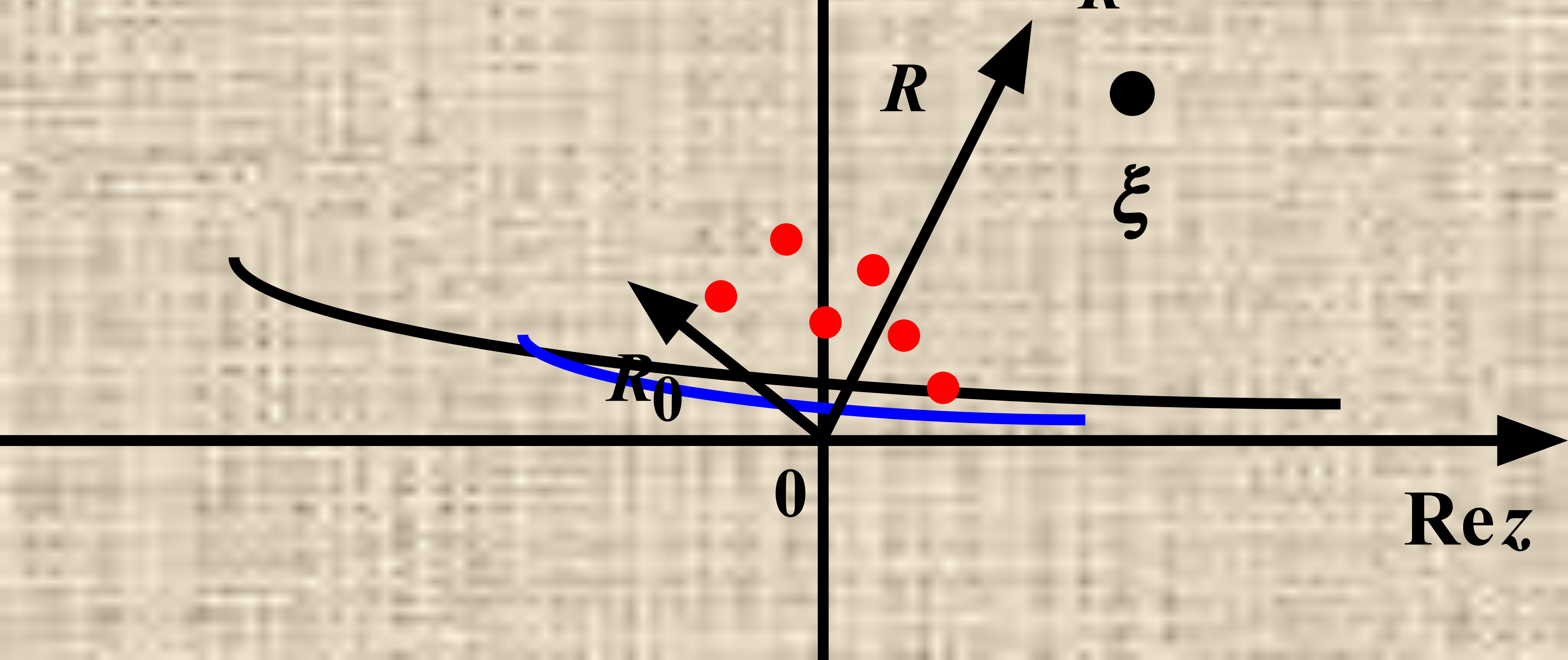
§18. Вычисление несобственных интегралов I-го рода от функции действительной переменной с помощью вычетов.

Лемма 18.1

$$f(z)\in C^{\infty}\left(|z|>R_0\right)$$

$$|f(z)|<\frac{M}{|z|^{1+\delta}},\quad \delta>0$$

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C'_R} f(\xi)\,d\xi=0$$



Лемма 18.1 Пусть

$f(z) \in C^{\infty}(|z| > R_0 \cap \operatorname{Im} z > 0)$,

за исключением ***конечного числа изолированных*** *особых точек* и

$$|f(z)| < \frac{M}{|z|^{1+\delta}}, \quad \delta > 0$$

Тогда $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{C'_R} f(\xi)\,d\xi = 0$

C'_R - полуокружность $|z| = R \cap \operatorname{Im} z > 0$.

<u>Доказательство.</u> При $R > R_0$:

$$\left| \int\limits_{C'_R} f(\xi)\,d\xi \right| \le \int\limits_{C'_R} |f(\xi)|\,ds < \frac{M\pi R}{R^{1+\delta}} = \frac{M\pi}{R^{\delta}} \underset{R\to\infty}{\to} 0$$

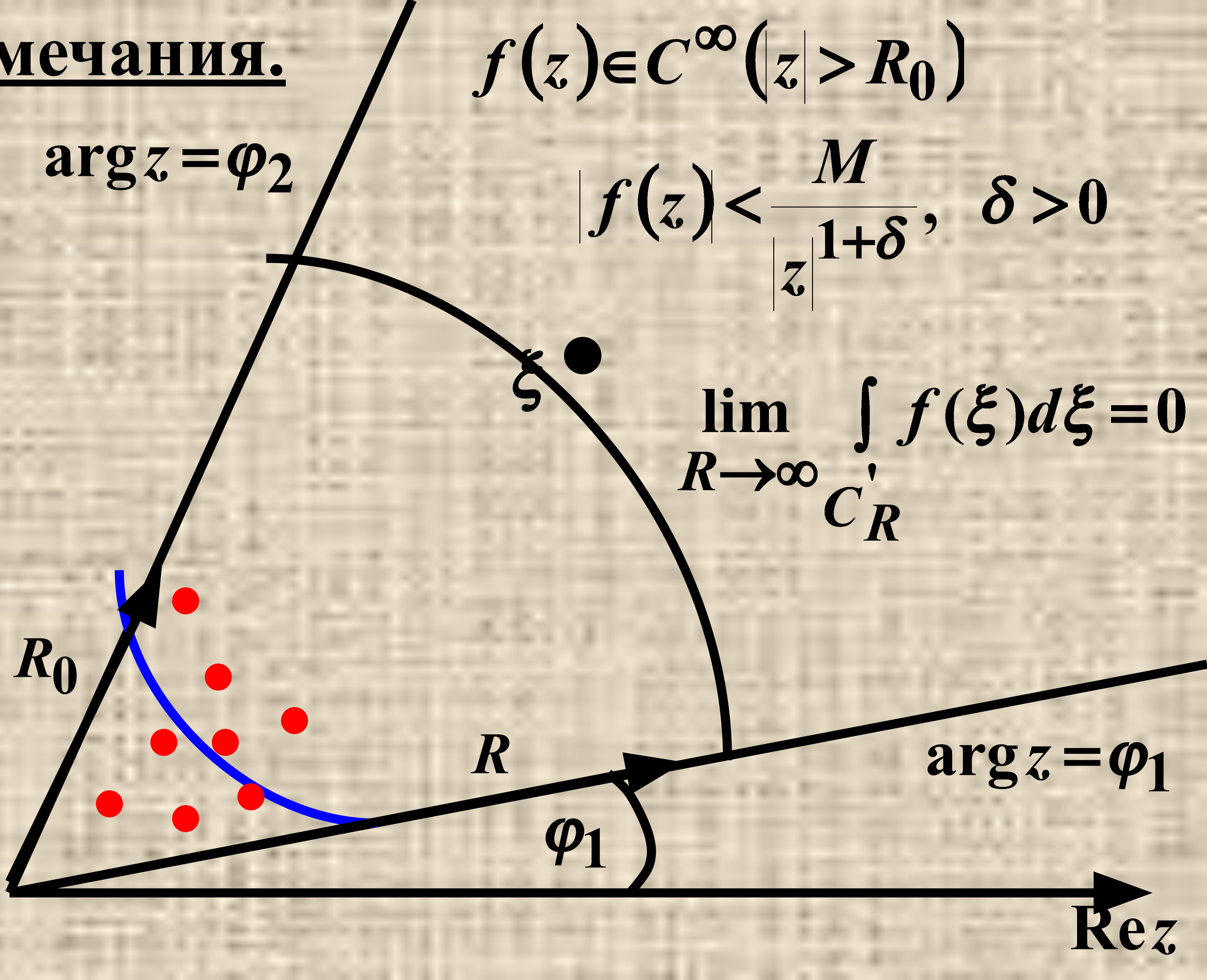
$\blacksquare$

Замечания.

$$f(z) \in C^{\infty}(|z| > R_0)$$

$$|f(z)| < \frac{M}{|z|^{1+\delta}}, \quad \delta > 0$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C'_R} f(\xi)\,d\xi = 0$$



Условия Леммы 18.1 будут выполнены, если

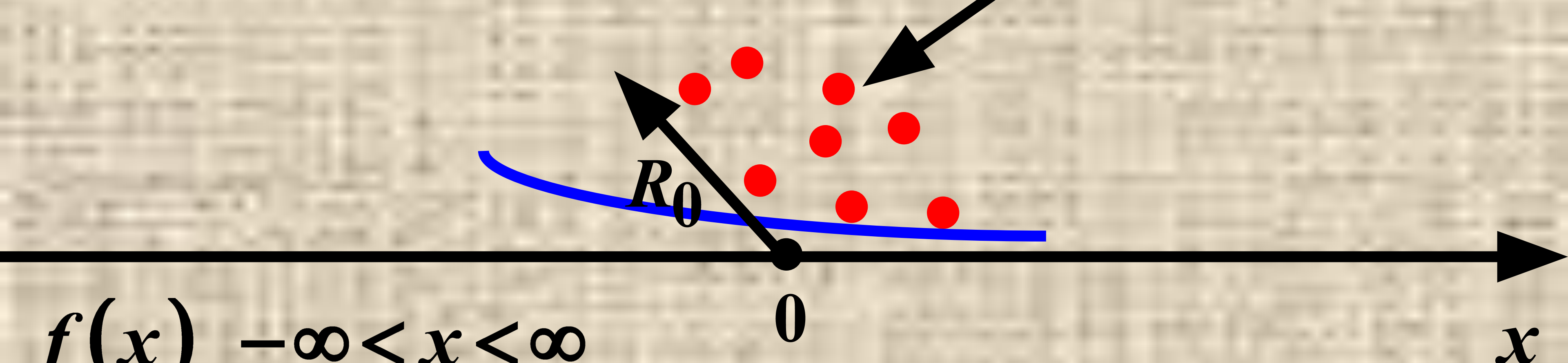
$$f(z) \in C^{\infty}(\Omega_{\infty})$$

z_{∞} ***нуль*** $f(z)$ ***не ниже второго порядка.***

Теорема 18.1.

$\exists\, f(z)\ \operatorname{Im} z \geq 0 \qquad f(z) \in$ Лемма 18.1

$\operatorname{Im} z_n > 0 \quad n = \overline{1, N}$



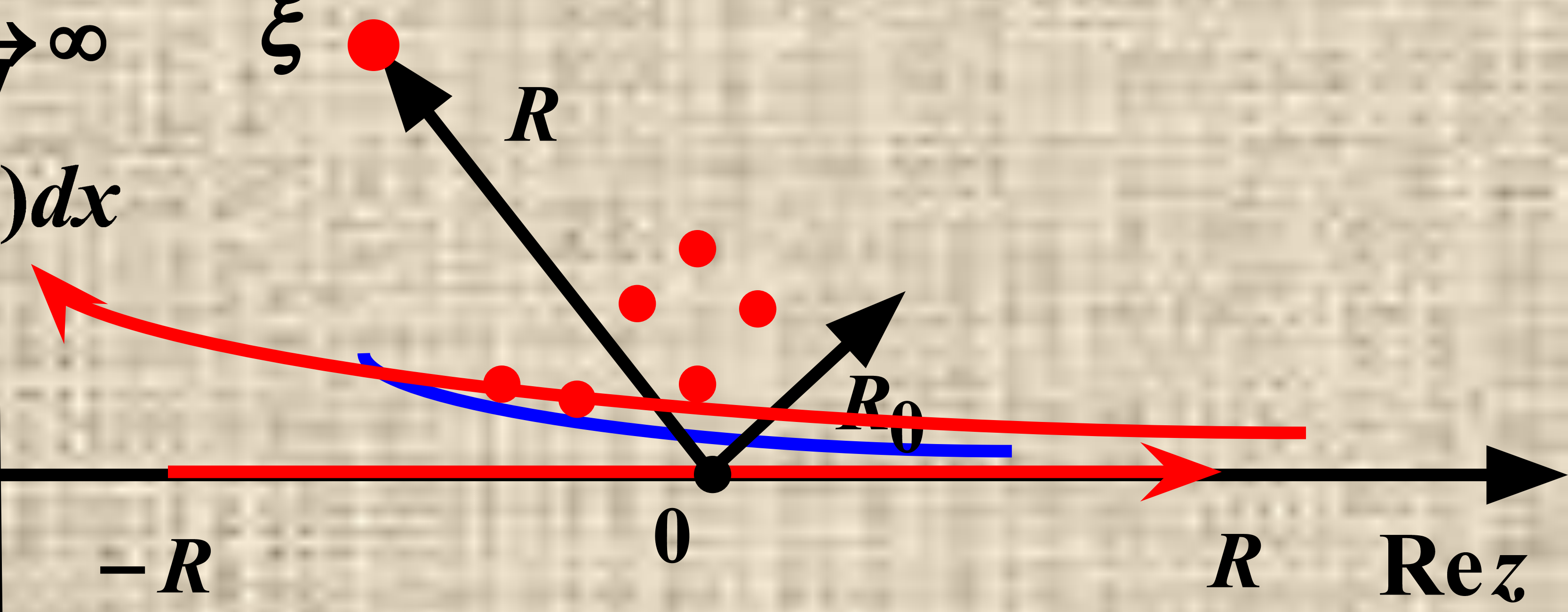
$f(x)\ \ -\infty < x < \infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{n=1}^{N} Выч\left[f(z), z_n\right]$$

<u>Доказательство.</u> (Л.18.1)

$$\underbrace{\int_{-R}^{R} f(x)\,dx}_{\xrightarrow{R\to\infty}\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx} + \overbrace{\int_{C_R'} f(\xi)\,d\xi}^{\xrightarrow{R\to\infty}\ 0} = 2\pi i \sum_{n=1}^{N} Выч\left[f(z), z_n\right]$$

■



Замечания.

1) $f(-x) = f(x)$ + Т. 18.1.=>

$$\int_0^{\infty} f(x)dx = \pi i \sum_{n=1}^{N} Выч\left[f(z), z_n\right]$$

2) $\exists f(z)$ $\mathrm{Im}\, z \leq 0$ $f(z) \in$ Лемма 18.1

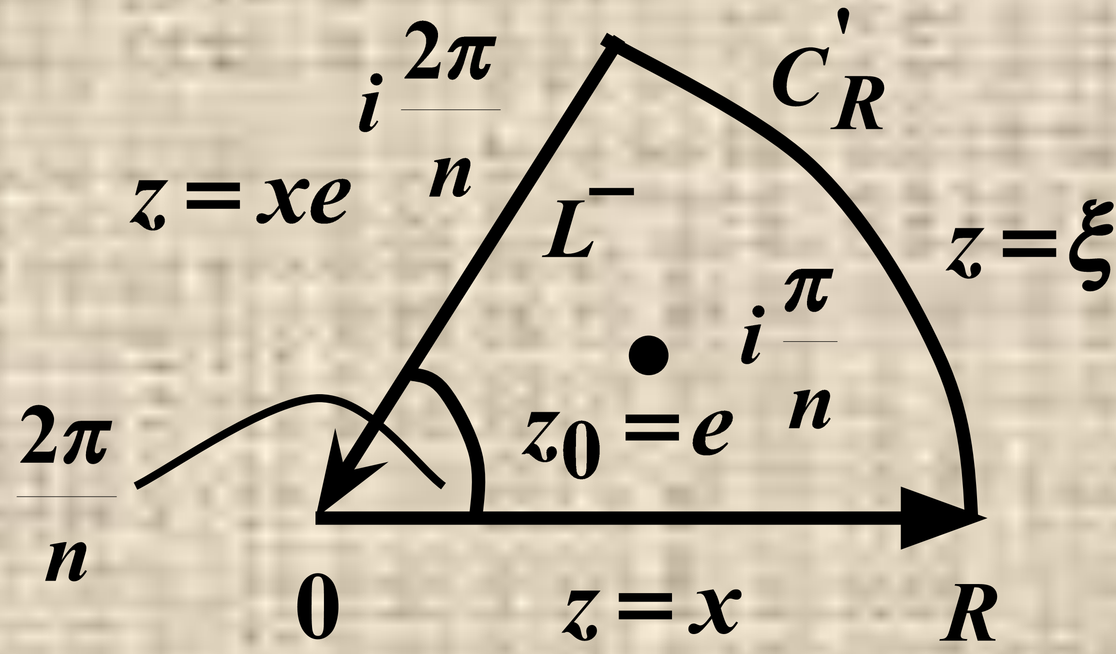
Аналог Т. 18.1

Пример $$I=\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^n}=?$$

$$f(x)=\frac{1}{1+x^n} \qquad f(z)=\frac{1}{1+z^n}$$

$$1+z^n=0\Rightarrow \quad z_k=e^{i\frac{\pi+2\pi k}{n}}, \quad k=\overline{0,n-1}$$

полюса 1-го порядка



$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i\ \text{Выч}\left[\frac{1}{1+z^n}, e^{i\frac{\pi}{n}}\right] = \frac{2\pi i}{ne^{i\frac{\pi(n-1)}{n}}}$$

$$= -\frac{2\pi i}{ne^{-i\frac{\pi}{n}}}$$

$$\oint\limits_{\Gamma} f(z)dz = \underbrace{\int\limits_{0}^{R} f(x)dx}_{R\to\infty}\ \ \overbrace{+\int\limits_{C_R'} f(\xi)d\xi}^{R\to\infty} + \int\limits_{L^{-}} f(z)dz \qquad (Л.18.1)$$

$$\int\limits_{0}^{R} f(x)dx \xrightarrow{R\to\infty} \int\limits_{0}^{\infty} f(x)dx \qquad \int\limits_{C_R'} f(\xi)d\xi \xrightarrow{R\to\infty} 0 \qquad z = xe^{i\frac{2\pi}{n}}$$

$$\int\limits_{L^{-}} f(z)dz = e^{i\frac{2\pi}{n}} \int\limits_{R}^{0} f\left(xe^{i\frac{2\pi}{n}}\right)dx = \overbrace{-e^{i\frac{2\pi}{n}} \int\limits_{0}^{R} f(x)dx}$$

$$\left(1-e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)\int_0^\infty f(x)dx=-\frac{2\pi i}{ne^{-i\frac{\pi}{n}}}$$

$$\int_0^\infty f(x)dx=-\frac{2\pi i}{ne^{-i\frac{\pi}{n}}\left(1-e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)}$$

$$\int_0^\infty f(x)dx=\int_0^\infty \frac{1}{1+x^n}dx=\frac{\frac{\pi}{n}}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

Лемма 18.2

(Жордана)

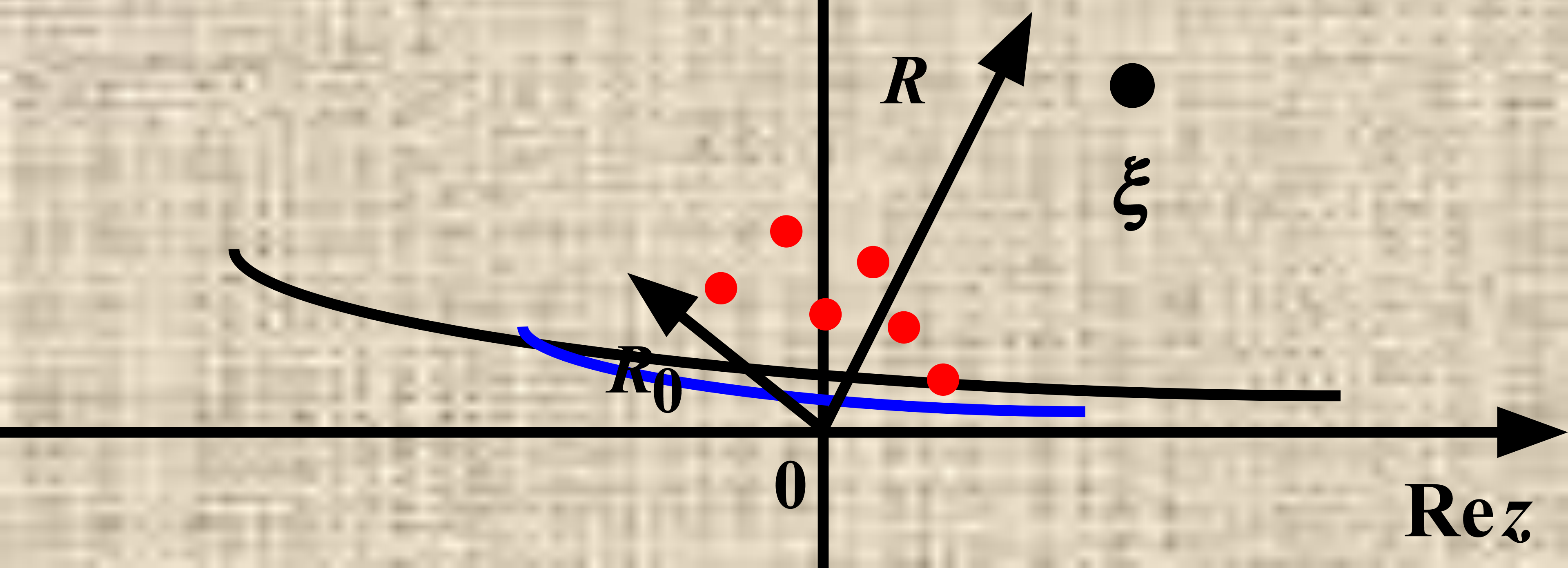
$$f(z)\in C^{\infty}(|z|>R_0)$$

$$f(z)\underset{|z|\to\infty}{\rightrightarrows}0$$

$$0\le\arg z\le\pi$$

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C'_R}e^{ia\xi}f(\xi)\,d\xi=0$$

$$a>0$$



Доказательство. $f(z) \underset{|z|\to\infty}{\Rightarrow} 0 \Rightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists R > 0 : |f(z)| < R \quad |z| > R. \quad R > R_0 \quad :$$

$$\left| \int_{C_R'} e^{ia\xi} f(\xi) d\xi \right| \le \int_{C_R'} \left| e^{ia\xi} f(\xi) \right| ds \le \qquad (*)$$

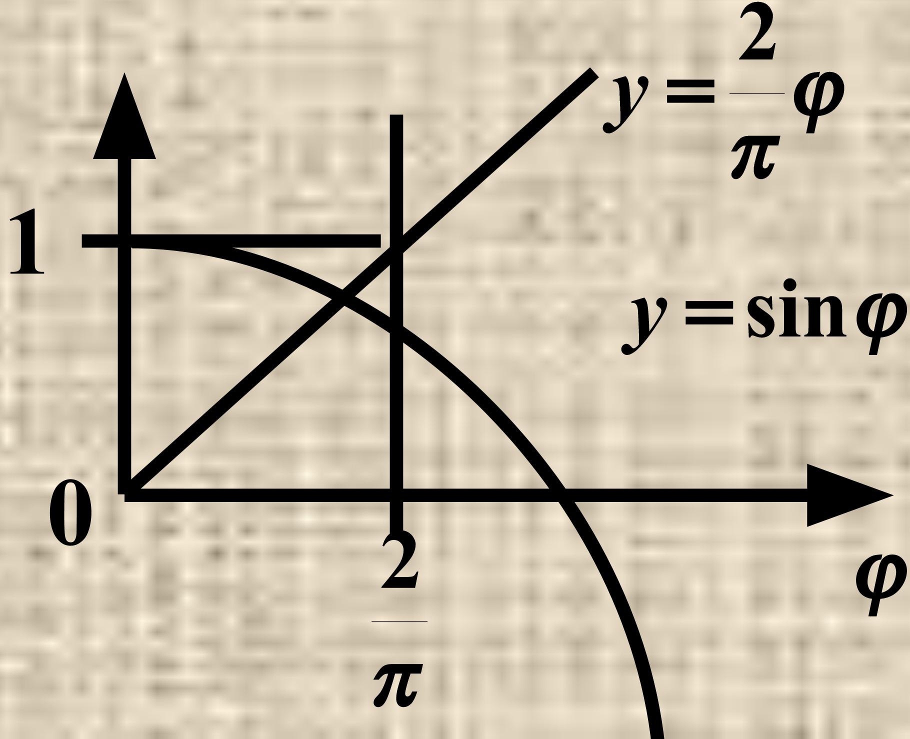
$$\xi = R\, e^{i\varphi} = x + iy, \quad x = R\cos\varphi, \quad y = R\sin\varphi;$$

$$e^{ia\xi} = e^{ia(x+iy)} = e^{iax} e^{-ay}; \quad \left| e^{ia\xi} \right| = e^{-ay} =$$

$$= e^{-aR\sin\varphi};$$

$$(*) \le \varepsilon R \int_0^{\pi} \left| e^{ia\xi} \right| d\varphi = \varepsilon R \int_0^{\pi} e^{-aR\sin\varphi} d\varphi =$$

$$= 2\varepsilon R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\sin\varphi} d\varphi = \left\{ \sin\varphi \ge \frac{2}{\pi}\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \right\} <$$



$$< 2\varepsilon R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\frac{2}{\pi}\varphi}\, d\varphi = \frac{\pi\varepsilon}{a}\left(1 - e^{-aR}\right) \xrightarrow[R\to\infty]{\varepsilon(R)\to 0} 0$$

$$a > 0 \qquad \blacksquare$$

Замечания.

1) $f(z) \in$ Лемма Жордана $\quad \operatorname{Im} z \le 0$

$$\Rightarrow \lim_{R\to\infty} \int\limits_{C_R^{'}} e^{-ia\xi} f(\xi)\,d\xi = 0 \quad a > 0$$

$$C_R^{'} : \ |z| = R \cap \operatorname{Im} z < 0$$

2) $f(z) \in$ Лемма Жордана $\quad \operatorname{Re} z \geq 0$

$$\Rightarrow \lim_{R \to \infty} \int_{C_R'} e^{-a\xi} f(\xi)\, d\xi = 0 \qquad a > 0$$

$$C_R' \; : \; |z| = R \cap \operatorname{Re} z > 0$$

3) $f(z) \in$ Лемма Жордана $\qquad \operatorname{Re} z \leq 0$

$$\Rightarrow \lim_{R \to \infty} \int_{C_R'} e^{a\xi} f(\xi)\, d\xi = 0 \qquad a > 0$$

$$C_R' : \; |z| = R \;\square\; \operatorname{Re} z < 0$$

4) $f(z) \in$ Лемма Жордана $\quad \operatorname{Im} z \geq y_0$

$(\operatorname{Im} z \leq y_0, \operatorname{Re} z \geq x_0, \operatorname{Re} z \leq x_0)$

$$C_R' \ : \ |z - iy_0| = R \cap \operatorname{Im} z > 0$$

$$C_R' \ : \ |z - iy_0| = R \cap \operatorname{Im} z < 0$$

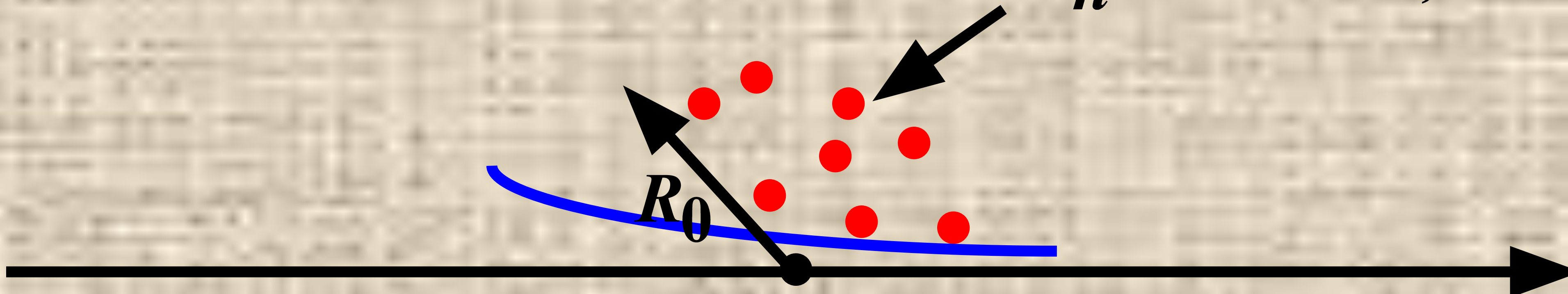
$$C_R' \ : \ |z - x_0| = R \cap \operatorname{Re} z > 0$$

$$C_R' \ : \ |z - x_0| = R \cap \operatorname{Re} z < 0$$

<u>Теорема 18.2.</u>

$\exists\, f(z)\ \ \operatorname{Im} z \geq 0$ $\qquad f(z) \in$ **Лемма Жордана**

$\operatorname{Im} z_n > 0 \quad n = \overline{1, N}$



0 $\qquad x$

$f(x)\ \ -\infty < x < \infty$

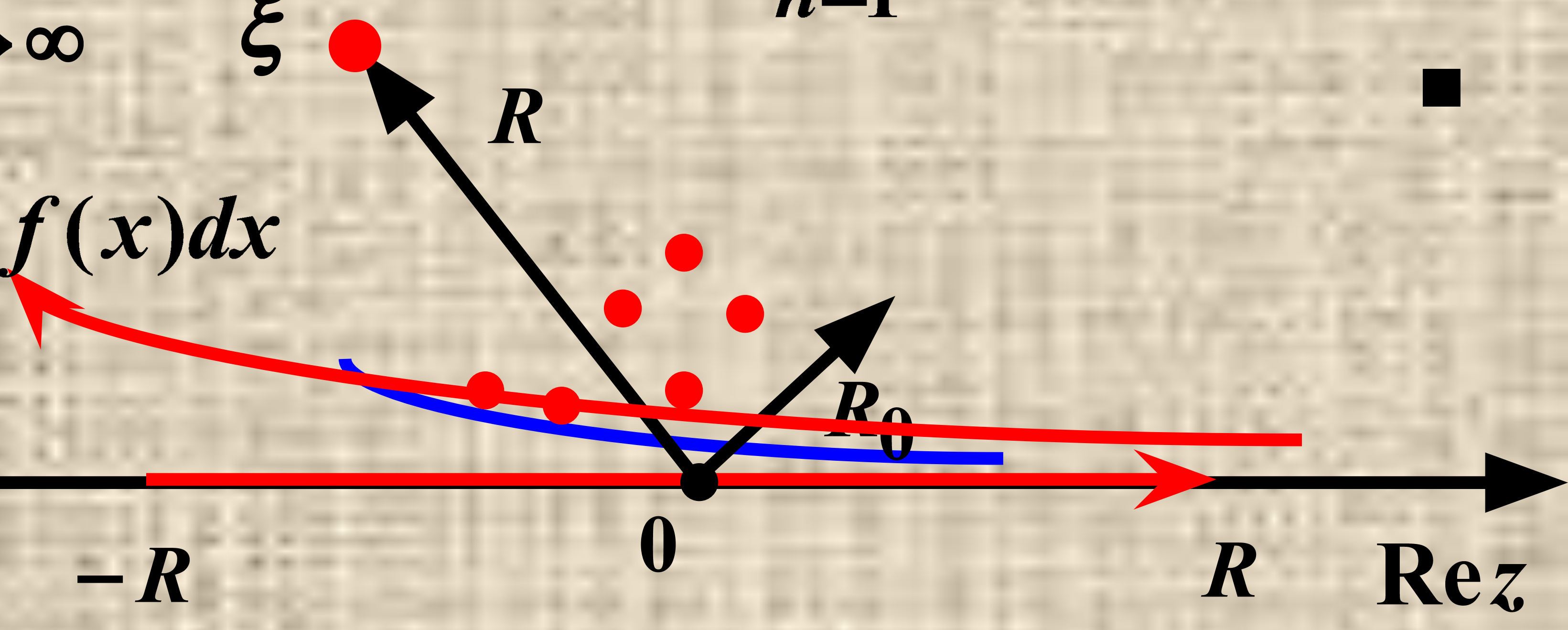
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{n=1}^{N} Выч\left[e^{iaz} f(z), z_n\right]$$

<u>Доказательство.</u> (Л.Жордана)

$$\underbrace{\int_{-R}^{R} e^{iax} f(x)\,dx}_{R\to\infty:\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x)\,dx} + \overbrace{\int_{C'_R} e^{ia\xi} f(\xi)\,d\xi}^{R\to\infty\ 0} =$$

$$= 2\pi i \sum_{n=1}^{N} Выч\left[e^{iaz} f(z), z_n\right]$$

■



Пример $a>0, \quad k>0 \quad I=\int\limits_0^\infty \frac{\cos kx\,dx}{x^2+a^2}=$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos kx\,dx}{x^2+a^2}=\mathrm{Re}\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}dx}{x^2+a^2}=$$

$$=\mathrm{Re}\left(\pi i\,\text{Выч}\left[\frac{e^{ikz}}{z^2+a^2},ia\right]\right)=\mathrm{Re}\left(\pi i\frac{e^{-ka}}{2ia}\right)=$$

ia- полюс 1-го порядка

$$=\frac{\pi e^{-ka}}{2a}$$

Замечание. **При незначительном изменении формулировок Лемм 18.1 и 18.2 они остаются справедливыми и в случае *бесконечного числа изолированных особых точек* $f(z)$.**

Определение. Ф.К.П. $f(z)$ называется ***мероморфной***, если она определена на всей комплексной плоскости и ***не имеет в конечной части плоскости*** **особых точек,** ***отличных от полюсов***.

Некоторые интегралы

$$1)\quad \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}dx = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(a)$$

$$2)\ 0 < a < 1 \quad \int_0^\infty x^{a-1} f(x)dx =$$

$$= \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi ia}} \sum_{k=1}^{n} Выч\left[z^{a-1} f(z), z_k\right]$$

$$3)\ 0<a<1 \quad \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{-a} f(x)\,dx =$$

$$= \frac{\pi a_0}{\sin \pi a} + \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i a}} \sum_{k=1}^{n} Выч\left[z^{a-1}(1-z)^{-a} f(z), z_k\right]$$

$$a_0 = \lim_{z \to 0} f(z)$$

4) $\int\limits_0^\infty f(x)\ln x\,dx =$

$$= \pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Выч}\left[\left(\ln z - i\frac{\pi}{2}\right)f(z), z_k\right]$$