Лекция №3
§ 2. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ

- Одной из **центральных задач** математической статистики является задача оценивания теоретического распределения случайной величины на основе выборочных данных.
- При этом часто предполагается, что вид **закона распределения генеральной совокупности** известен, но неизвестны параметры этого распределения, такие как математическое ожидание, дисперсия. Требуется найти приближенные значения этих параметров, то есть получить статистические оценки указанных параметров.

- **Определение.** Статистической оценкой параметра теоретического распределения называют его приближенное значение, зависящее от данных выбора.

- Рассматривая выборочные значения $x_1, x_2, \dots, x_n$ как реализации случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$ получивших конкретные значения в результате опытов, можно представить оценку $\overline{\theta}$ как функцию этих случайных величин: $\overline{\theta} = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_n)$ Это означает, что оценка тоже является случайной величиной.
- Если для оценки θ взять несколько (k) выборок, то получим столько же случайных оценок $\overline{\theta}_1, \overline{\theta}_2, \dots, \overline{\theta_k}$
- Если число наблюдений невелико, то замена неизвестного параметра θ оценкой $\overline{\theta}$ приводит к ошибке, которая тем больше, чем меньше число опытов.

2.1. Точечные оценки

- Статистические оценки могут быть **точечными** и **интервальными**.
- Точечные оценки представляют собой число или точку на числовой оси. Чтобы оценка $\overline{\theta}$ была близка к значению параметра θ , она должна обладать свойствами состоятельности, несмещенности и эффективности.

Состоятельность

- **Определение.** Оценка $\overline{\theta}$ параметра θ называется *состоятельной*, если она сходится по вероятности к оцениваемому параметру, то есть для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\overline{\theta} - \theta\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Поясним смысл этого равенства:

- Пусть ε- очень малое положительное число. Тогда данное равенство означает, что чем больше объем выборки n, тем ближе оценка $\overline{\theta}$ приближается к оцениваемому параметру θ .

Свойство состоятельности нужно проверять в первую очередь. Оно **обязательно** для любого правила оценивания. Несостоятельные оценки не используются.

Несмещённость

- **Определение.** Оценка $\overline{\theta}$ параметра θ называется *несмещенной*, если $M\left(\overline{\theta}\right)=\theta$, то есть математическое ожидание оценки равно оцениваемому параметру. Если $M\left(\overline{\theta}\right)\neq\theta$, то оценка называется *смещенной*.
- Это свойство оценки желательно, но не обязательно. Часто полученная оценка бывает смещенной, но ее можно поправить так, чтобы она стала несмещенной.
- Иногда, оценка бывает *асимптотически несмещенной* , то есть $M\left(\overline{\theta}\right)\to\theta$.
- Требования несмещенности особенно важно при малом числе опытов.

Эффективность

- **Определение.** Несмещенная оценка $\overline{\theta}$ параметра θ называется *эффективной*, если она среди всех несмещенных оценок, в определенном классе оценок данного параметра, обладает наименьшей дисперсией.

- Можно показать, что:
- - $\bar{x}_{в}$ является состоятельной, несмещенной и эффективной оценкой $M(X)$ в классе линейных оценок;
- - $D_{в}$ является состоятельной, смещенной оценкой $D(X)$;
- - $S^{2} = \frac{n}{n-1} D_{в}$ является состоятельной, несмещенной оценкой $D(X)$;

(при больших n разница между S^{2} и $D_{в}$ мала.

S^{2} используется при малых выборках, обычно при $n \le 30$) ;

- - относительная частота $\frac{n_A}{n}$ появления события A в n независимых испытаниях является состоятельной, несмещенной и эффективной оценкой, в классе линейных оценок, неизвестной вероятности $p=P(A)$ (p - вероятность появления события A в каждом испытании);
- - эмпирическая функция распределения выборки $F^*(x)$ является состоятельной, несмещенной оценкой функции распределения $F(x)$ случайной величины X .

- Для нахождения оценок неизвестных параметров используют различные **методы**. Наиболее распространенными являются: метод моментов, метод максимального правдоподобия (ММП), метод наименьших квадратов (МНК).

2.2. Интервальные оценки

- При выборке малого объема точечная оценка может существенно отличаться от оцениваемого параметра. В этом случае целесообразно использовать интервальные оценки.
- **Определение**. *Интервальной* называют оценку, которая определяется двумя числами – концами интервала.

- Пусть найденная по данным выборки величина $\overline{\theta}$ служит оценкой неизвестного параметра θ . Оценка $\overline{\theta}$ определяет θ тем точнее, чем меньше $\left|\theta-\overline{\theta}\right|$ то есть чем меньше δ в неравенстве $\left|\theta-\overline{\theta}\right|<\delta$ $(\delta>0)$
- Поскольку $\overline{\theta}$ - случайная величина, то и разность $\left|\theta-\overline{\theta}\right|$ - случайная величина. Поэтому неравенство $\left|\theta-\overline{\theta}\right|<\delta$, при заданном δ может выполняться только с некоторой вероятностью.

- **<u>Определение</u>.** *Доверительной вероятностью (надежностью)* оценки $\overline{\theta}$ параметра θ называется вероятность γ, с которой выполняется неравенство $|\theta - \overline{\theta}| < \delta$.
- Обычно задается надежность γ и определяется δ. Чаще всего надежность задается значениями от 0,95 и выше, в зависимости от конкретно решаемой задачи.

- Неравенство $\left|\theta - \overline{\theta}\right| < \delta$ можно записать

$$\overline{\theta} - \delta < \theta < \overline{\theta} + \delta$$

- **<u>Определение.</u>** *Доверительным интервалом* называется интервал $\left(\overline{\theta} - \delta ; \overline{\theta} + \delta\right)$ который покрывает неизвестный параметр с заданной надежностью γ .

2.2.1. Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения при известной дисперсии

- Пусть случайная величина X имеет нормальное распределение: $N(a;\sigma)$
- Известно значение σ и задана доверительная вероятность γ (надежность) . Требуется построить доверительный интервал для параметра a по выборочному среднему $\overline{x_в}$.

- Чтобы подчеркнуть случайный характер $\overline{x_в}$ обозначим его $\overline{X_в}$.
- Примем без доказательства, что если случайная величина X распределена нормально, то и выборочное среднее $\overline{X_в}$, найденное по независимым наблюдениям, также распределено нормально.
- Параметры распределения $\overline{X_в}$ таковы:

$$M\left(\overline{X_в}\right) = a$$

$$\sigma\left(\overline{X_в}\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- Из теории вероятности известна формула для нормально распределенной случайной величины X :
- $$P\left(\left|X-a\right|<\delta\right)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma},\right) \qquad \frac{\delta}{\sigma}$$
- где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ - функция Лапласа, значение которой в точке находим по таблице (Приложение 2).

- Учитывая, что $\overline{X_в}$ имеет нормальное распределение можно записать
- $P\left(\left|\overline{X_в}-a\right|<\delta\right)=2\Phi\left(\dfrac{\delta}{\sigma\left(\overline{X_в}\right)}\right)=\gamma$ или $\gamma=2\Phi\left(\dfrac{\delta\cdot\sqrt{n}}{\sigma}\right)=2\Phi(t)$
- Где $\dfrac{\delta\cdot\sqrt{n}}{\sigma}=t$
- Из последнего равенства по таблице Лапласа находим t (Приложение 2).
- Тогда $\delta=t\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ и доверительный интервал

$\left(\overline{X_в}-t\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}};\overline{X_в}+t\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ покрывает с надежностью γ математическое ожидание a

- **Пример 6**. Случайная величина имеет нормальное распределение с известным средним квадратическим отклонением $\sigma = 3$. Найти доверительный интервал оценки неизвестного математического ожидания по выборочной средней $\overline{x_в}$, если объем выборки $n = 36$, а надежность оценки $\gamma = 0{,}95$.
- 1. Находим t : $2\Phi(t) = 0{,}95$ $\Phi(t) = 0{,}475$ По таблице значений функции Лапласа $t = 1{,}96$.
- 2. Определяем $$\delta = t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{3}{\sqrt{36}} = 0{,}98$$
- Доверительный интервал запишется в виде: $\left(\overline{x_в} - 0{,}98;\ \overline{x_в} + 0{,}98\right)$

2.2.2. Доверительный интервал для оценки математического ожидания при неизвестной дисперсии

- Пусть случайная величина X имеет нормальное распределение: $N(a;\sigma)$, причем γ - неизвестно, σ - задана.
- Если $D(X)$ неизвестна, то пользуются оценкой S^2.

- Введем случайную величину $T = \dfrac{\overline{X_в} - a}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}}$
- где S - исправленное среднее квадратическое отклонение случайной величины X , вычисленное по выборке:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X_в}\right)^2} \quad ;$$

- Случайная величина T имеет распределение Стьюдента с (n -1) степенью свободы.
- Тогда доверительный интервал для оценки $a=M(X)$ имеет вид:
- $$\left(\overline{X_в} - t_j \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}; \overline{X_в} + t_j \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right)$$,
- где $\overline{X_в}$ - выборочное среднее;
- S - исправленное среднее квадратическое отклонение;
- t_j - находим по таблице квантилей распределения Стьюдента (Приложение 3) в зависимости от числа степеней свободы и доверительной вероятности γ.

Пример 7. Произведено пять независимых наблюдений над случайной величиной $X \sim N(a;\sigma)$. Результаты наблюдений таковы:

- $x_1 = 35$, $x_2 = 20$, $x_3 = 15$, $x_4 = -12$, $x_5 = 42$.
- Построить для неизвестного *M(x)=a* доверительный интервал, если $\gamma = 0{,}95$

- 1. Находим $\overline{x_в}$: $\overline{x_в} = \frac{1}{5}(-35+20+15-12+42) = \frac{1}{5}\cdot 30 = 6$

  $\overline{x_в} = 6$

- 2. Находим S^2:

$$S^2 = \frac{1}{4}\left((-35-6)^2 + (20-6)^2 + (15-6)^2 + (-12-6)^2 + (42-6)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left((-41)^2 + 16^2 + 9^2 + (-18)^2 + 36^2\right) = \frac{1}{4}(1681+256+81+324+1296) =$$

$$= \frac{1}{4}3638 = 909{,}5$$

$$S = \sqrt{909{,}5} \approx 30{,}2$$

- По таблице квантилей распределения Стьюдента (Приложение 3) для
- $\gamma = 0,95$ и $n-1=4$
- находим : t_j $t_j = 2,78$
- Доверительный интервал:

$$\left(6-2,78\frac{30,2}{2,24};\,6+2,78\frac{30,2}{2,24}\right)$$ или $$\left(31,5;\,43,5\right)$$

2.2.3. Доверительный интервал для оценки среднего квадратического отклонения нормального распределения

- **1.** Если *M(x)=a* неизвестно, то доверительный интервал для оценки $\sigma(X)$ имеет вид: $\left(\frac{\sqrt{n-1}\cdot S}{\chi_2}; \frac{\sqrt{n-1}\cdot S}{\chi_1}\right)$

- где *n* - объем выборки; *S* - исправленное среднее квадратическое отклонение:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X_в}\right)^2$$

- $\chi_1^2 = \chi^2_{\frac{1+\gamma}{2};n-1}$, $\chi_2^2 = \chi^2_{\frac{1-\gamma}{2};n-1}$ - квантили χ^2 - распределения, определяемые по $\chi^2_{\alpha,k}$ таблице (Приложение 5)
- при $k = n - 1$ и $\alpha = \frac{1+\gamma}{2}$, $\alpha = \frac{1-\gamma}{2}$.

- **Пример 8.** Для оценки параметра $\sigma(X)$ нормально распределенной случайной величины была сделана выборка объема в 25 единиц и вычислено $S = 0{,}8$
- Найти доверительный интервал, покрывающий σ с вероятностью $\gamma = 0{,}95$.
- ☐ Имеем $n = 25, \quad \gamma = 0{,}95$.

$$\chi_1^2 = \chi^2_{\frac{1+0{,}95}{2};25-1} = \chi^2(0{,}975;\ 24) = 12{,}4$$

$$\chi_2^2 = \chi^2_{\frac{1-0{,}95}{2};25-1} = \chi^2(0{,}025;\ 24) = 39{,}4$$

- Доверительный интервал имеет вид:
- $\left(\dfrac{\sqrt{24}\cdot 0{,}8}{\sqrt{39{,}4}};\ \dfrac{\sqrt{24}\cdot 0{,}8}{\sqrt{12{,}4}}\right)$ или $(0.62;1.11)$

- **2**. Другой вид доверительного интервала для оценки $\sigma(X)$ нормального распределения имеет вид:
- $S(1-q) < \sigma < S(1+q)$ при $q < 1$;
- $0 < \sigma < S(1+q)$ при $q > 1$;
- где S- исправленное среднее квадратическое отклонение;
- $q = q(\gamma ; n)$ находим по таблице значений (Приложение 4).

- **Пример 9.** Для оценки параметра нормально распределенной случайной величины была сделана выборка объема в 25 единиц и вычислено $S = 0{,}8$
- Найти доверительный интервал, покрывающий σ с вероятностью $\gamma = 0{,}95$.

- Имеем $n = 25$, $\gamma = 0{,}95$, $S = 0{,}8$
- По таблице значений $q = q(\gamma\,;n)$ находим
- . $q = 0{,}32$
- Доверительный интервал имеет вид:

$\left(0{,}8(1-0{,}32);\ 0{,}8(1+0{,}32)\right)$ или $(0{,}544;\ 1{,}056)$

<u>Замечание. </u> Доверительные интервалы в примерах 8 и 9 получили разные при одинаковых данных, но они с вероятностью $\gamma = 0{,}95$ покрывают среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$