Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова
Физический факультет
Кафедра математики

Виктор Юрьевич Попов

Лекции по теории функции комплексной переменной

Лекция № 1

§1. Комплексные числа и последовательности комплексных чисел.

п. 1. Понятие комплексного числа. Геометрическая интерпретация.

Немного истории

Комплексные числа вошли в математику в XVI в. как корни квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D \geq 0 \qquad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$D < 0 \qquad x_{1,2} = ?$$

Как понимать?

Что делать?

Вначале такие корни отбрасывались, как «невозможные», «мнимые», и появление их считалось признаком отсутствия решения у задачи, приведшей к квадратному уравнению.

Обоснование: мнимые корни не выражают *величины*, так как их нельзя сравнивать друг с другом, нельзя сказать, какое мнимое больше, какое меньше.

Однако позже было обнаружено, что над ними можно производить четыре алгебраических действия, причем сохраняются свойства, присущие действиям над действительными числами.

Это и послужило основанием называть мнимые корни числами

(«Алгебра» итальянского инженера Р. Бомбелли, 1572 г.).

Геометрическое изображение комплексных чисел в виде точек или векторов "на плоскости" было введено в 1799 г. датским землемером

К. Весселем (1745—1818)

и несколько позже, в 1806 г., французским математиком

Д. Арганом (1768—1822).

Символ *i* для мнимой единицы ввел в 1777 г. Л. Эйлер (1707— 1783).

Термин «комплексное число» ввел в 1881 г. К. Вейерштрасс (1815— 1897).

Большое значение в раскрытии важной роли комплексных чисел в математике имели работы Л. Эйлера и К. Гаусса (1777—1855), а также теорема Даламбера (1717—1783) о том, что любое алгебраическое уравнение *n*-й степени с комплексными коэффициентами имеет *n* комплексных корней.

До появления этой теоремы можно было бы ожидать, что, подобно тому как квадратное уравнение привело к комплексным числам, попытки решения уравнений степеней *n* = 3, 4, ..., приведут к появлению все новых и новых типов чисел.

Геометрическое изображение комплексного числа как точки или вектора на плоскости, естественно, приводит к мысли построить дальнейшие обобщения понятия о числе.

Однако поиски числовой системы, зависящей от трех единиц: 1, *i*, *j*, геометрически изображаемой с помощью точек или векторов 3-мерного пространства, не увенчались успехом: не удавалось так придумать правила действий над новыми «числами», чтобы сохранились обычные их свойства.

В 1843 т. английский математик

У. Гамильтон (1805—1865) показал, что можно построить числовые системы, зависящие от четырех единиц: 1, *i*, *j*, *k*, если поступиться одним свойством — переместительным законом умножения.

Вообще, *гиперкомплексными числами* ранга *n* называются «числа» вида

$$a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n$$

$e_1, e_2, \dots e_n$ **— единицы,**

$a_1, a_2, \dots a_n$ **—действительные числа,**

когда указаны правила алгебраических действий с такими «числами».

Однако К. Вейерштрасс показал, что при $n > 2$ нельзя сохранить все свойства, присущие алгебраическим действиям над действительными и комплексными числами.

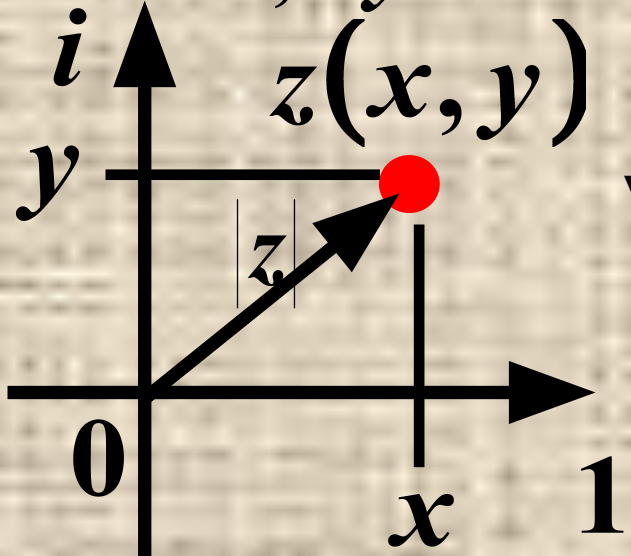
Немецкий математик Ф. Фробениус (1849—1917) доказал, что, даже отказавшись от переместительного закона умножения, можно сохранить остальные свойства алгебраических действий дополнительно лишь для $n = 4$,

а при $n \neq 1, 2, 4$,

как бы не вводилось правило умножения, всегда будут пары отличных от нуля гиперкомплексных чисел, произведение которых равно нулю.

Рассмотрим плоскость R^2. $\forall z(x,y)\in R^2$ -вектор

$x\in R,\quad y\in R.$ Определим $\boxed{|z|=\sqrt{x^2+y^2},\ (1)}$

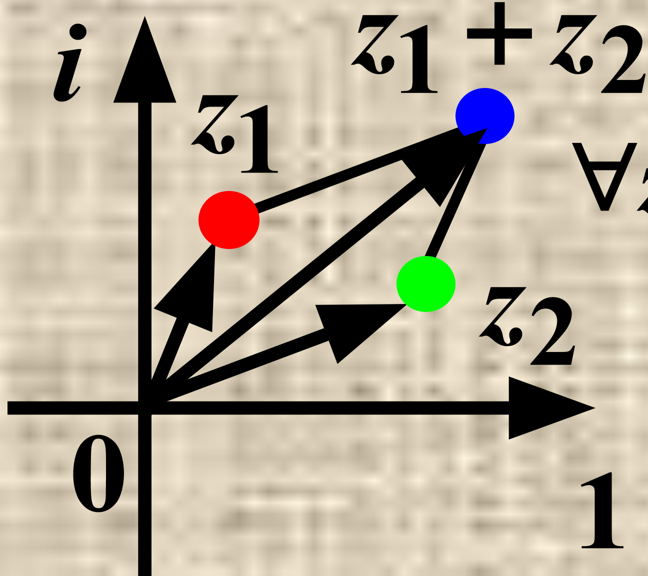


операцию сложения:

$$\forall z_1(x_1,y_1), z_2(x_2,y_2)\quad z(x,y):$$

$$z=z_1+z_2\Leftrightarrow\begin{cases}x=x_1+x_2\\ y=y_1+y_2\end{cases};\quad (2)$$

операцию умножения на число:



$$\forall z(x,y),\ \alpha\in R:\ \alpha z=(\alpha x,\ \alpha y)$$

$1=(1,0)\quad i=(0,1)$ базис (3)

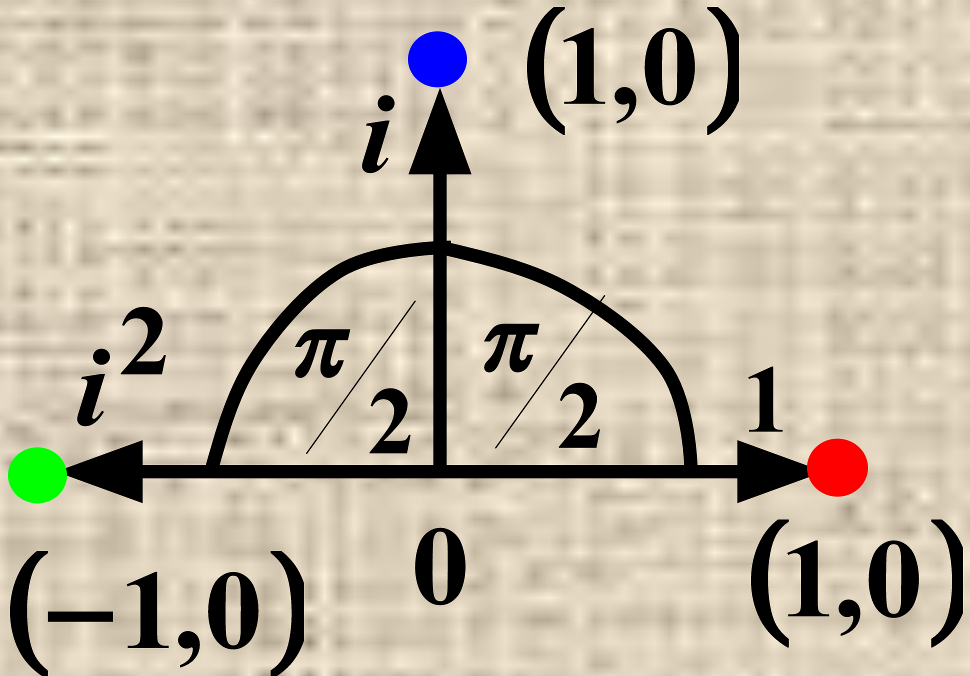
$$\forall z(x,y)=x\cdot 1+y\cdot i$$

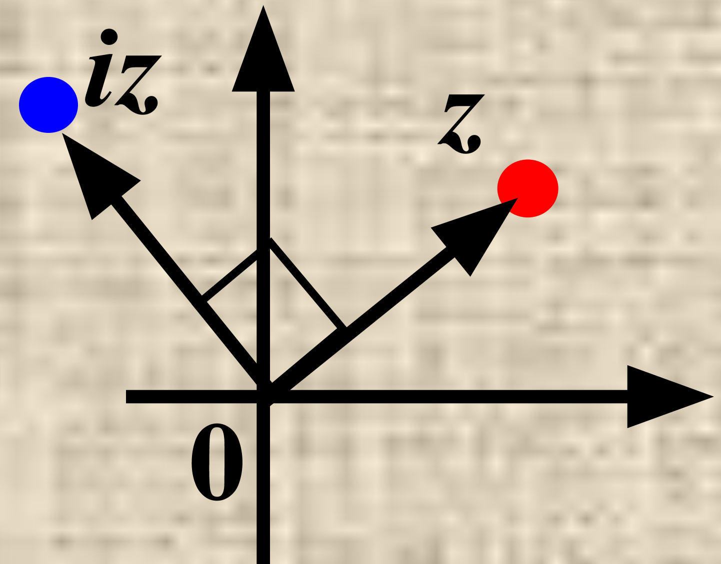
Как ввести $z = z_1 \cdot z_2$, сохранив (1) и (2) ?

Вектор 1– единица операции умножения.

Определим $i \cdot i = i^2$. Т.к. $1 \cdot i = i$, то <u>полагают</u>

$$i^2 = -1. \quad (4)$$





$$z(x,y):\ z \cdot i = (x \cdot 1 + y \cdot i) \cdot i = -y \cdot 1 + x \cdot i = (-y, x) \quad (5)$$

<u>Правило умножения</u> $z_1(x_1, y_1), z_2(x_2, y_2) \in R^2$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_1, y_1) =$$

$$= (x_1 \cdot 1 + y_1 \cdot i) \cdot (x_2 \cdot 1 + y_2 \cdot i) =$$

$$= (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) \cdot 1 + (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) \cdot i =$$

$$= ((x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2);\ (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)) \quad (6)$$

<u>Def</u>. Числовая плоскость R^2 **называется *<u>комплексной плоскостью</u>*** C, **если для ее точек определены модули (1), операции сложения (2) и умножения (6).**

Точки комплексной плоскости C **называются *<u>комплексными числами</u>*.**

Действительные числа включаются в множество комплексных чисел.

a=(a,0)-вещественное число, 0=(0, 0), 1=(1, 0), -1=(-1, 0), ib= (0, b)-чисто мнимое число,

i =(0, 1)- мнимая единица, -i=(0, -1).

<u>Равенство.</u> $z_1(x_1, y_1)$, $z_2(x_2, y_2)$:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}.$$

<u>Алгебраическая</u> форма записи.

$$\boxed{z = x + i\,y = \mathrm{Re}\,z + i\,\mathrm{Im}\,z.}$$

$z(x, y)-$ **упорядоченная пара вещественных чисел.**

Комплексное сопряжение.

$$\bar{z} \equiv z^{*} = x - i\,y = (x, -y).\quad \mathrm{Re}\,z^{*} = x,\quad \mathrm{Im}\,z^{*} = -y.$$

$$\mathrm{Re}\,z = \frac{z + z^{*}}{2},\ \mathrm{Im}\,z = \frac{z - z^{*}}{2i},\quad \left(z^{*}\right)^{*} = z,$$

$$\left(z_1 \pm z_2\right)^{*} = z_1^{*} \pm z_2^{*},\quad \left(z_1 \cdot z_2\right)^{*} = z_1^{*} \cdot z_2^{*},$$

$$z \cdot z^{*} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$$

Деление.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot z_2^{*}}{z_2 \cdot z_2^{*}} = \frac{z_1 \cdot z_2^{*}}{|z_2|^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2^2 + y_2^2}$$

Примеры.

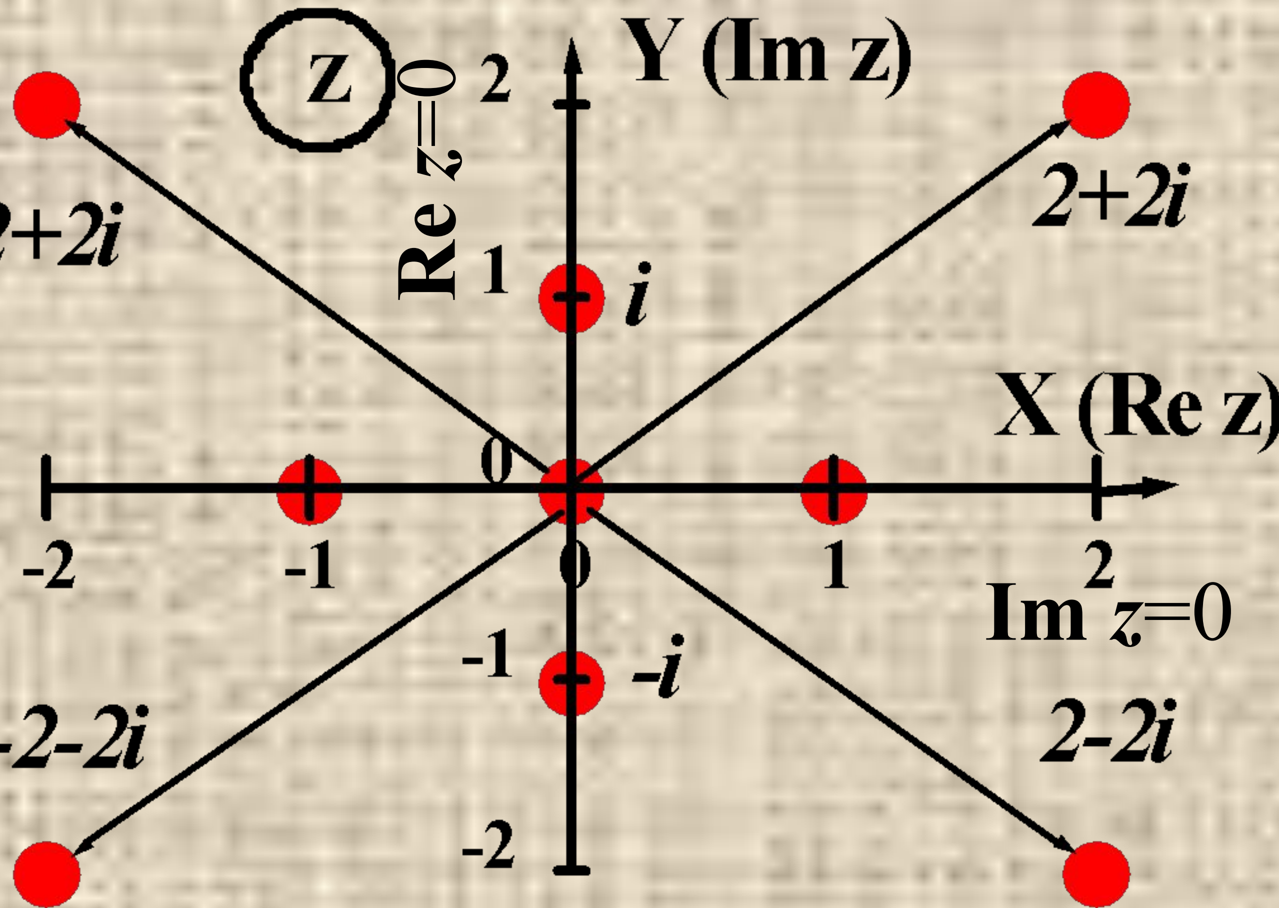
$$z^2=(x+iy)^2=\left(x^2-y^2\right)+i\cdot(2xy);$$

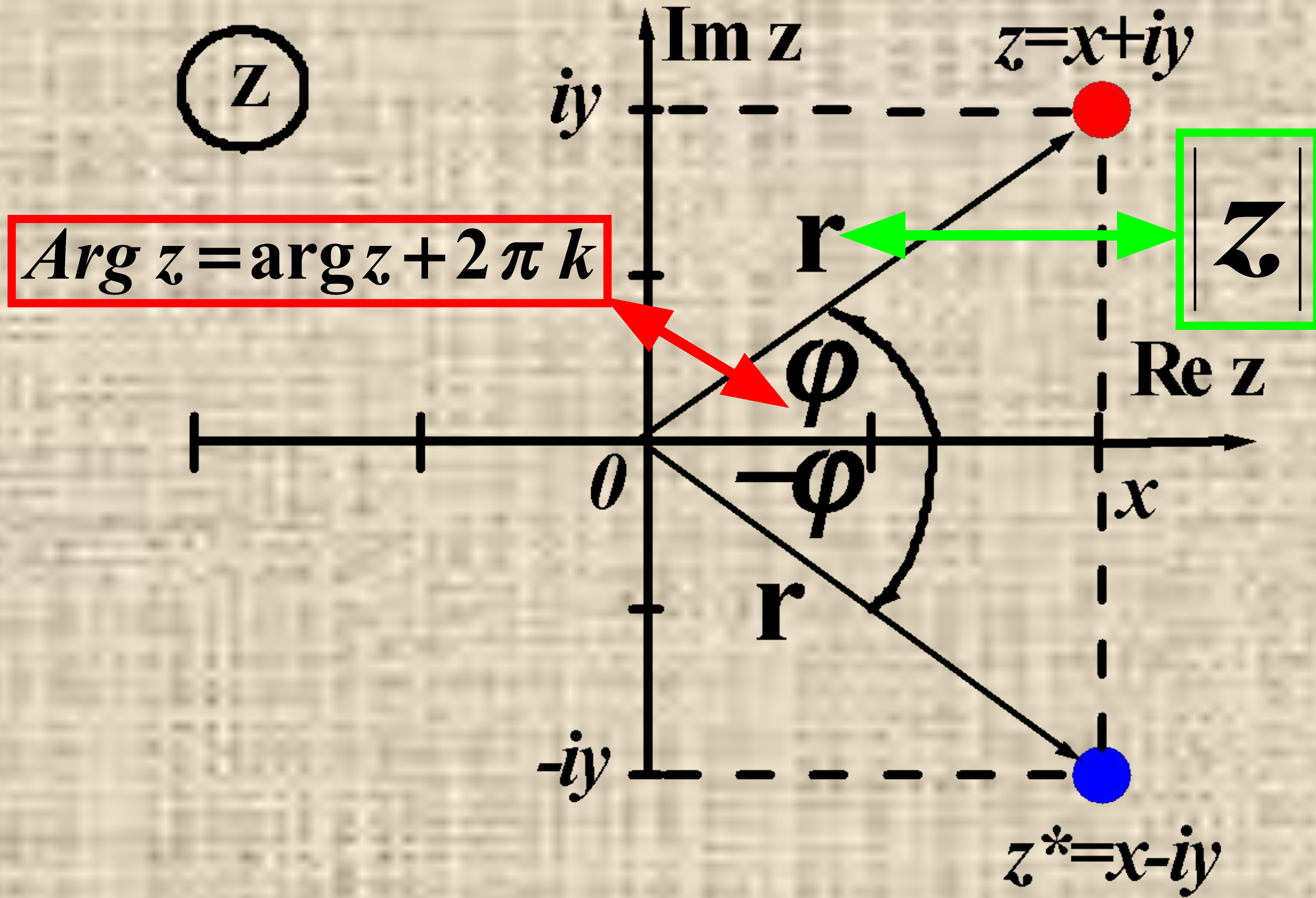
$$i^n=\begin{cases}1, & n=4k\\ i & n=4k+1\\ -1 & n=4k+2\\ -i & n=4k+3\end{cases}, \quad k=0,1,2...; \quad i^*=-i;$$

$$\frac{3+4i}{2-3i}=\frac{(3+4i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}=\frac{6-12}{2^2+3^2}+i\frac{8+9}{2^2+3^2}=$$

$$=-\frac{6}{13}+i\frac{17}{13}; \qquad 1/i=-i$$

Комплексные числа можно изображать точками на комплексной плоскости.




z
Im z
z=x+iy
iy
|z|
Arg z = arg z + 2π k
r
φ
Re z
0
−φ
x
r
-iy
z*=x-iy

Модуль и аргумент комплексного числа

Полярные координаты $(x,y)\leftrightarrow(r,\phi)$.

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi$$

Модуль комплексного числа:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z| = \sqrt{(\mathrm{Re}\,z)^2 + (\mathrm{Im}\,z)^2}$$

Аргумент комплексного числа:

$$tg\,\varphi = \frac{y}{x} = \frac{\mathrm{Im}\,z}{\mathrm{Re}\,z}; \quad \varphi = \varphi_0 + 2\pi k; \alpha_0 \le \varphi_0 \le \alpha_0 + 2\pi$$

$$Arg\,z = \arg z + 2\pi k;$$

$\alpha_0 \le \arg z \le \alpha_0 + 2\pi$ **Главное значение** аргумента.

$\boxed{-\pi < \arg z \le \pi}$ -разрез по $\mathrm{Re}\, z < 0$ - PC Soft

$0 \le \arg z < 2\pi$ -разрез по $\mathrm{Re}\, z > 0$ -литература

<u>**Примеры.**</u> $|0| = 0, \quad \arg 0$ — **не определен!**

$|1| = 1, \quad \arg 1 = 0;$ $\qquad |i| = 1, \quad \arg i = \dfrac{\pi}{2};$

$|-1| = 1, \quad \arg(-1) = \pi;$ $\qquad |-i| = 1, \quad \arg(-i) = -\dfrac{\pi}{2};$

$z = 2 - 2i, \quad |z| = 2\sqrt{2}, \quad \arg(z) = -\dfrac{\pi}{4};$

Тригонометрическая форма записи

$$z = x + i\,y, \quad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

$$\boxed{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad r = |z|, \quad \varphi \in Arg\,z.}$$

формула Эйлера: φ ▯ $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \quad \varphi \in R.$

Показательная форма записи

$$\boxed{z = re^{i\varphi}, \quad r = |z|, \quad \varphi \in Arg\,z.}$$

Теорема. Пусть $\varphi, \psi \in R, \quad k \in Z$, тогда

1) $e^{i0} = 1$; 2) $e^{i\varphi}e^{i\psi} = e^{i(\varphi+\psi)}$;

3) $e^{i(\varphi+2\pi k)} = e^{i\varphi}$; 4) $e^{-i\varphi} = \dfrac{1}{e^{i\varphi}}$; 5) $\left|e^{i\varphi}\right| = 1.$

Примеры.

$$1=1\cdot(\cos 0+i\sin 0)=e^{i0};\qquad \sqrt{3}-i=2e^{-i\frac{\pi}{6}};$$

$$i=1\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=e^{i\frac{\pi}{2}};\quad -2-2i=2\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}};$$

$$-1=1\cdot(\cos\pi+i\sin\pi)=e^{i\pi};\qquad i\sqrt{3}-1=2e^{i\frac{2\pi}{3}};$$

$$-i=1\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=e^{-i\frac{\pi}{2}};$$

$$-e^{i\frac{\pi}{4}}=e^{i\pi}e^{i\frac{\pi}{4}}=e^{-i\pi}e^{i\frac{\pi}{4}}=e^{-i\frac{3\pi}{4}}.$$

Вопрос. $e^{i\varphi}=e^{(i2\pi)\frac{\varphi}{2\pi}}=1^{\frac{\varphi}{2\pi}}=1\quad\forall\varphi\quad ?$

Умножение и деление в показательной форме.

$$z_1=r_1e^{i\varphi_1},\quad z_2=r_2e^{i\varphi_2},$$

$$z_1z_2=r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},\qquad \frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

Формула Муавра. $z=re^{i\varphi}=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$

$$z^n=r^ne^{in\varphi}=r^n(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=$$

$$=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi).$$

$$\boxed{(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)}$$

Извлечение корня. $z = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$

$$= r\left(\cos(\varphi + 2\pi k) + i\sin(\varphi + 2\pi k)\right) = re^{i(\varphi + 2\pi k)};$$

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)}},$$

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right)},$$

$$k = 0, 1 \ldots, n - 1.$$

Корень *n*-той степени из комплексного числа принимает *n* различных значений.

Примеры.

$$(-1-i)^3=\left(\sqrt{2}\right)^3 e^{-i\frac{3\pi}{4}\cdot 3}=\left(\sqrt{2}\right)^3 e^{-i\frac{9\pi}{4}}=$$

$$=\left(\sqrt{2}\right)^3 e^{-i\frac{\pi}{4}}=\left(\sqrt{2}\right)^3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=$$

$$=\left(\sqrt{2}\right)^3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2-2i.$$

$$\sqrt[3]{2-2i}=\left(\sqrt{8}\right)^{1/3}e^{i\frac{1}{3}\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)}=$$

$$=\sqrt{2}\begin{cases} e^{-i\frac{\pi}{12}}, \quad k=0; \\ e^{i\frac{7\pi}{12}}, \quad k=1; \\ e^{i\frac{5\pi}{4}}=e^{-i\frac{3\pi}{4}}=-1-i, \quad k=2; \end{cases}$$

$$\sqrt[4]{1}=e^{i\frac{2\pi k}{4}}=\begin{cases} e^{i0}=1, \quad k=0; \\ e^{i\frac{\pi}{2}}=i, \quad k=1; \\ e^{i\pi}=-1, \quad k=2; \\ e^{i\frac{3\pi}{2}}=e^{-i\frac{\pi}{2}}=-i, \quad k=3. \end{cases}$$

$$\sqrt[4]{-1}=e^{i\frac{\pi+2\pi k}{4}}=\begin{cases} e^{i\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i), & k=0; \\ e^{i\frac{3\pi}{4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-1+i), & k=1; \\ e^{-i\frac{3\pi}{4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-1-i), & k=2; \\ e^{-i\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i), & k=3. \end{cases}$$

Множество комплексных чисел C образует <u>*поле*</u>.

Поле C <u>*не является упорядоченным*</u>.

В упорядоченном поле P $\forall a,b \in P$

$$a^2+b^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}.$$

В поле C $1^2+i^2=0,$ но $1 \neq 0,\ \ i \neq 0.$

Операция сравнения в C <u>не определена</u>.

Утверждение $1+i>i \Rightarrow 1>0-$ неверно.

Модуль $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ удовлетворяет аксиомам норм.

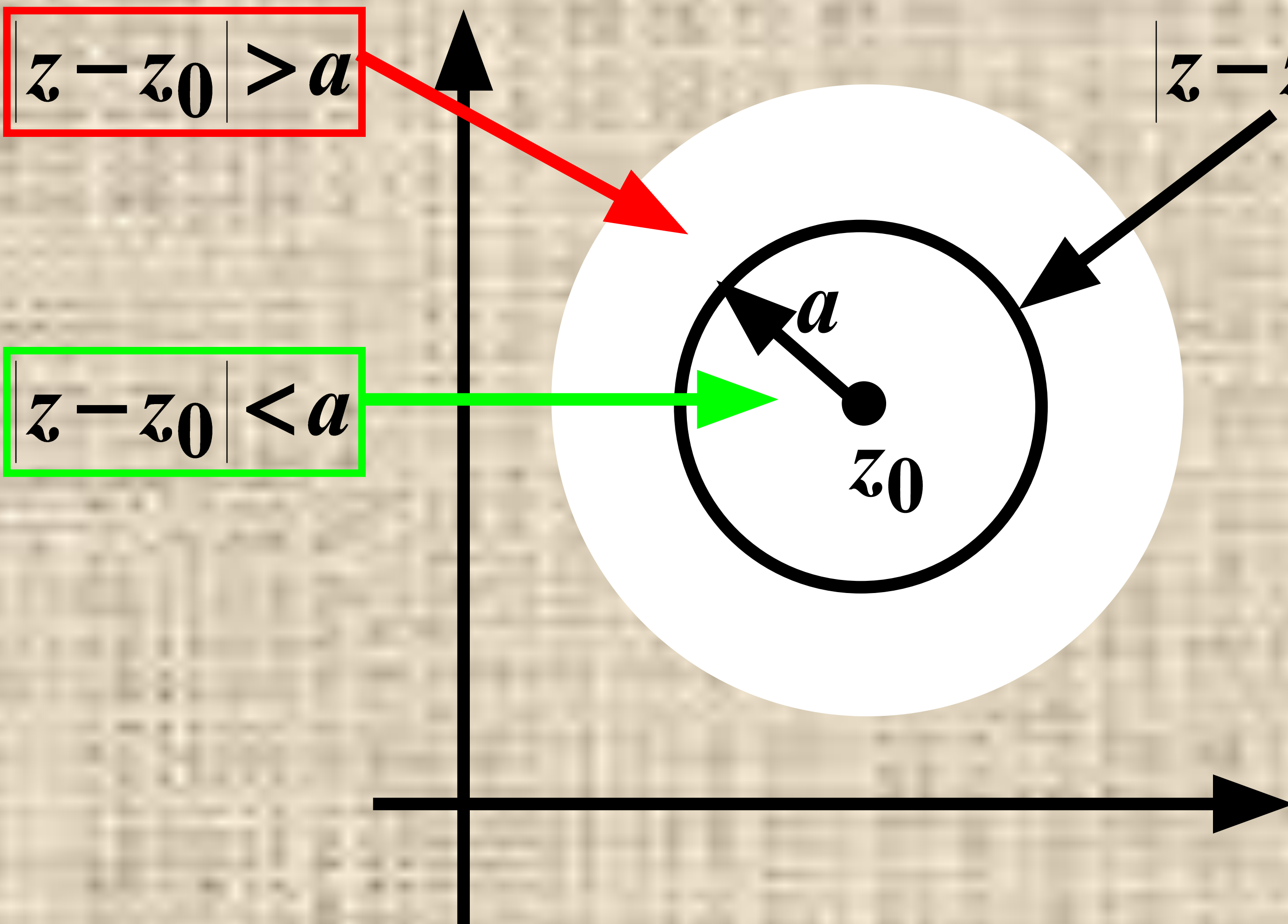
Неравенства треугольника.

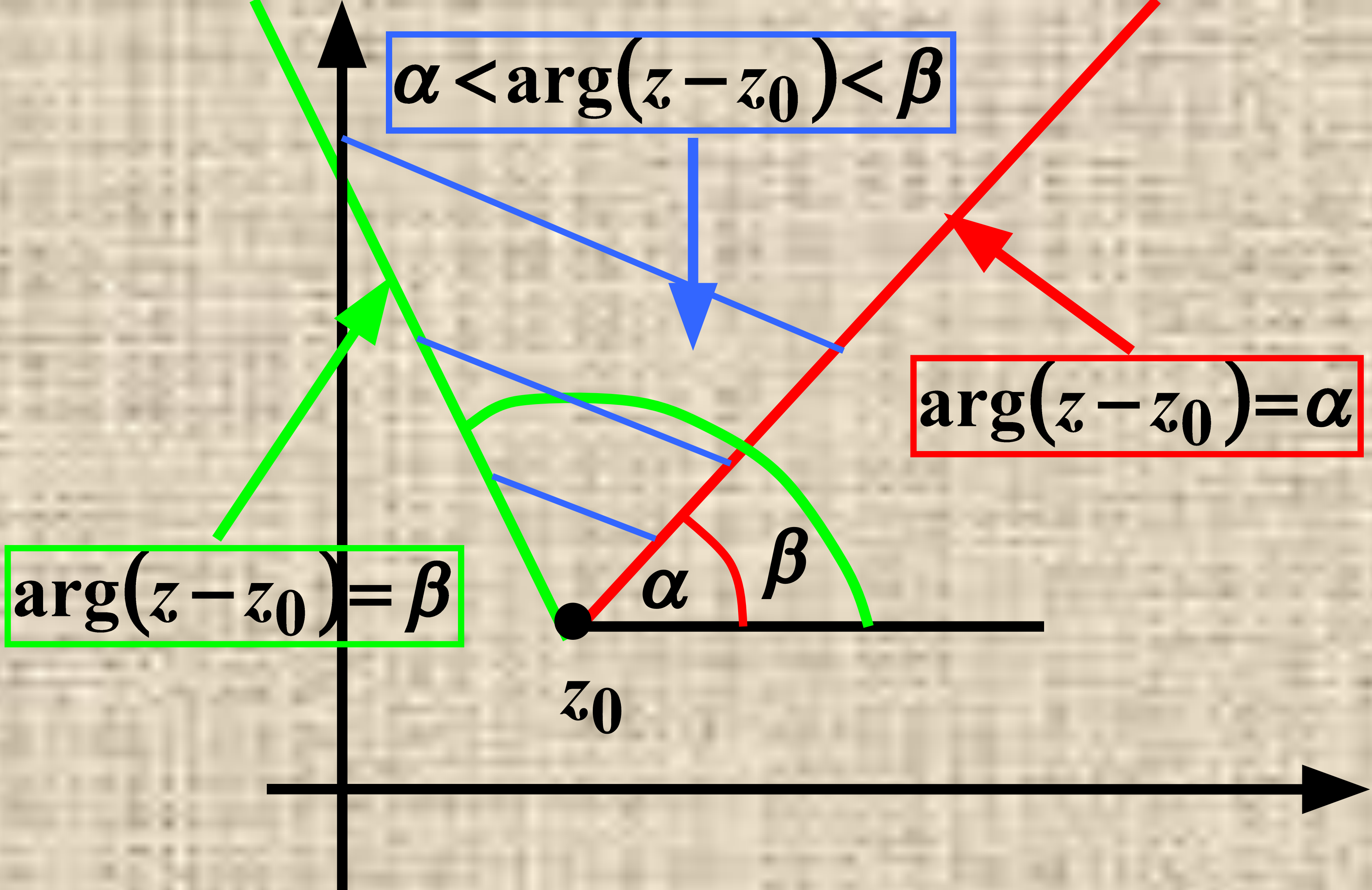
$$\left||z_1|-|z_2|\right| \le |z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$$

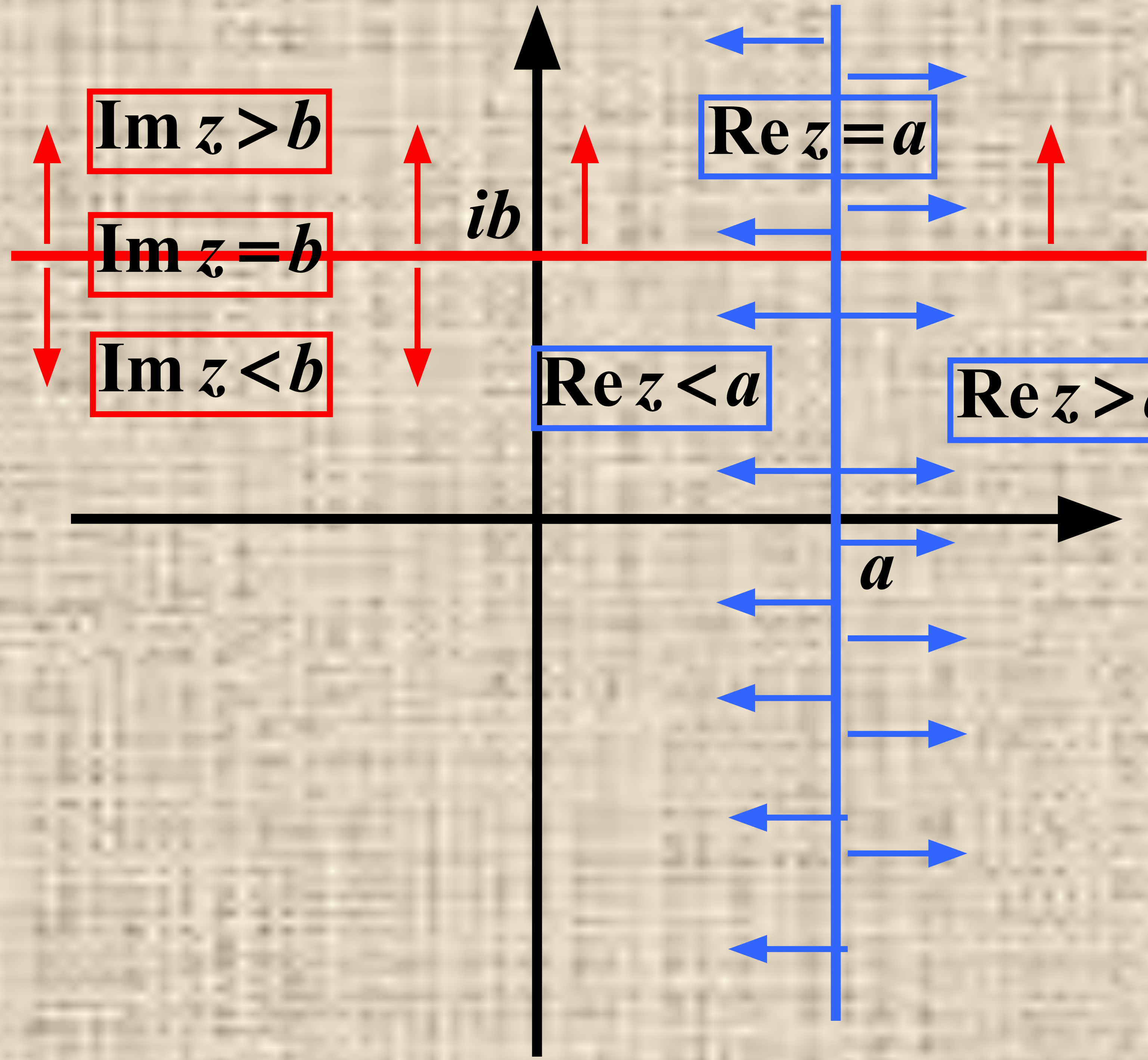
Упорядоченная четверка $E=\left(C,+,\bullet,|\ |\right)$ **является нормированным векторным пространством над полем** ***R*****. Оно превратится в метрическое пространство, если** $\forall z_1, z_2 \in C$ **ввести метрику по формуле** $\rho(z_1, z_2)=|z_1-z_2|$.

Из теоремы Фробениуса следует, что поле ***C*** **является «максимальным» числовым полем и дальнейшее расширение понятия числа невозможно.**

Некоторые простейшие множества точек на комплексной плоскости.




$\alpha < \arg(z - z_0) < \beta$
$\arg(z - z_0) = \alpha$
$\arg(z - z_0) = \beta$
α
β
z_0


Im z > b
Im z = b
Im z < b
ib
Re z = a
Re z < a
Re z > a
a