Элементы математического анализа

Функции

*

МПГУ
ИФТИС

Занятие заочникам 11.01.2017

Доцент кафедры ПМИиИТ
Шапкина Вера Валерьевна for_ver@list.ru

- Пусть даны две переменные x и y с областями изменения X и Y. Предположим, что переменной x может быть приписано произвольное значение из области X без каких-либо ограничений. Тогда переменная y называется <u>функцией</u> от переменной x в области её изменения X, если по некоторому правилу или закону каждому значению x из X ставится в соответствие одно определенное значение y из Y.

Независимая переменная x называется также аргументом функции.

Определение понятия функции

- Можно в определении понятия функции стать на более общую точку зрения, допуская, чтобы каждому значению x из X отвечало не одно, а несколько значений y (и даже бесконечное множество их). В подобных случаях функцию называют <u>многозначной</u>, в отличие от однозначной функции.

y есть функция от x

- y=f (x), y=g (x), y=F (x) и т.п.
- ***Буквы f, g, F, … характеризуют именно то правило, по которому получается значение x, отвечающее заданному y.***

Способы задания функции:

- Чтобы задать функцию, нужно указать способ, с помощью которого для каждого значения аргумента можно найти соответствующее значение функции. Наиболее употребительным является способ задания функции с помощью формулы **y=f(x)**, где **f(x) - заданная функция** с переменной **x**. В таком случае говорят, что функция задана формулой или что функция задана **аналитически.**
- На практике часто используется **табличный** способ задания функции. При этом способе приводится таблица, указывающая значения функции для имеющихся в таблице значений аргумента.

Основные элементарные функции

- линейная функция y=kx+b, график - прямая
- показательная a^{x} (0 <a≠*1);* график ,
- логарифмическая $\log_a$ ***x (0 < a≠1);*** график,
- степенная $y=x^n$;_; график
- тригонометрические sin x, cos x, tg x, ctg x; тригонометрические sin x, cos x, tg x, ctg x; график
- обратные тригонометрические функции: arcsin x, arccos x, arctg x, arcctg x.

обратные тригонометрические функции:

Определение элементарных функций

- Функции C (постоянная), $y=kx+b$, a^x, $\log_a x$, x^n, $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg}\, x$, $\mathrm{ctg}\, x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\mathrm{arctg}\, x$, $\mathrm{arcctg}\, x$ называются простейшими элементарными функциями.
- Применяя к этим функциям арифметические действия или операции функции от функции, мы будем получать новые более сложные функции, которые называются элементарными функциями.
- Например, $y = \sin (x^n)$ — элементарная функция.
- Элементарные функции нам известны из школьной математики.

Функция и её свойства

- **Функция -** зависимость переменной **y** от переменной **x,** если каждому значению **x** соответствует единственное значение **y**.
- **Переменная x -** независимая переменная или аргумент.
- **Переменная y -** зависимая переменная.
- **Значение функции -** значение **y**, соответствующее заданному значению **x**.
- **Область определения функции -** все значения, которые принимает независимая переменная.
- **Область значений функции (множество значений) -** все значения, которые принимает функция.

- **Функция является четной -** если для любого **x** из области определения функции выполняется равенство **$f(x)=f(-x)$.**
- **Функция является нечетной -** если для любого **x** из области определения функции выполняется равенство **$f(-x)=-f(x)$.**
- **Возрастающая функция -** если для любых **x1** и **x2,** таких, что **$x1< x2$**, выполняется неравенство **$f(x1)<f(x2)$.**
- **Убывающая функция -** если для любых **x1** и **x2,** таких, что **$x1< x2$**, выполняется неравенство **$f(x1)>f(x2)$.**

Список функций

Современная математика знает множество функций, и у каждой свой неповторимый облик, как неповторим облик каждого из миллиардов людей, живущих на Земле.

Однако при всей непохожести одного человека на другого у каждого есть руки и голова, уши и рот. Точно так же облик каждой функции можно представить сложенным из набора характерных деталей. В них проявляются основные свойства функций.

Функции — это математические портреты устойчивых закономерностей, познаваемых человеком.

Чтобы проиллюстрировать характерные свойства функций, естественно обратиться к пословицам. Ведь пословицы — это тоже отражение устойчивых закономерностей, выверенное многовековым опытом народа.

Линейная функция

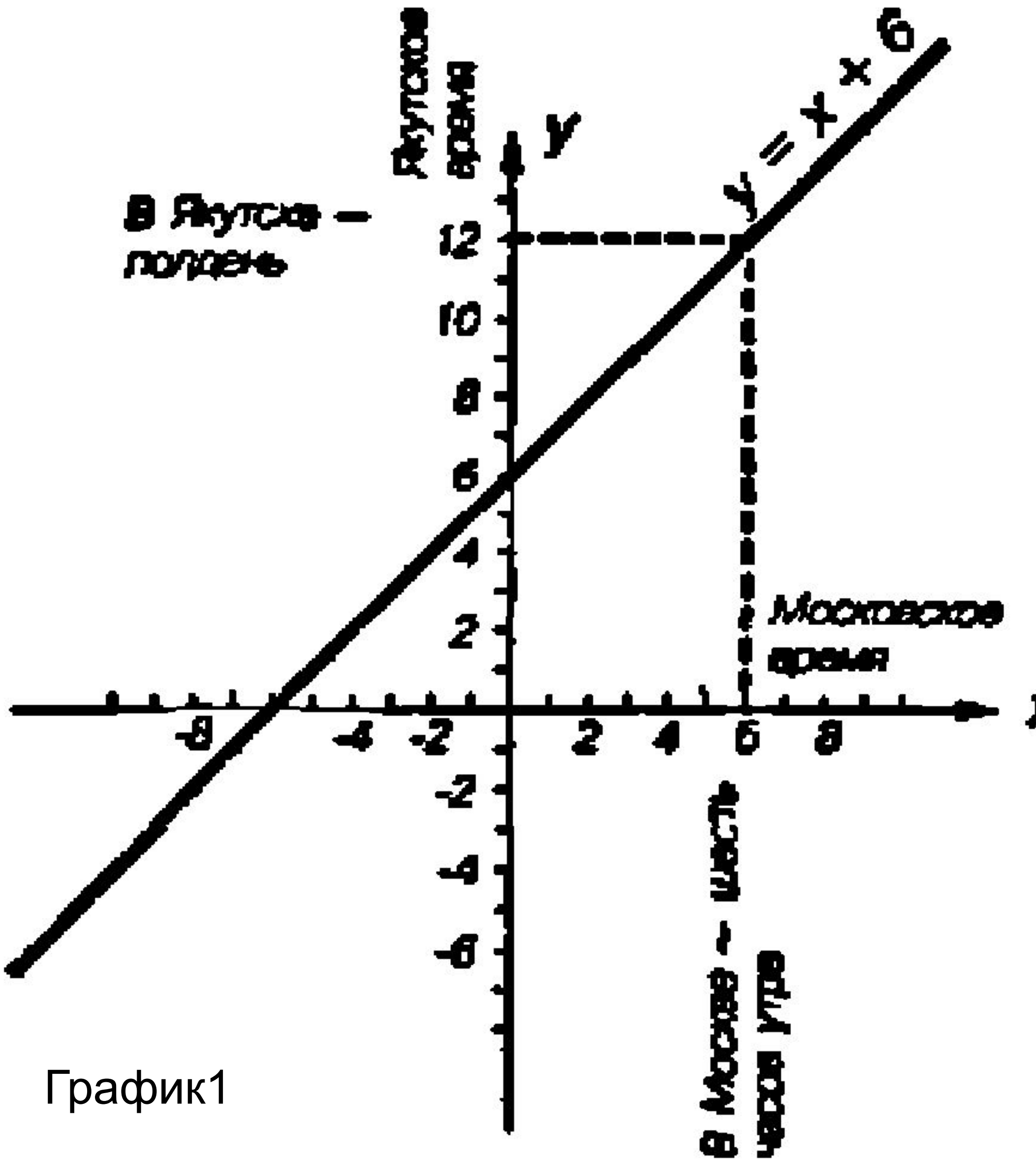


График1

Когда в Москве Кремлевские куранты отбивают 6 часов утра, в Якутске уже полдень. Расположенный по долготе восточнее столицы, город раньше встречает солнце. Приезжие москвичи в Якутске переставляют свои часы на 6 часов вперед.

См. График 2

Перенесемся теперь на три века вспять. Парусник в открытом море. Как определить долготу места, в котором он находится? Очень просто, если на корабле есть часы, поставленные в порту отправления. Нужно измерить местное время по солнцу и сравнить с показаниями часов. Расхождение пропорционально разнице по долготе между тем пунктом, где находится корабль, и тем, в котором были поставлены часы.

Точный закон этой пропорциональности позволяет вывести простое соотношение: 360^{O} (градусам) земной окружности соответствуют 24 часа, за которые Земля совершает полный оборот вокруг своей оси. Поэтому если часы отстают по сравнению с местным временем на 6 часов, корабль находится на 90^{O} восточнее того места, где были поставлены часы. Спешат на 4 часа — на 60^{O} западнее.

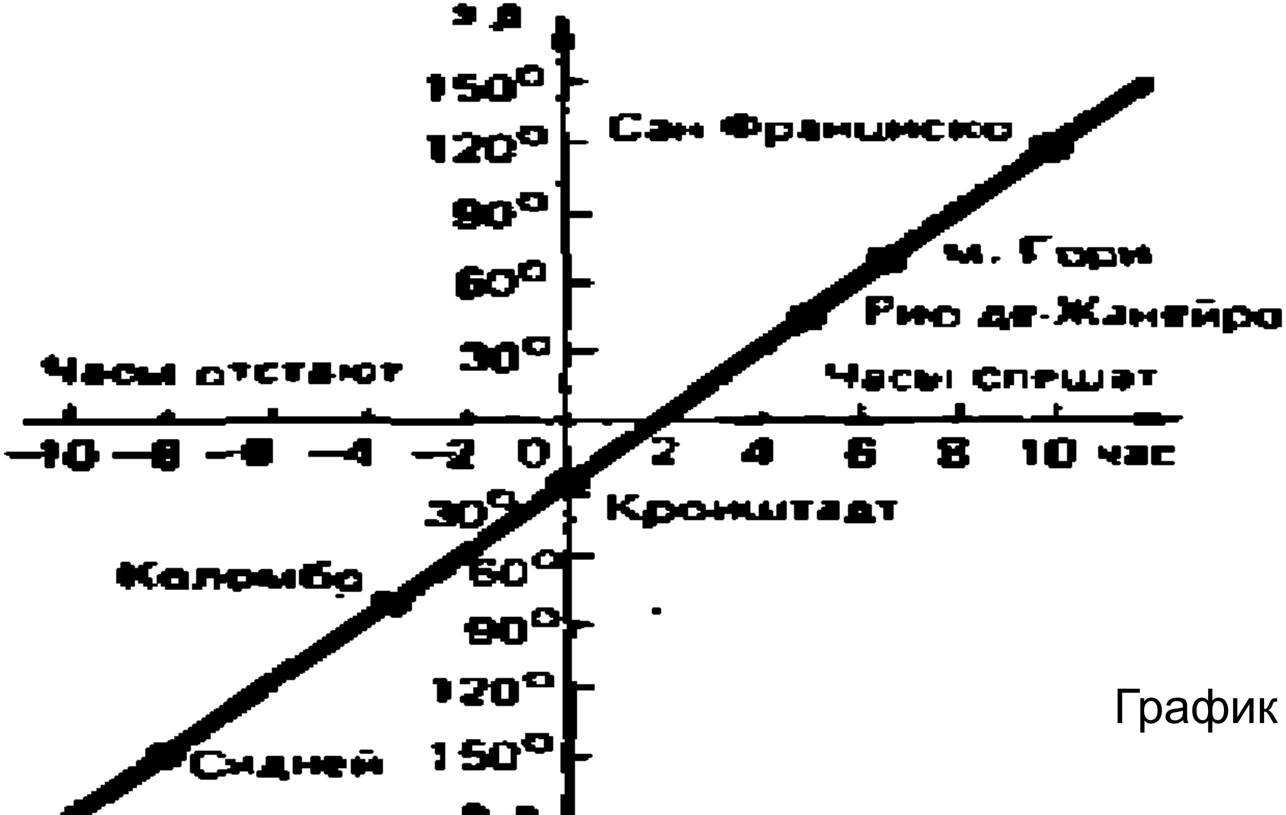


График 2

Точный закон этой пропорциональности позволяет вывести простое соотношение: 360^{O} земной окружности соответствуют 24 часа, за которые Земля совершает полный оборот вокруг своей оси. Поэтому если часы отстают по сравнению с местным временем на 6 часов, корабль находится на 90^{O} восточнее того места, где были поставлены часы. Спешат на 4 часа — на 60^{O} западнее.

Линейная функция

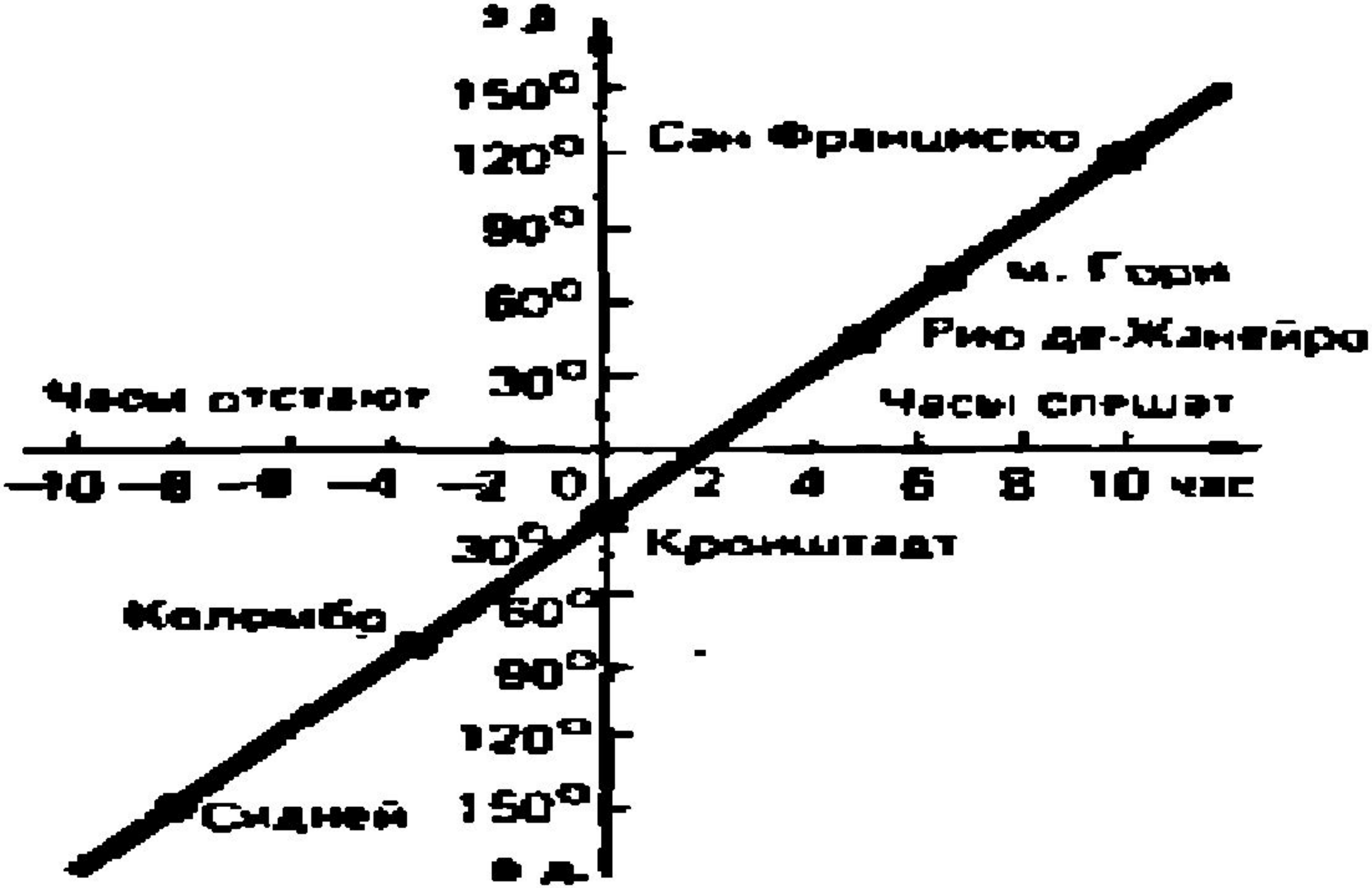


График 2

Линейная функция

Из непостоянных линейных функций простейшая та, значение которой всегда равно значению аргумента. График этой функции — биссектриса прямого угла, стороны которого — оси координат.

Любая другая прямая, исходящая из начала координат, иллюстрирует случай, когда функция прямо пропорциональна аргументу. Чтобы вычислить значение такой функции, аргумент умножают на коэффициент пропорциональности.

Линейная функция

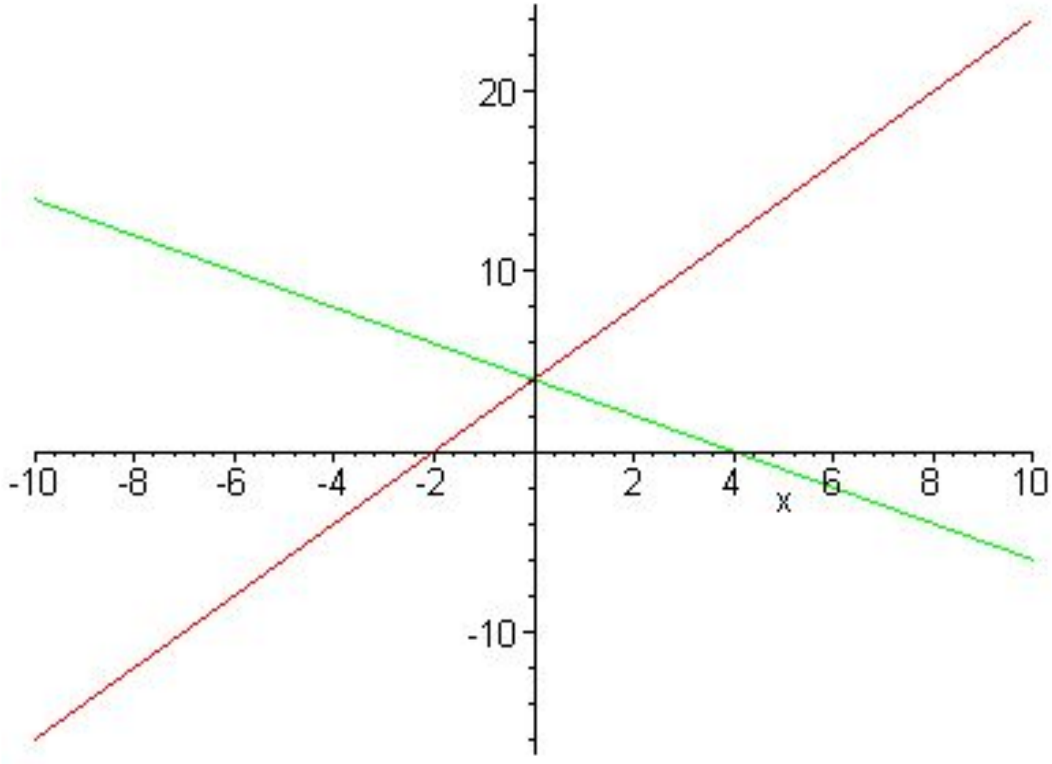
Эту величину называют еще константой пропорциональности, или угловым коэффициентом: он может служить мерой наклона соответствующей прямой на графике. Чем больше угловой коэффициент, тем круче нарастает функция по мере роста аргумента. А если угловой коэффициент меньше нуля—функция спадает.

Линейной функцией такого вида пользуются, когда определяют стоимость товара по весу или путь, пройденный в равномерном движении по времени: коэффициентом пропорциональности в первом случае служит цена, во втором — скорость.

.

Линейная функция

y=kx+b (k<0) y=kx+b (k>0)



Список функций

Почему не бывает животных какой угодно величины?

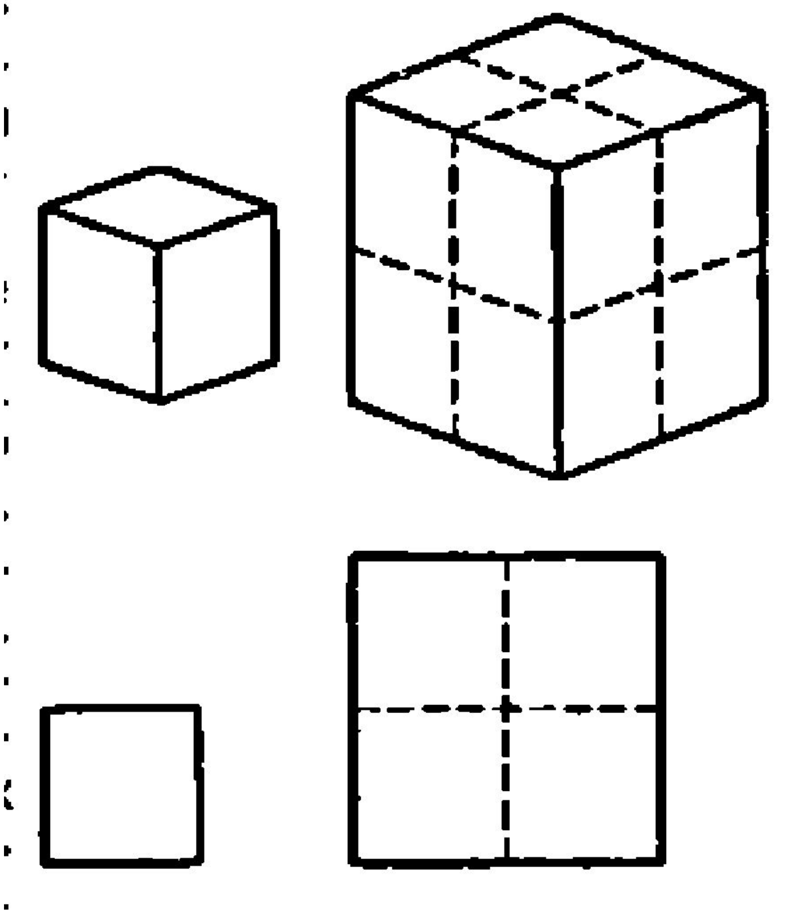
Почему, например, нет слонов в 3 раза большего роста, чем существуют, но тех же пропорций?

Не правда ли, любопытными вопросами задавались персонажи знаменитого трактата Галилео Галилея «Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки».

Ответ, к которому пришли собеседники, таков: стань слон в 3 раза больше, объем и вес его тогда увеличились бы в 27 раз, как куб размера, а площадь сечения костей и, следовательно, их прочность—только в 9 раз, как квадрат размера.

Прочности костей уже не хватило бы, чтобы вы держать непомерно увеличившийся вес. Такой слон был бы раздавлен собственной тяжестью. Рассуждение вполне четкое и ясное. Что же придало ему такую наглядность и убедительность?

То, что в основу вывода положены две строгие математические зависимости.



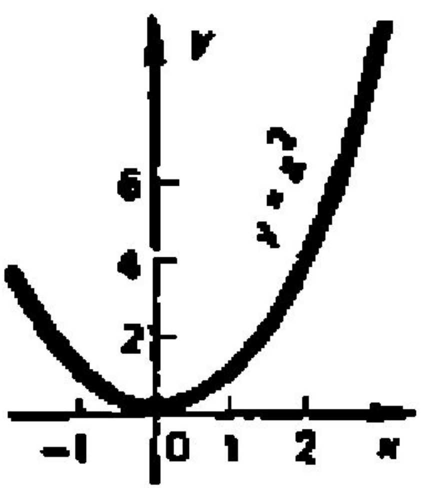
Первая устанавливает соответствие между размерами подобных тел и их объемами: объем изменяется, как куб размера (скажем, если ребро куба удлинилось вдвое, то его объем — проверьте! — увеличился в восемь раз: $2^3 = 8$). Вторая связывает размеры подобных фигур и их площади:

площадь изменяется, как квадрат размера (если вдвое увеличивается сторона квадрата, площадь его возрастает вчетверо: $2^2 = 4$).

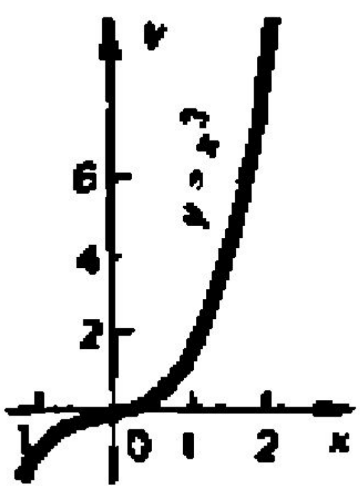
Степенная функция $y=x^n$

Список функций

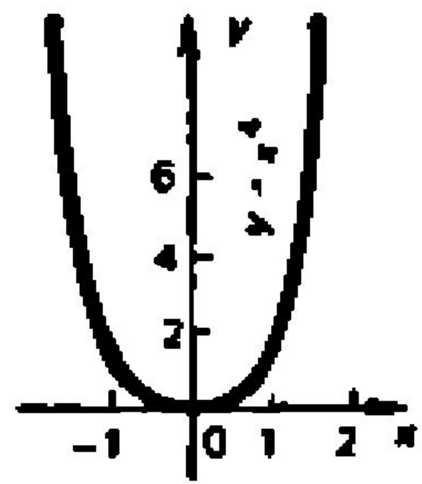
Поясним графиками те функциональные зависимости, которые в своих рассуждениях о размерах животных использовал Галилей, — квадратичную и кубичную.



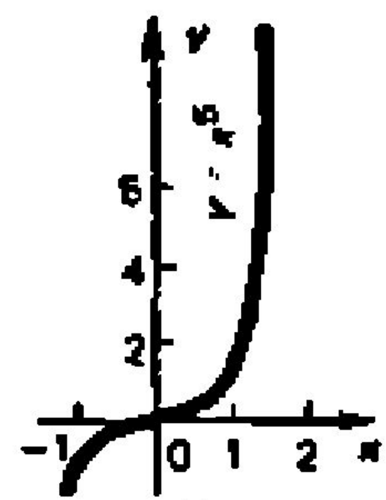
Парабола
2 степени



Парабола
3 степени



Парабола
4 степени



Парабола
6 степени

Степенная функция с натуральным показателем $y=x^n$, где n-натуральное число.

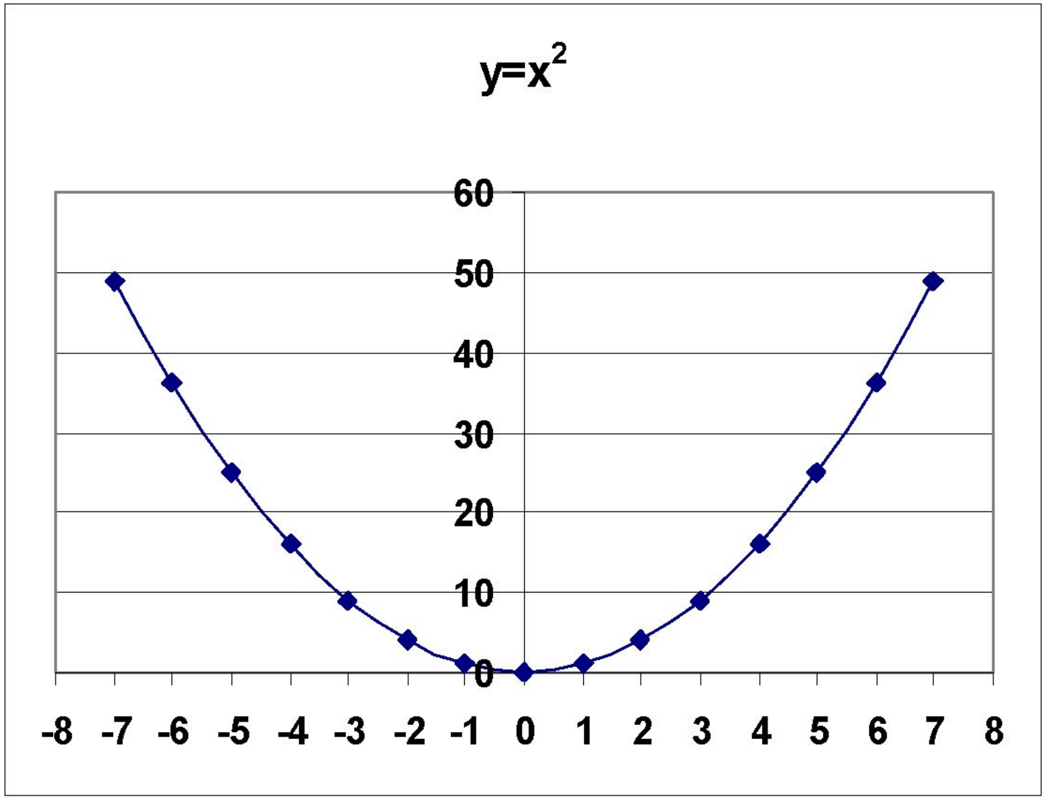
График функции:

- a) Если n=2, то графиком функции $y=x^2$ является квадратичная парабола;
- b) Если n = 3, то функция задана формулой $y = x^3$. Ее графиком является кубическая парабола;
- c) Если n— нечетное натуральное число, причем $n \neq 1$, то функция обладает свойствами теми же, что и $y = x^3$.

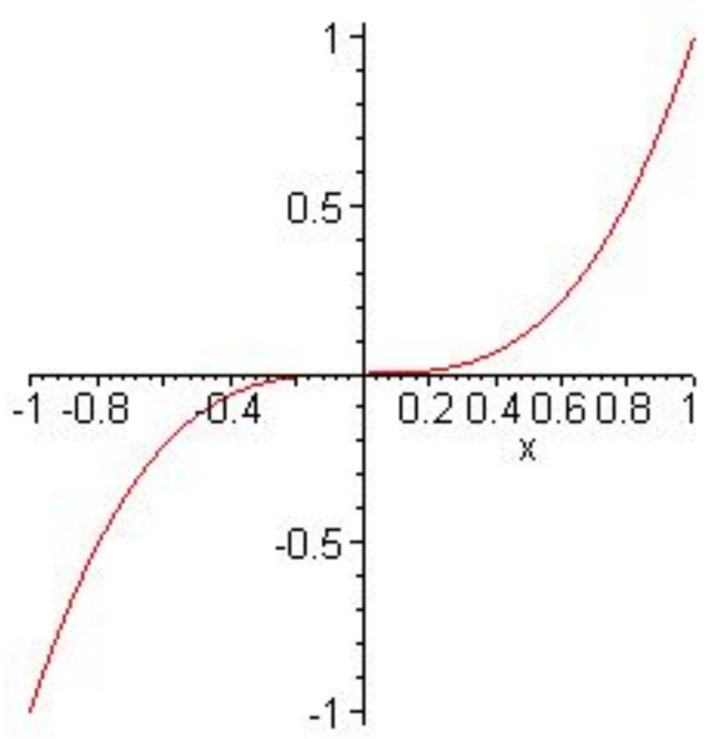
Степенная функция

Список функций

- а)



ь) $y = x^3$.



- Функция f(x) называется четной, если область её определения X есть множество, симметричное относительно начала координат, и при любом x из X имеет место равенство $f(-x)= f(x)$.
- График четной функции симметричен относительно оси Oy.
- Функция f(x) называется <u>нечетной</u>, если область её определения X есть множество, симметричное относительно начала координат, и если при любом x из X имеет место равенство $f(-x)= - f(x)$.
- График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

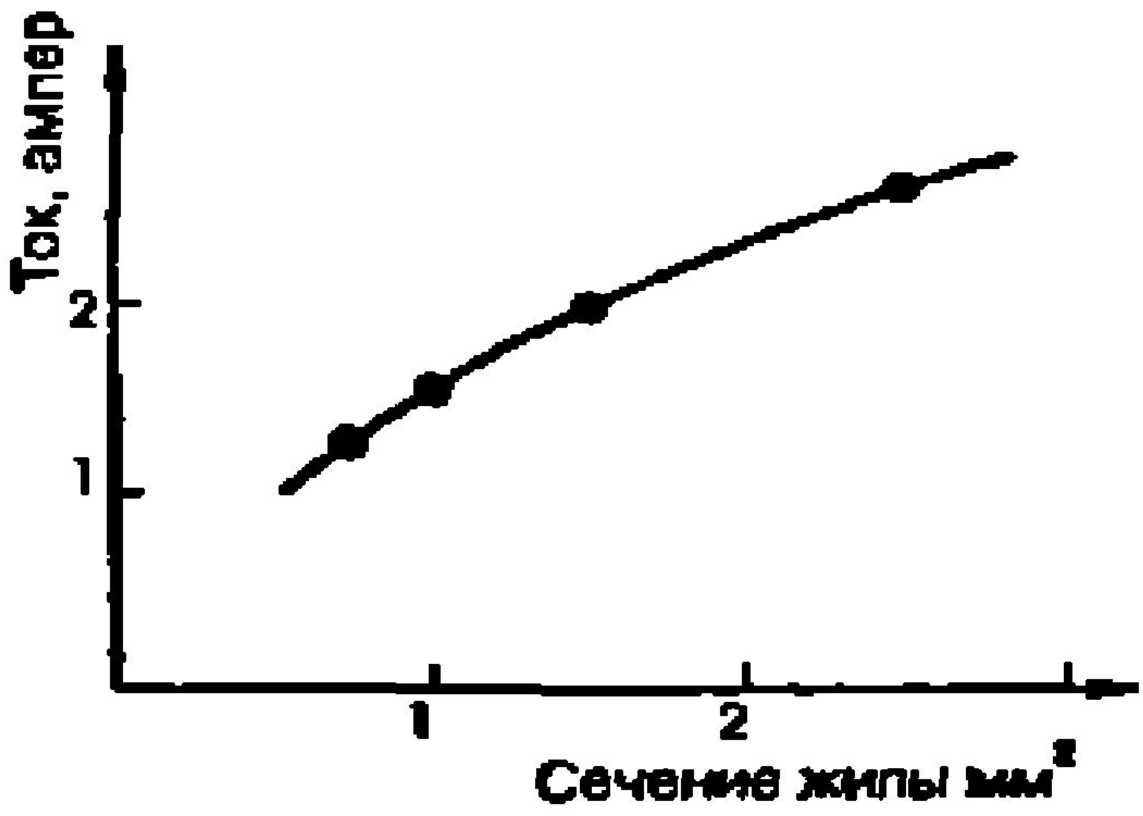
Рассмотрим свойства степенной функции с нечетным показателем $n \neq 1$:

- 1. Область определения функции: D(f)= R;
- 2. Область значений: E(f)= R;
- 3. Функция является нечетной, т.е. f(-x)= - f(x);
- 4. Нули функции: y = 0 при x = 0;
- 5. Функция возрастает на всей области определения.
- 6. График функции: [б]

Рассмотрим свойства степенной функции с четным показателем:

1. Область определения функции: D(f)= R;
2. Область значений [0,+∞];
3. Функция является четной, т.е. f(-x)=f(x);
4. Нули функции: y = 0 при x = 0;
5. Функция убывает на промежутке (-∞;0), возрастает на промежутке (0;+∞).
6. График функции: [a]

Сечение жилы, мм^2	0,75	1	1,5	2,5
Максимально допустимый ток, ампер	13	15	20	27


Ток, ампер
2
1
1
2
Сечение жилы мм²

Степенная $y=x^{1/2}$ радикал

Список функций

Чем дальше в лес, тем больше дров

Монотонно возрастающая функция

Чем дальше в лес, тем больше дров

Кашу маслом не испортишь

Известны слова Ньютона «Я рассматриваю... математические количества не как состоящие из очень малых постоянных частей, а как производимые непрерывным движением».

Отвечая этому требованию, математика разработала систему вещественных чисел (под таким названием объединяются числа целые, дробные и иррациональные). Вещественные числа — совокупность непрерывная, и потому оказалось возможным изображать их точками прямой линии. С легкой руки Декарта функциональные зависимости стали изображать графиками на координатной плоскости. Так математика привыкла дополнять понятие функции неявным предположением о непрерывности аргумента.

А между тем математическое определение функции вовсе не требует этого. И потому оно общезначимо для всей математики.

Собственно говоря, в определении функциональной зависимости не требуется и того, что ею должны связываться только количества. Но традиция сильна и тут: если соответствие устанавливается не между числами, математик предпочитает слову «функция» слово «отображение». У этой традиции тоже есть свои корни.

Математика исстари обслуживает науки, которые выражают результаты в числах: механику, физику, химию. «Измерить все измеримое и сделать измеримым все, что пока не поддается измерению», — эти слова Галилея сделало своим девизом все точное естествознание. Не удивительно, что учение о функциях развивалось по преимуществу как учение о функциях непрерывной числовой переменной. Именно на этом пути оно пришло к одному из наиболее значительных своих достижений — дифференциальному и интегральному исчислению.

График, построенный по данным «Энциклопедии домашнего хозяйства», побуждает нас обратиться к читателю еще с одним призывом к бдительности. В разговоре о проводах и протекающих по ним токам отчетливо ощущается то, что философы зовут причинно-следственной связью. Ток, величина которого рассматривалась нами как аргумент, есть причина нагрева проводов, степень которого рассматривалась как функция.

Подобное характерно для большинства расхожих примеров функциональной зависимости: функция является выражением некоторого следствия, причину которого выражает аргумент, И тем не менее не следовало бы возводить такое представление в абсолют. Такая трактовка сужает понятие функции. Функциональная зависимость — не обязательно зависимость причинно-следственная.

Есть причинно-следственная связь?

.

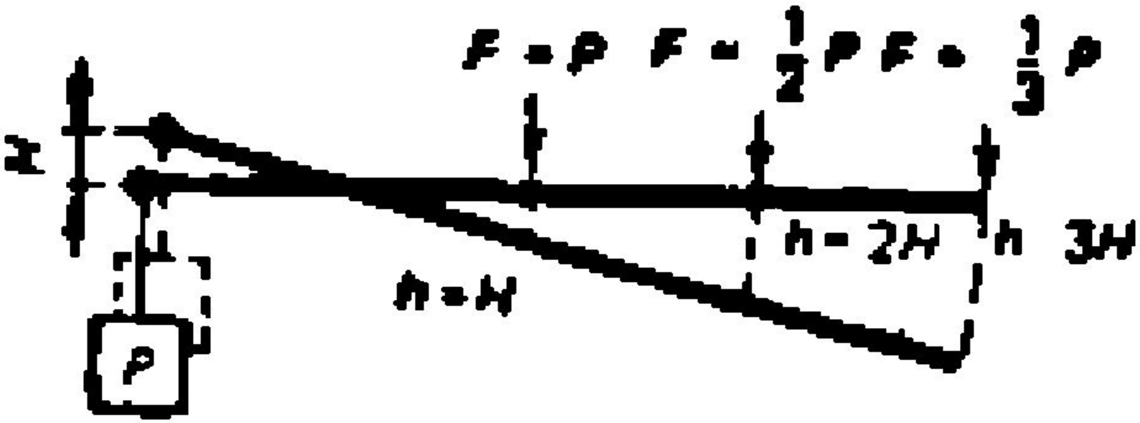
В большом многоквартирном доме номеру каждой квартиры можно поставить в соответствие число людей, в ней проживающих. И это будет функциональная зависимость, вполне отвечающая ее каноническому определению, хотя ни о каких причинах и следствиях здесь говорить не приходится. Номер квартиры никоим образом не определяет численность проживающей в ней семьи.

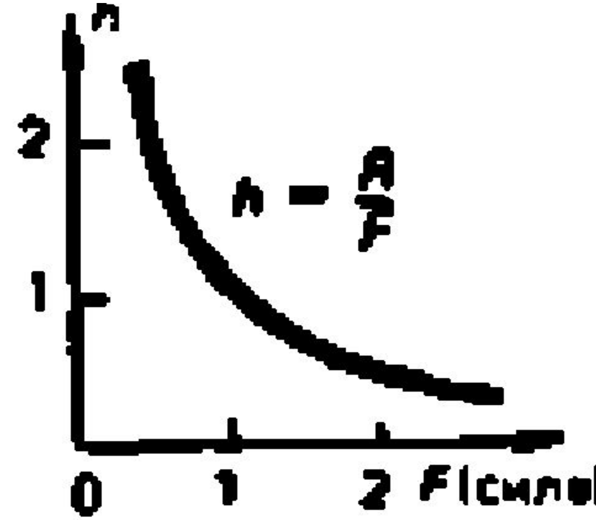
- Вся богатейшая семья механизмов» окружающих современного человека, начиналась когда-то с 7 простых машин.

Древние знали

1. рычаг,
2. блок,
3. клин,
4. ворот,
5. винт,
6. наклонную плоскость,
7. зубчатые колеса.

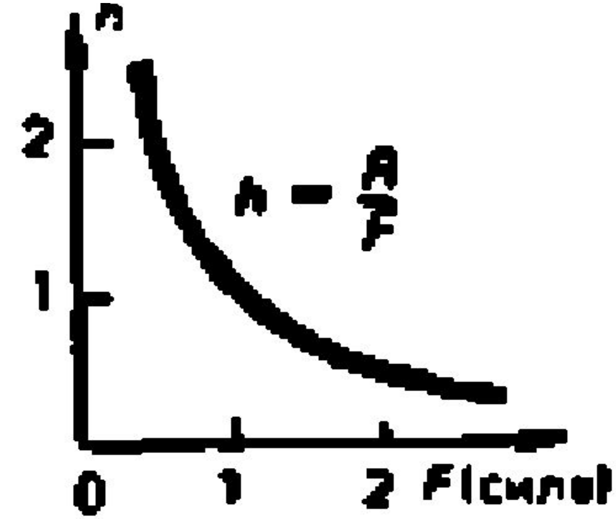
Эти нехитрые по теперешним представлениям устройства умножали силу человека.





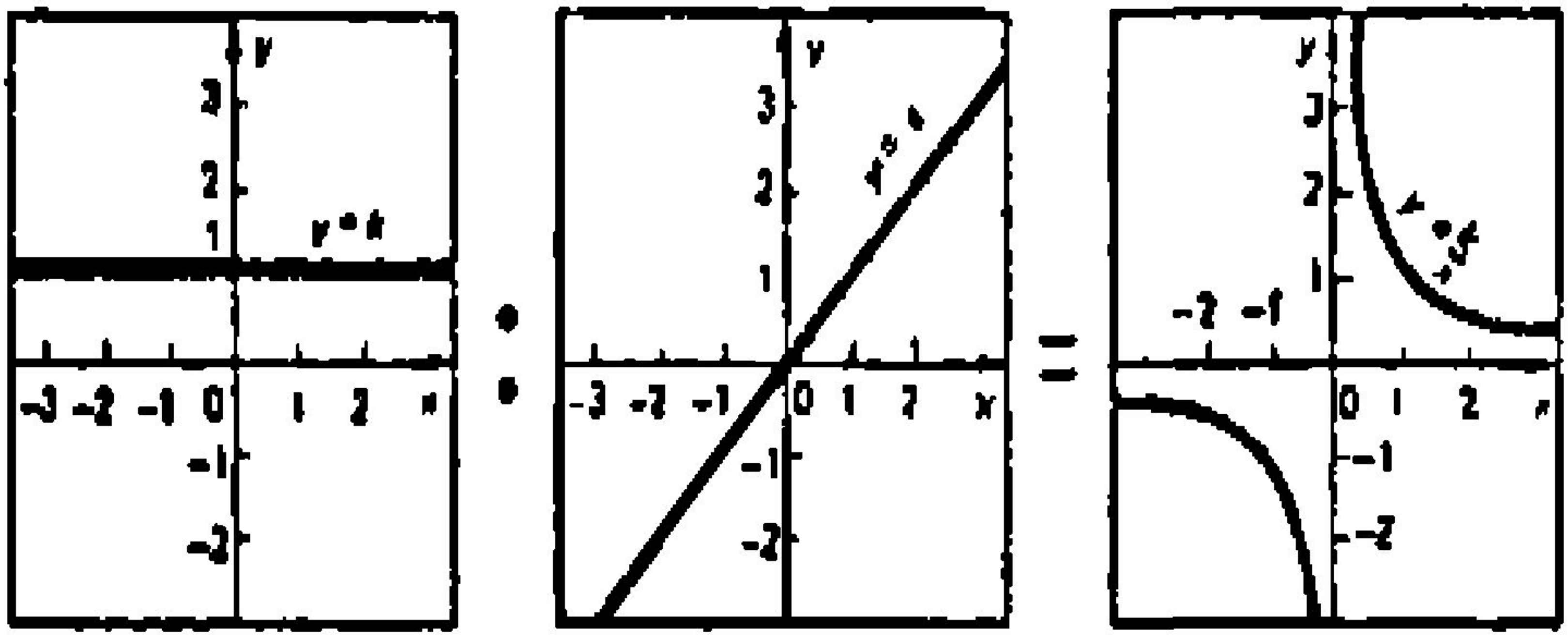
Но... во сколько раз выиграешь в силе — во столько же раз проиграешь в расстоянии. Так гласит золотое правило механики, заключающее в себе теорию семи простых машин.

График на этом слайде есть наглядное выражение знаменитого правила. По горизонтальной оси отложена сила, с которой, например, нужно давить на плечо рычага, чтобы поднять заданный груз на заданную высоту, по вертикальной — расстояние, которое пройдет при этом точка приложения силы.



Хотите обойтись силой, например, вдвое меньшей, чем вес груза, — будьте готовы к тому, что эта точка опустится на вдвое большее расстояние, чем высота подъема груза. Троекратный выигрыш в силе влечет за собой троекратный проигрыш в расстоянии и так далее. Линия, выражающая такую функциональную зависимость, называется гиперболой.

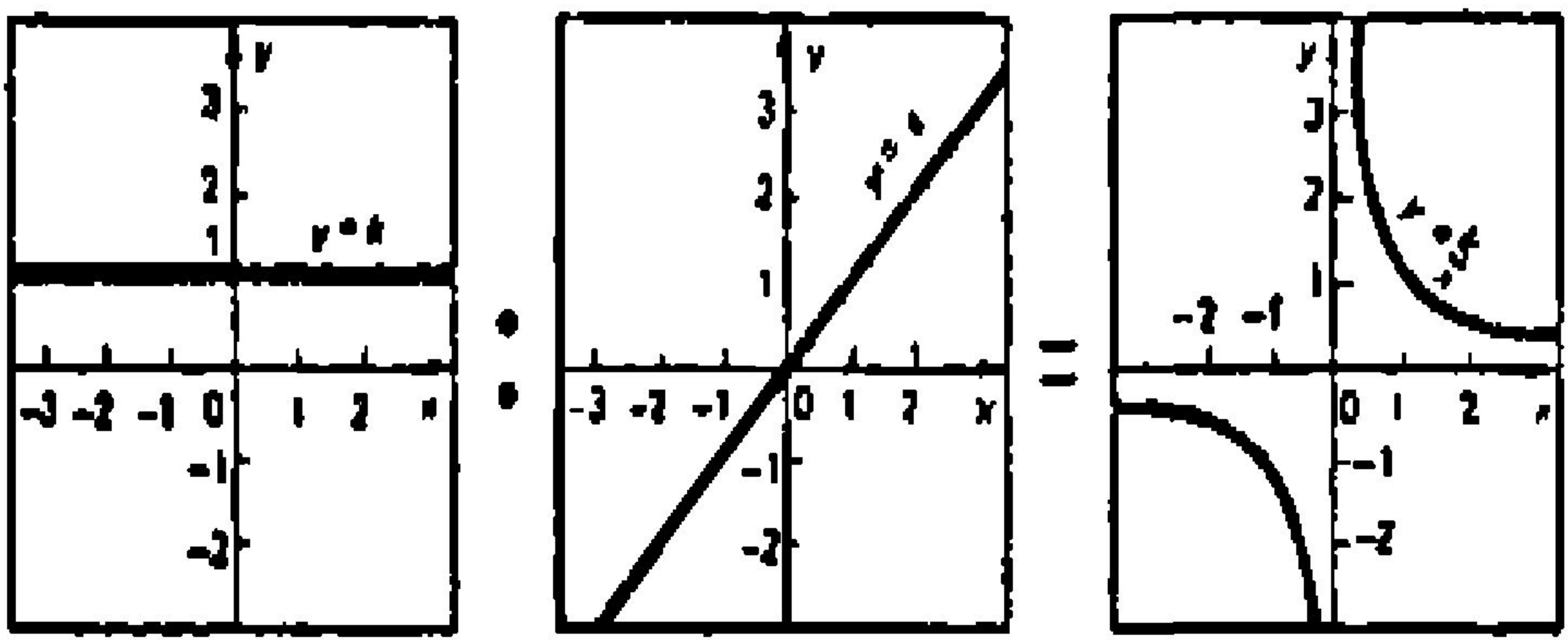
Если отвлечься от механической сущности графика, то в чистом виде останется выражение обратной пропорциональности. Именно в соответствии с ней хозяйка делит пирог между гостями. Чем больше гостей — тем меньше порции.



простейшей линейной функции, константы, на чуть более сложную линейную функцию, выражающую прямую пропорциональную зависимость.
Обе эти функции, как мы знаем, простираются и в область отрицательных значений аргумента. Учтя это, достроим график гиперболы до полного вида. На нуль, правда, делить нельзя, так что в нуле гипербола не определена, в ее область определения эта точка не входит.

Степенная $y=k/x=kx^{-1}$

Список функций



гипербола

Факт обратной пропорциональной зависимости можно выразить и иначе, сказав, что связанные ею величины в произведении дают постоянную. Вспомним примеры из предыдущего раздела — скажем, пример с тортом. Когда число гостей росло, вес порции уменьшался; произведение же этих двух величин оставалось равным постоянному весу торта. А пример с радиоприемником? Произведение длины радиоволны на ее частоту всегда равно скорости света.

Показательная функция

Сейчас много говорят об информационном буме. Поток информации захлестывает: утверждают, что ее количество удваивается каждые 10 лет.

Изобразим этот процесс наглядно, в виде графика некоторой функции.

Примем объем информации в некоторый год за единицу. Поскольку эта величина послужит нам началом дальнейших построений, отложим ее над началом координат, в которых будет строиться график, по вертикальной оси. Отрезок, вдвое больший, восставим над единичной отметкой горизонтальной оси, считая, что эта отметка соответствует первому десятку лет.

Еще вдвое больший отрезок восставим над точкой «2», соответствующей второму десятку, еще вдвое больший — над точкой «3»... Декада за декадой — избранные нами значения аргумента выстроятся по горизонтальной оси в порядке равномерного нарастания, по закону арифметической прогрессии: 1, 2, 3, 4... Значения функции отложатся над ними, возрастая каждый раз вдвое, — по закону геометрической прогрессии: 2, 4, 8, 16… (Нетрудно заметить, что эти числа представляют собой последовательные степени двойки — первую, вторую, третью, четвертую и так далее.- 2^1, 2^2, 2^3, 2^4…)

А что если посмотреть, как нарастал поток информации до того года, который принят за начальный? Столь же равномерно, откладывая единицу за единицей, пройдемся по оси абсцисс влево от начала координат и над отложенными значениями аргумента будем наносить на график значения функции уже в порядке убывания — вдвое с каждым шагом.

Теперь соединим все нанесенные точки непрерывной гладкой линией — ведь количество информации нарастает от десятилетия к десятилетию плавно, а не скачками. Перед нами график так называемой показательной функции. Как же определяется эта функциональная зависимость?

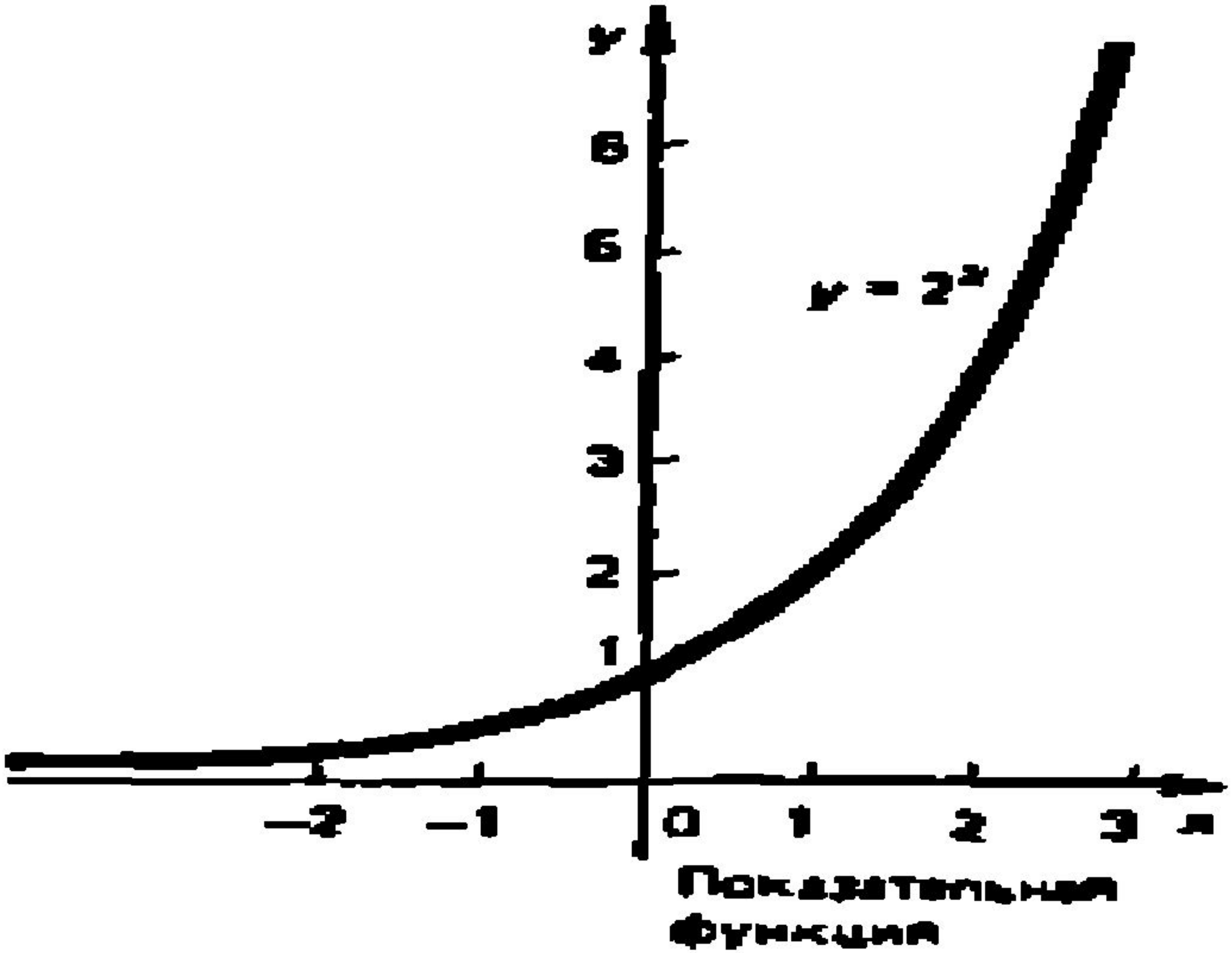
По пути к строгой ее формулировке мы предлагаем, поразмышлять над вопросом: во сколько раз нарастает объем информации за пятнадцать лет, если за декаду он увеличивается вдвое?

Пятнадцать лет — это полторы декады.

Стало быть, ответ на поставленный вопрос дает высота построенной нами кривой в точке с абсциссой «полтора»: примерно в 2,83 раза. А теперь обратите внимание: абсциссе «1» на графике соответствует первая степень двойки, абсциссе «2» —вторая степень, абсциссе «т3» —третья,.. Логично заключить отсюда, что число 2,83 есть двойка в степени полтора.

Показательная функция

Список функций



Показательная функция

Точно таким же образом график укажет нам любую другую степень двойки — целую или дробную, положительную или отрицательную. Для этого стоит лишь отложить показатель степени на оси абсцисс и измерить в этой точке высоту кривой.

Итак, каждое значение нашей функции есть двойка в степени, равной соответствующему значению аргумента. Так и определяется показательная функция.

Число, возводимое в степень (в нашем примере им служила двойка), называется ее основанием.

И еще один термин: график показательной функции именуется показательной кривой. Иногда эту линию называют экспонентой (от латинского «exponere»— «выставлять напоказ»). Многим этот термин знаком по расхожему словосочетанию «экспоненциальный рост, выражающему наиболее броскую черту показательной кривой, — ее безудержно крутой взлет.

Примеры подобного роста подыскать нетрудно. Показательная функция непременно встречается при математическом описаний таких процессов, в которых скорость изменения некоторого количества в каждый момент пропорциональна самому количеству.
По такому правилу размножается все живое: приплод пропорционален достигнутой численности. По закону все более крутого, экспоненциального роста увеличивается колония микробов в чашке Петри. По такому же закону плодились кролики, за короткий срок заполнившие Австралию.

Природа знает и примеры экспоненциального спада, когда скорость убывания некоторого количества в каждый момент пропорциональна остатку (а стало быть, уменьшается вместе с ним; в этом — характерная черта экспоненциального спада).

Показательная функция

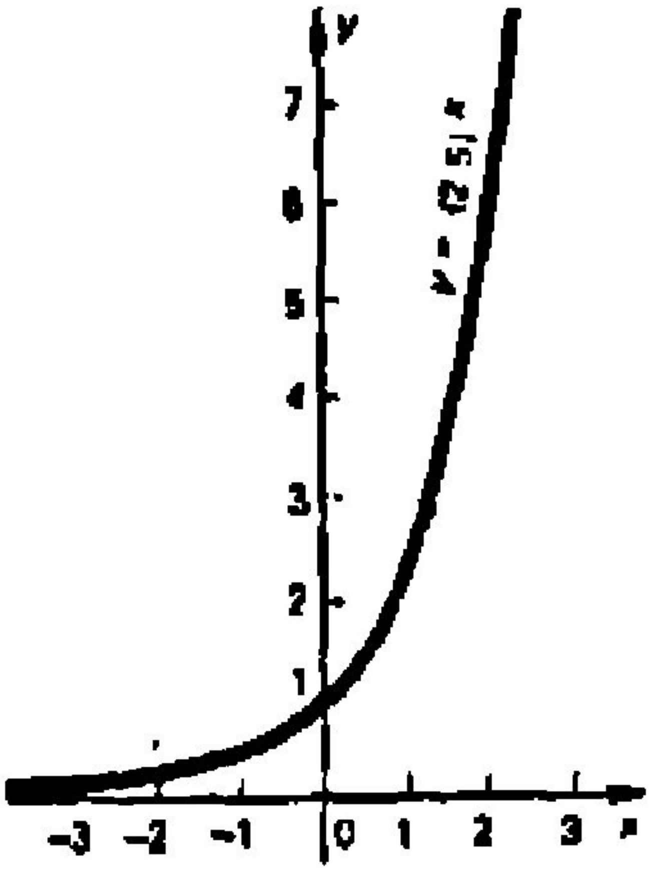
Когда аргумент изменяется по закону арифметической прогрессии, функция изменяется по закону геометрической прогрессии (на сей раз убывающей). А в этом — определяющая особенность показательной функции.

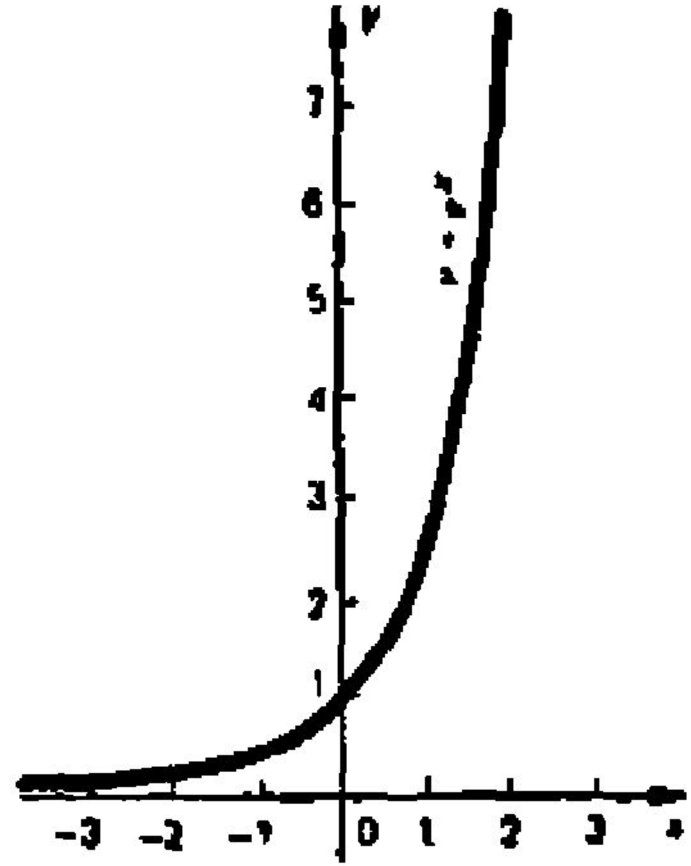
Заметим некоторую неполноту, узость нашего описания показательной функции.

Строя ее график за разговором об информационном буме или радиоактивном распаде, мы каждый раз разбивали горизонтальную ось координат на отрезки равной длины и над засечками расставляли точки так, чтобы каждая последующая располагалась вдвое выше или вдвое ниже предыдущей.

Ну а если бы количество информации возрастало с каждым десятилетием не в два, а, скажем, в два с половиной раза? И соответственно по такому же закону изменялась бы высота точек, наносимых на координатную плоскость. Что, в результате получился бы график уже не показательной функции?

Показательной. Но только с другим основанием, равным 2,5. Новый график, в общих чертах напоминая прежний, устремлялся бы ввысь уже с несколько большей скоростью.


y
7
6
5
4
3
2
1
−3
−2
−1
0
1
2
3


y
7
6
5
4
3
2
1
−3
−2
0
1
2
3

Всмотритесь в него: высота кривой над делениями горизонтальной оси равна последовательным степеням числа два с половиной: минус первая его степень равна четырем десятым, нулевая—-единице, первая — двум с половиной, вторая — шести с четвертью и т.д.

Беря в качестве основания все новые положительные числа, мы получали бы все новые показательные функции. Не стоило бы только назначать на роль основания единицу — ведь она остается собой при возведении в любую степень, так что показательная кривая выродилась бы в горизонтальную прямую. Но есть среди всех чисел такое, которое чаще всех прочих служит основанием показательной функции. Это — число е, равное 2,71828.,. Выбор пал на него о силу важных его достоинств, распространяться о которых мы пока не имеем возможности. Так что если в разговоре о показательной функции ее основание не указывается, знайте, что им служит число е.

Показательная функция $y = a^x$

- Область определения функции: $-\infty < x < +\infty$
- Множество значений функции: $0 < y < +\infty$
- Функция ни четная, ни не чётная, так как $f(-x) = a^{-x}$
- Горизонтальная асимптота $y = 0$
- Если $0 < a < 1$, то функция убывает на промежутке $-\infty < x < +\infty$ (на рис.1)
- Если $a > 1$, то функция возрастает на промежутке $-\infty < x < +\infty$ (на рис.2);
- Точка (0; 1) – единственная точка пересечения с осями координат.

Показательная функция $y = a^x$

0<a<1 a>1

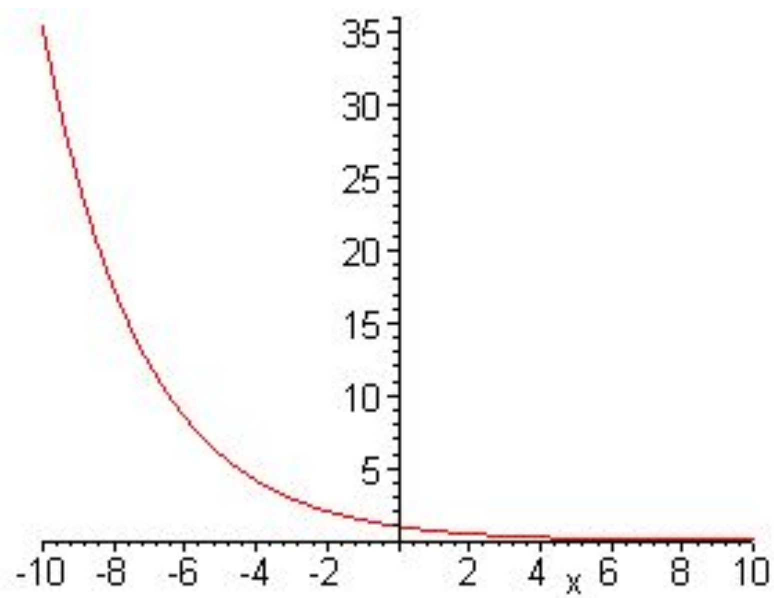


рис.1

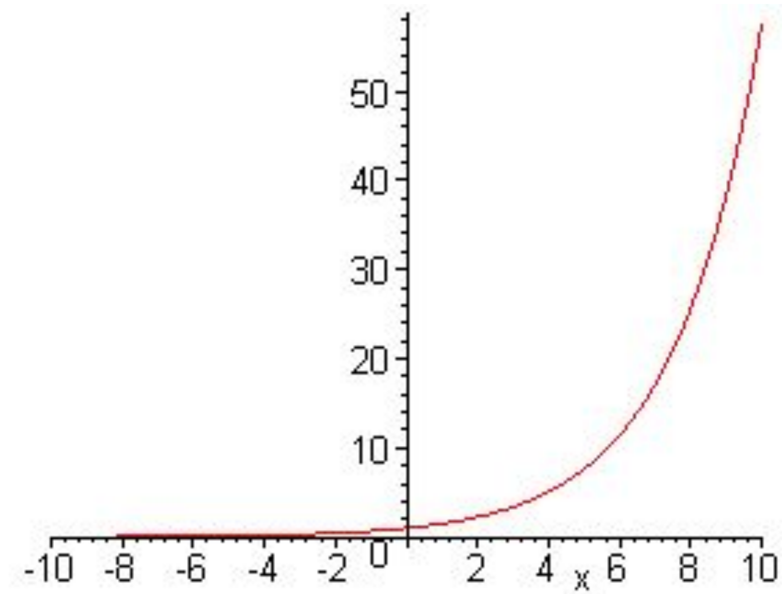


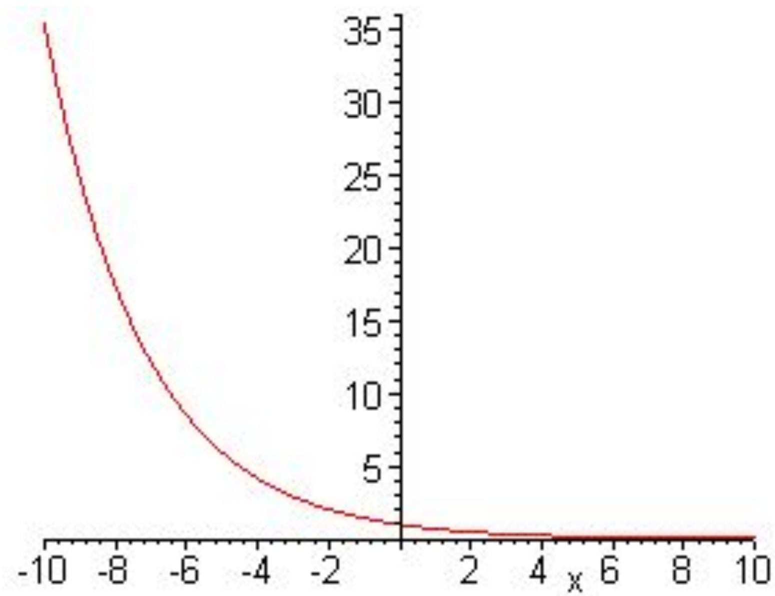
рис.2

Список функций

Показательная функция $y = a^x$

$0<a<1$

Мера греха



Дальше кумы - меньше греха

Монотонно убывает

Расстояние от кумы

рис.1

Список функций

Сколько звезд на небе?

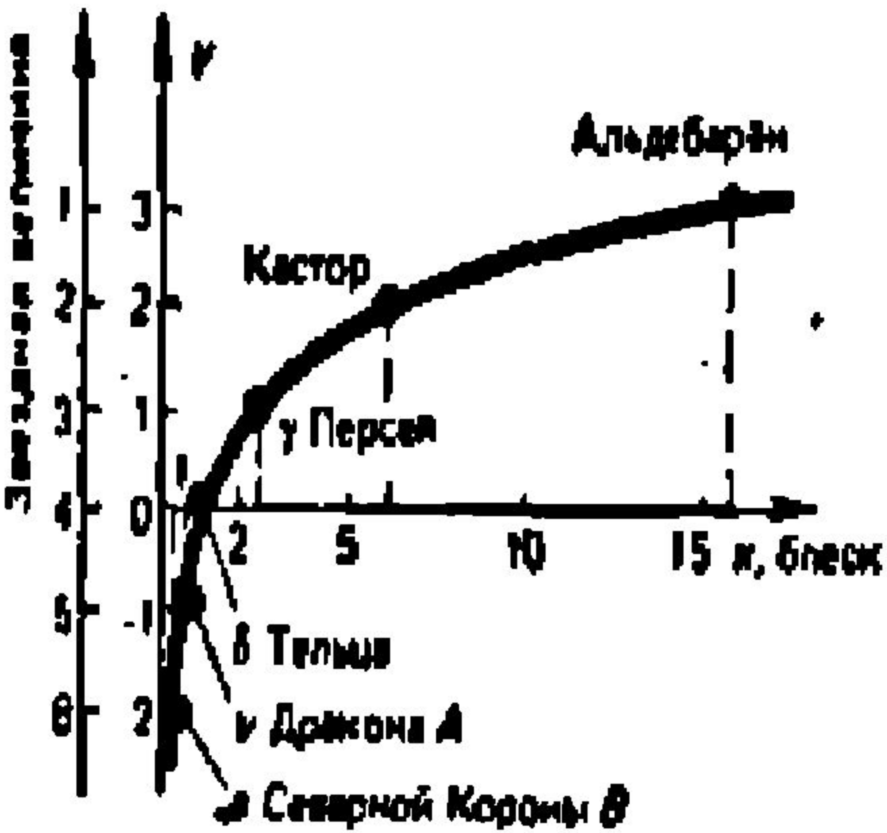
Одним из первых, кто попытался точно ответить, на этот вопрос, был древнегреческий астроном Гиппарх. При его жизни в созвездии Скорпиона вспыхнула новая звезда. Гиппарх был потрясен: звезды смертны, они, как люди, рождаются и умирают. И чтобы будущие исследователи могли следить за возникновением и угасанием звезд» Гиппарх составил свой звездный каталог. Он насчитал около тысячи звезд и разбил их по видимому блеску на шесть групп. Самые яркие Гиппарх назвал звездами первой величины, заметно менее 'яркие — второй, еще столь же менее яркие—третьей и так далее в порядке равномерного убывания видимого блеска — до звезд, едва видимых невооруженным глазом, которым была присвоена шестая величина.

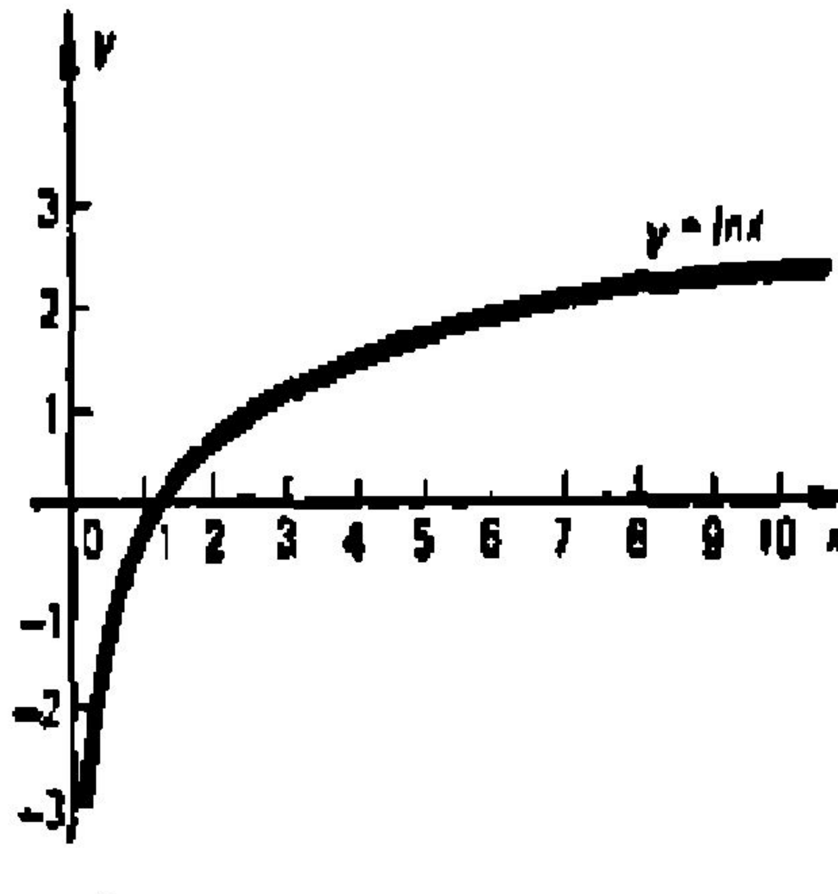
Когда ученые получили в свое распоряжение чувствительные приборы для световых измерений, стало возможным точно определять блеск звезд. Стало возможным сравнить, насколько соответствует данным таких измерений традиционное распределение звезд по видимому блеску, произведенное на глаз.

Оценки того и другого рода сведем на одном графике.

От каждой из 6 групп, на которые звезды распределил Гиппарх, возьмем по одному типичному представителю. По вертикальной оси, будем откладывать блеск звезды в единицах Гиппарха, то есть ее звездную величину, по горизонтальной — показания приборов. За масштабную единицу горизонтальной оси примем блеск звезды «бета Тельца», стоящей посредине в ряду представителей звездного сонма.

Список функций





Сразу же бросается в глаза: отметки на горизонтальной оси располагаются неравномерно. Объективные (прибор) и субъективные (глаз) характеристики блеска не пропорциональны друг другу.

С каждым шагом по шкале звездных величин прибор регистрирует возрастание блеска не на одну и ту же величину, как могло бы показаться, а примерно в два с половиной раза. Образно говоря, глаз сравнивает источники света по блеску, задаваясь вопросом «во сколько раз?», а не вопросом «на сколько?». Мы отмечаем не абсолютный, а относительный прирост блеска. И когда нам кажется, что он возрастает или убывает равномерно, в действительности мы шагаем по его шкале все более размашистыми шагами, покрывая при этом поистине гигантский диапазон: в миллион миллионов раз различаются по блеску источники света, самый слабый и самый мощный, воспринимаемые человеческим глазом.

По тому же закону мудрая природа проградуировала и наш слуховой аппарат. И оттого диапазон звуков, внятных человеческому уху — от шелеста листвы до раскатов грома над головой, — почти столь же широк.

Кстати сказать, именно в силу описанной физиологической особенности звезды, ярко горящие на ночном небе, не видны днем, тонут в ослепительном блеске солнца, рассеянном по небосводу. И там и здесь сияние звезд дает одну и ту же добавку к свету фона. Однако в первом случае (ночью) эта добавка велика по сравнению с мерцанием неба, во втором же (днем) составляет весьма незначительную долю от солнечного блеска весьма незначительную долю от солнечного блеска (менее чем миллиардную даже для самых ярких звезд}.

Оттого и гаснут звезды в лунах утренней зари.

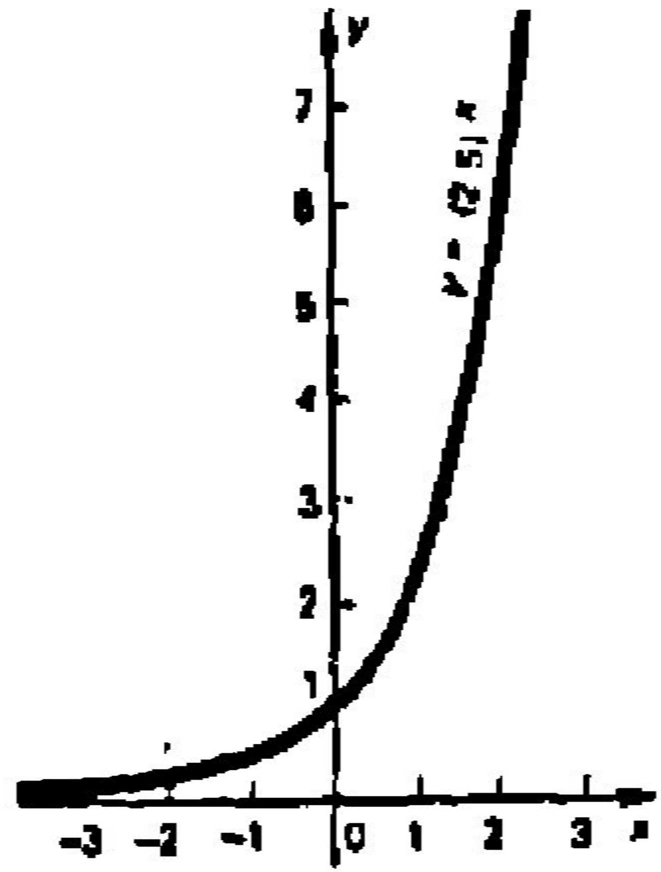
Оттого же и голос солиста, когда его пение подхватывает хор, тонет в многоголосом звучании.

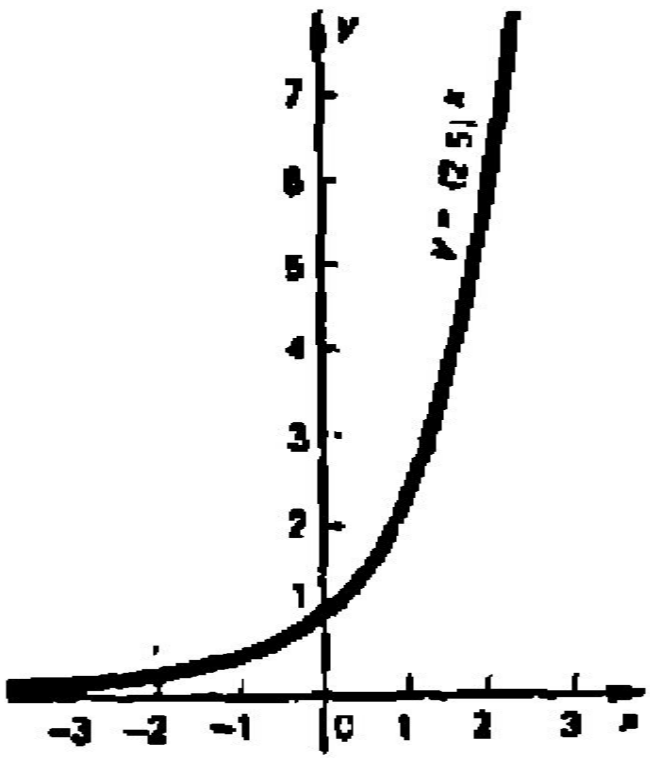
Суть функциональной зависимости, описанной нами на примере зрения и слуха, в том, что возрастанию аргумента в одно и то же число раз всегда соответствует одно и тоже приращение функции. Когда аргумент меняется по закону геометрической прогрессии, функция меняется по закону арифметической.

Как же называется функция, с которой познакомились по звездному графику?

Прежде чем отвечать на этот вопрос, мы предложим несколько других. Вы без труда ответите на них, обратившись к первому из графиков, приведенных на слайде 51.

.





В какую степень нужно возвысить два с половиной, чтобы получить шесть с четвертью? Во вторую, отвечает график. А в какую степень нужно возвысить два с половиной, чтобы получить четыре десятых? В минус первую. А чтобы получить два с половиной? В первую. А единицу? В нулевую.

Число, которое нужно употребить показателем степени при указанном основании для того, чтобы получить заданное число, называется логарифмом заданного числа по указанному основанию.

Минус один, нуль, один, два — это логарифмы по основанию 2,5 для чисел 0,4; 1; 2,5; 6,25.

А теперь, не выпуская из памяти всю эту информацию, вернемся к нашему звездному графику. Вот точка с пометкой «ν Дракона А»: абсцисса — около четырёх десятых, ордината — примерно минус один. Вот точка «бета Тельца»: абсцисса — один, ордината — нуль. Точка «гамма Персея»: абсцисса — два с половиной, ордината — один. Точка «Кастор»: абсцисса — шесть с четвертью, ордината — два.

Итак, ординаты выделенных точек графика являются логарифмами абсцисс, взятыми по основанию два с половиной. Выраженная графиком функциональная зависимость заключается в том, что положительным числам ставятся в соответствие их логарифмы. Такую функцию естественно назвать логарифмической. А ее график именуют логарифмикой. В роли основания логарифмов встречаются различные положительные числа. На практике весьма употребительны десятичные логарифмы, основание которых равно десяти.

В теоретических исследованиях популярнее так называемые натуральные логарифмы, основанием которых служит уже знакомое нам число е. Теперь становится понятным общепринятое и, быть может, уже слышанное вами название этого числа: «основание натуральных логарифмов».

Кривая натурального логарифма, так называемая натуральная логарифмика, приведена на слайде 53 рядом со звездным графиком.

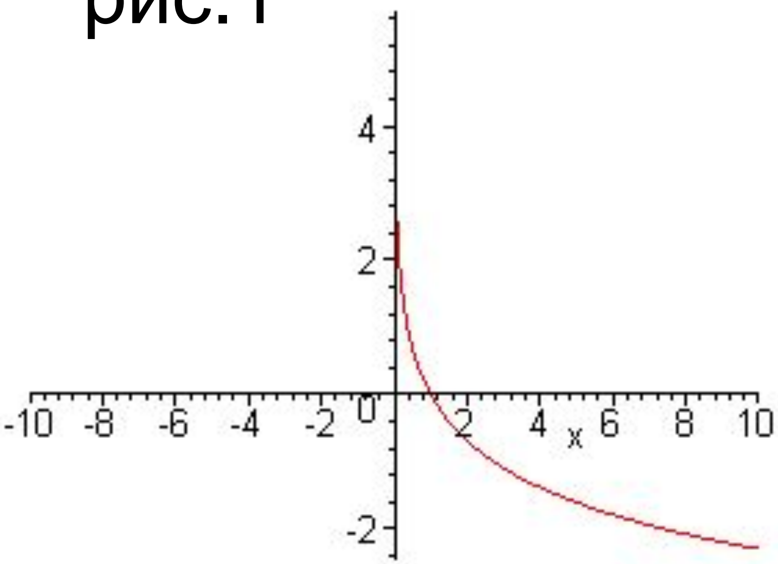
Логарифмическая функция

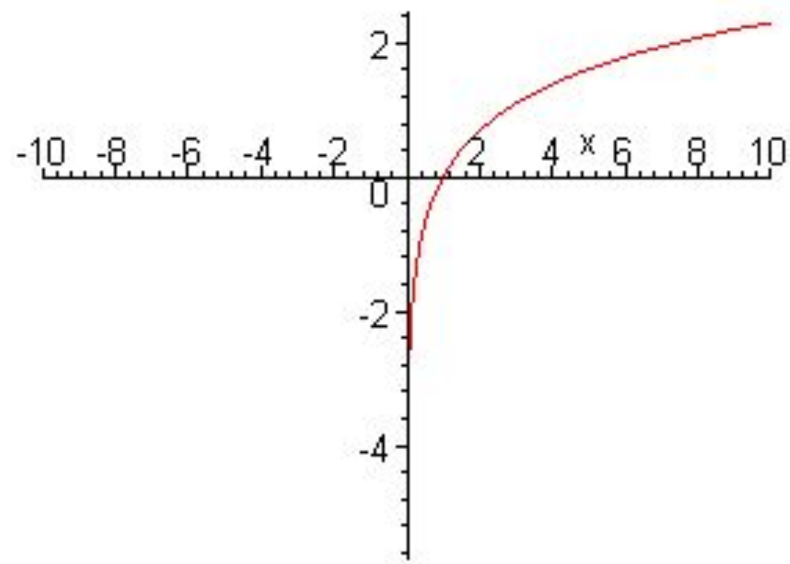
- Область определения функции: $0 < x < \infty$
- Множество значений функции: $-\infty < y < +\infty$
- Функция ни четная, ни нечетная, так как $f(-x) = \log_a(-x)$
- Вертикальные асимптоты $x = 0$
- Если $a > 1$, то функция возрастает на промежутке $0 < x < +\infty$ (на рис.2);
- если $0 < a < 1$, то функция убывает на этом же промежутке (на рис.1);
- Точка (1; 0) – единственная точка пересечения с осями координат.

Логарифмическая функция

рис.1

$a>1$



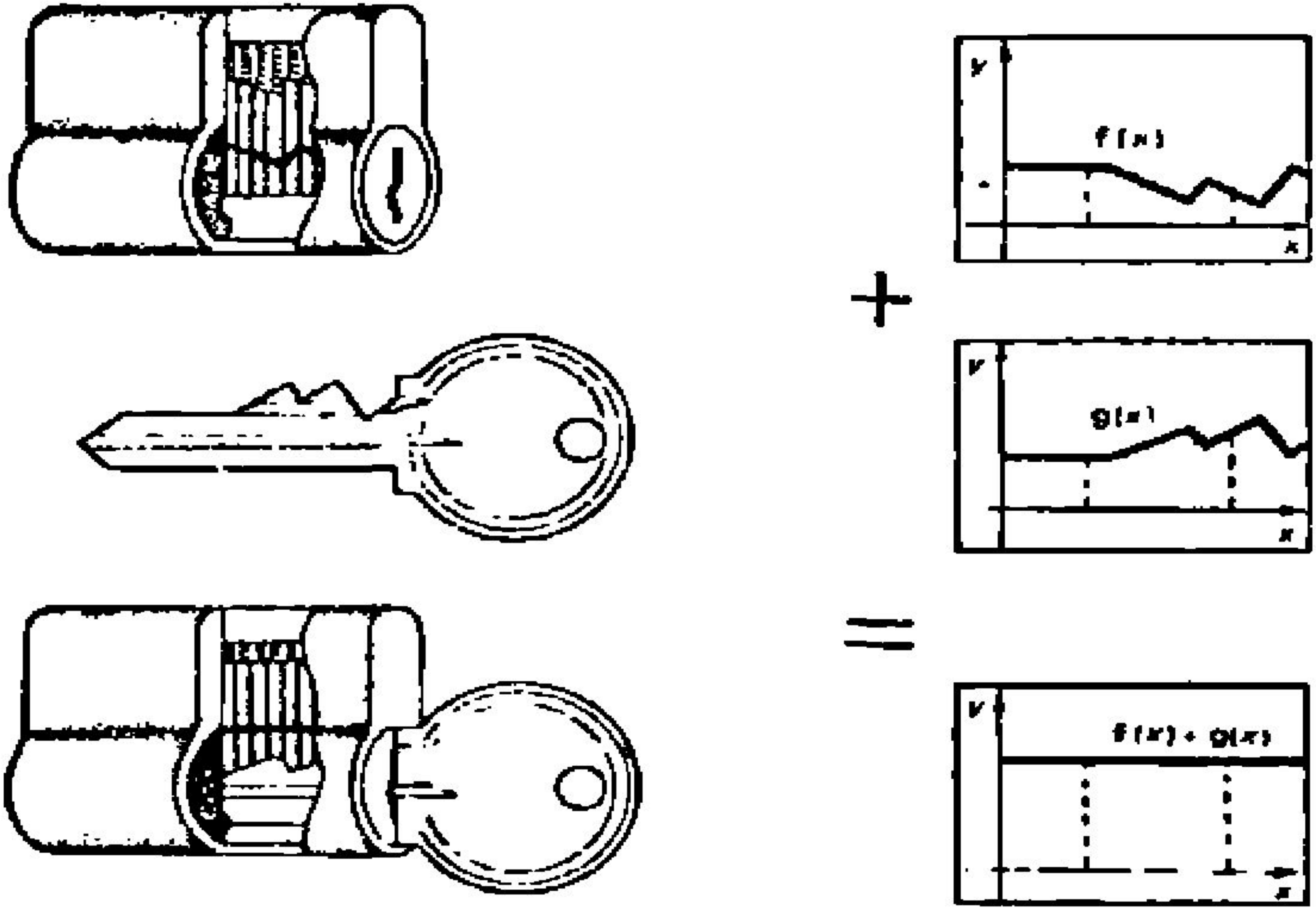


$0<a<1$

рис.2

Обратные функции

- Степенная функция и радикал
- Показательная и логарифмическая


f(x)
g(x)
f(x) + g(x)

Штифты в замочной скважине поднимает ключ, вдвигаемый в нее. При этом высота каждого штифта, будучи сложена с высотой профиля ключа в соответствующей точке, должна дать в сумме диаметр барабана. Только тогда он провернется.

Ну а причем здесь функции? С точки зрения математика, вся эта механика есть не что иное, как операция сложения двух функций. Одна из них — это профиль ключа. Другая —линия, очерчивающая верхние торцы штифтов, когда замок заперт.

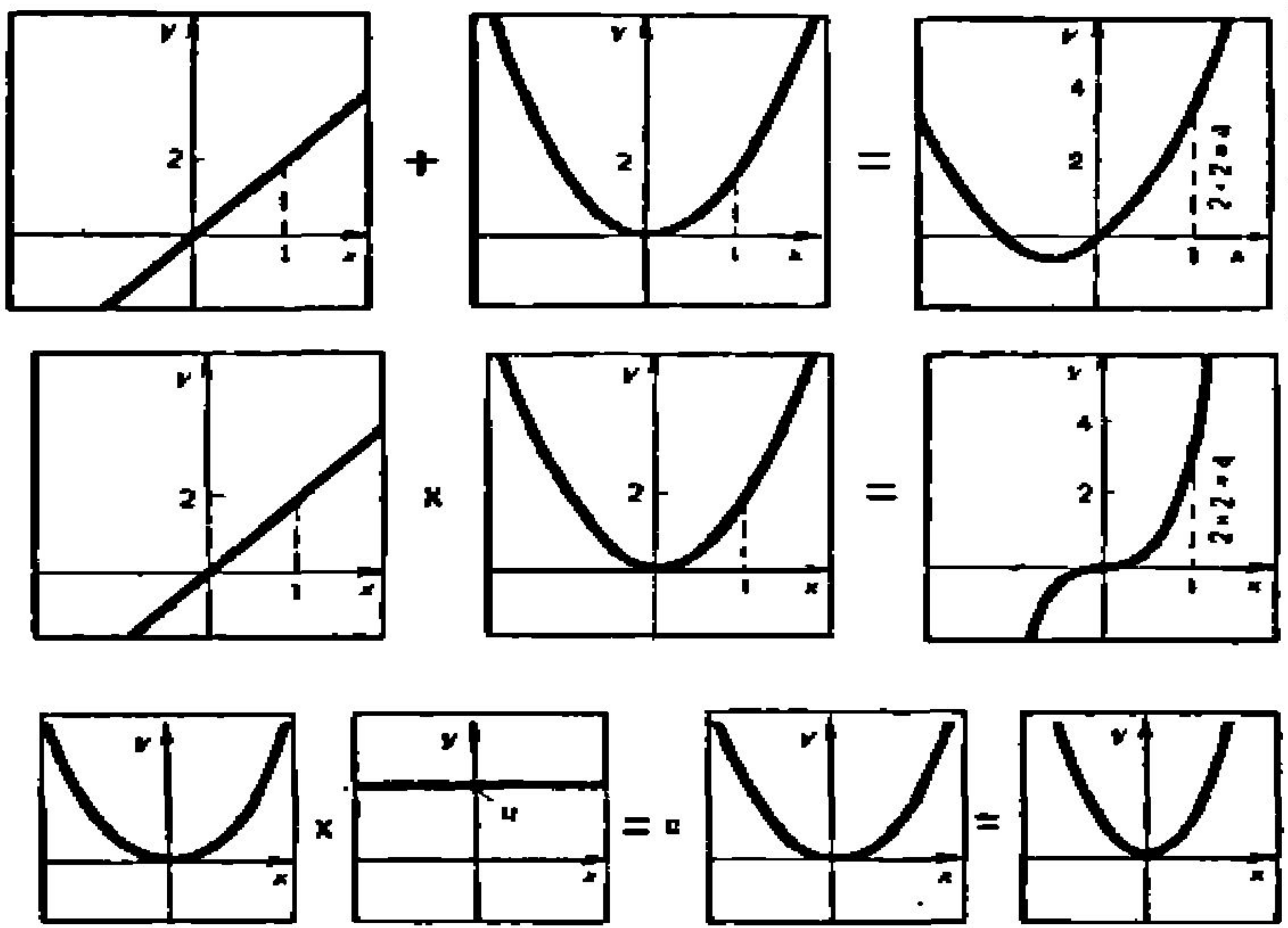
Операция сложения функций состоит в том, что в каждой точке из общей области их определения к значению одной функции прибавляется значение другой. Тем самым определяется, какое значение в данной точке имеет функция, называемая суммой двух исходных.

Секрет дверного замка в том, что в результате сложения двух функций, выраженных профилем ключа и строем штифтов, получается функция-константа, постоянное значение которой равно диаметру барабана.

Функции можно не только складывать, но и вычитать. При этом в каждой точке области их определения из значения одной функции вычитается значение другой.

Таким же образом происходит и перемножение функций: в каждой точке значение одной умножается на значение другой.

Заметим: если одна из перемножаемых функций представляет собой постоянную, то про другую в таком случае говорят, что ее умножили на постоянный коэффициент. Например, про функцию, выражающую прямую пропорциональность, можно сказать, что она получается в результате перемножения двух простейших линейных функций — той, которая равна своему аргументу, и постоянной, равной коэффициенту пропорциональности.

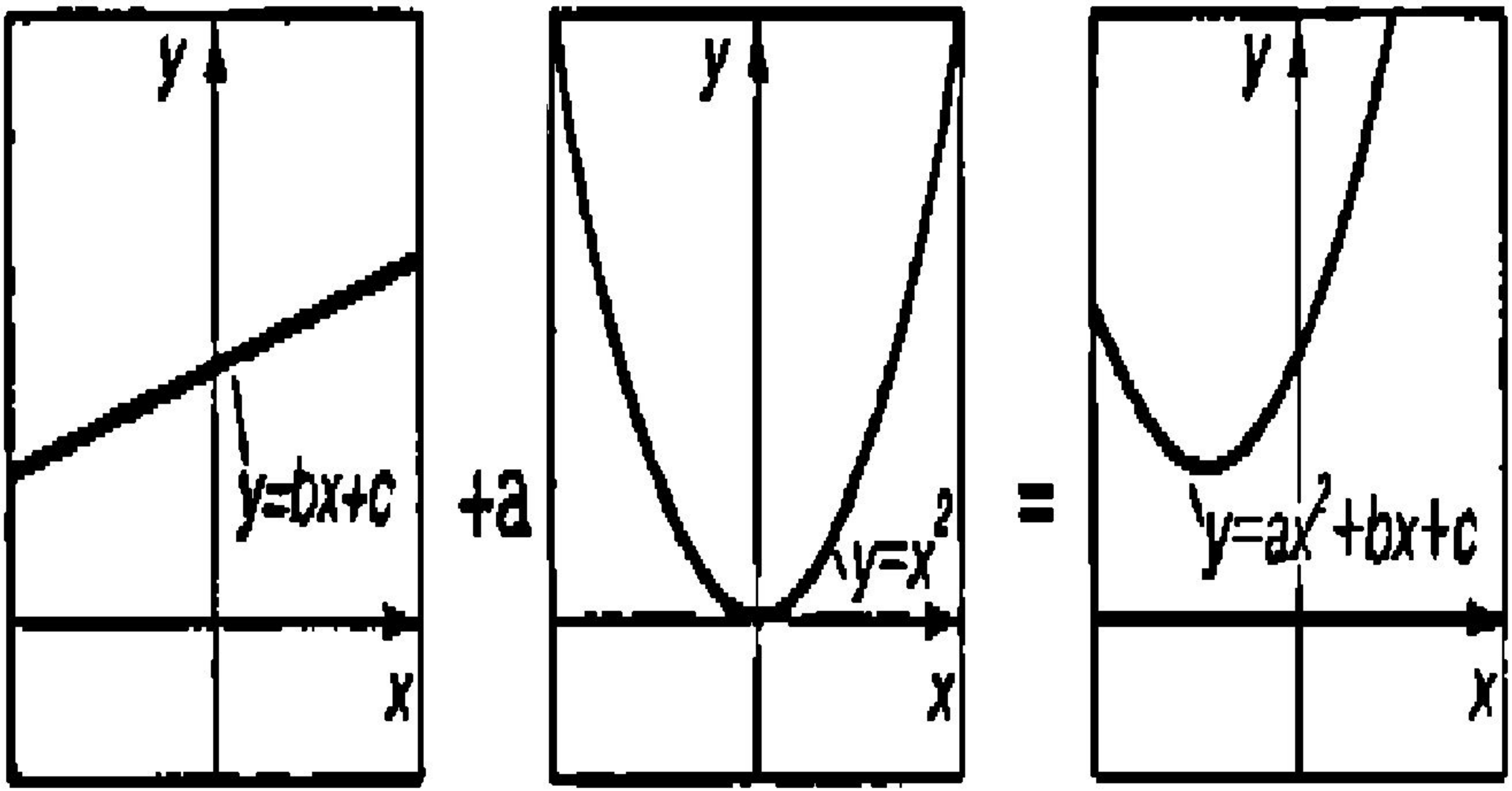

+
=
x
=
2
4

Сложение функций

Если линейную функцию самого общего вида умножить на постоянную, она сохранит свой линейный вид. Если сложить две произвольные линейные функции, получится опять-таки линейная функция.
А если к произвольной линейной функции прибавить параболу второй степени, умноженную на некоторый произвольный коэффициент? В итоге возникнет опять-таки парабола второй степени; правда, ее вершина при этом сместится, если первое из слагаемых, линейная функция, не константа. Формулой для такой «смещенной » параболы служит квадратный трехчлен самого общего вида.

Если складывать постоянную и линейную функции, параболы второй и более высоких степеней, то будут получаться функции, называемые полиномами.
В разговоре о конкретном полиноме принято указывать его степень. Она равна наивысшей из степеней парабол, которые были слагаемыми при образовании данного полинома. Поэтому, например, о квадратном трехчлене говорят как о полиноме второй степени, о линейной функции — как о полиноме первой, о постоянной — как о полиноме нулевой степени.
Такая терминология не случайна. На предыдущих примерах мы могли убедиться, что график полинома своей формой обязан параболе наивысшей степени, участвовавшей в его образовании. Так наклон графика линейной функции, полинома первой степени сохраняется, если к ней прибавить постоянную, полином нулевой степени, А если к ней прибавить полином второй степени, график станет параболой.

Сложение функций



- Функция f (x) называется **периодической,** если существует число $T \neq 0$ такое, что для любого значения x из области определения функции выполняется равенство $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$. Число T называется **периодом** функции. Если T – период функции, то её периодом является также число – T, так как $f(x-T) = f[(x - T) + T] = f(x)$.
- Если T – период функции, то её периодом будет также и число kT, где k – любое целое число (k=1, 2, 3; …). Действительно, $f(x \pm 2T) = f[(x \pm T) \pm T] =$

$= f(x \pm T) = f(x)$, $f(x \pm 3T) = f[(x \pm 2T) \pm T] =$

$= f(x \pm 2T) = f(x \pm 2T) = f(x)$;обычно под периодом функции понимают **наименьший** из положительных периодов, если такой период существует.

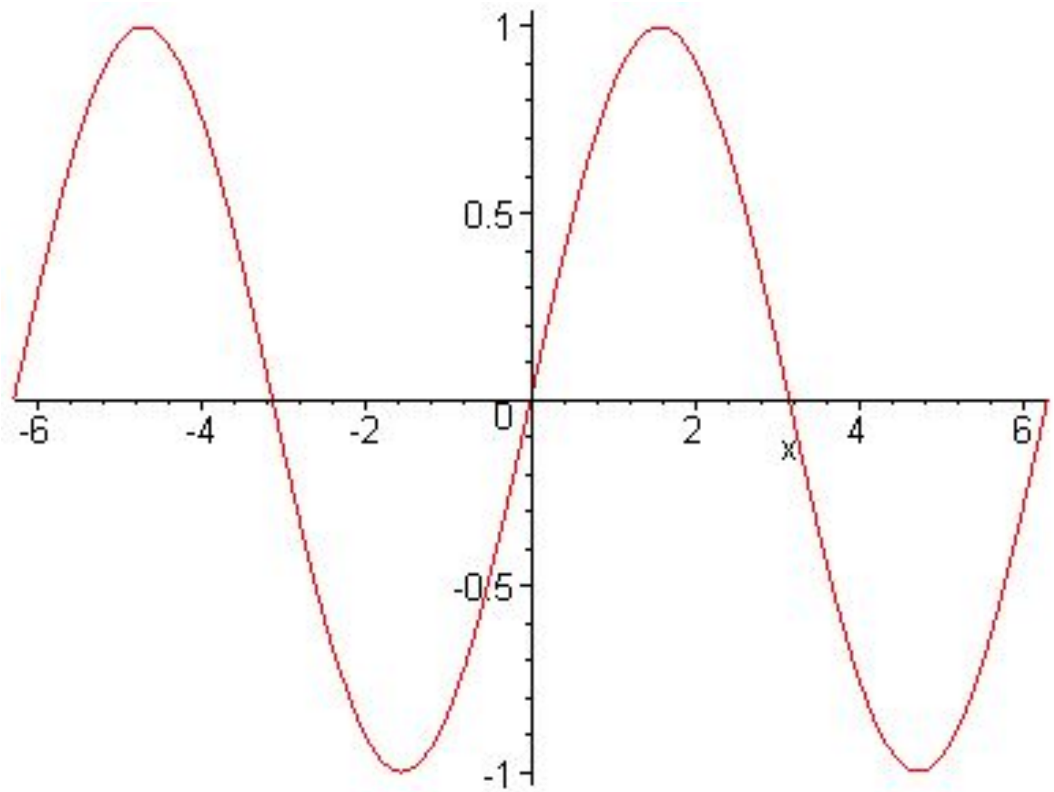
Тригонометрические функции

Функция y=sin x

- Область определения функции: $D(f)=R$;
- Область значений: $E(f)=[-1;1]$;
- Функция является нечетной, т.е. $\sin(-x) = -\sin x$;
- Функция периодическая с положительным наименьшим периодом 2π;
- Нули функции: $\sin x = 0$ при $x = \pi k$, kZ;
- Функция принимает положительные значения: $\sin x>0$ при $x \in (2\pi k;\ \pi+2\pi k)$, kZ;
- Функция принимает отрицательные значения: $\sin x<0$ при $x\in (\pi+2\pi k;\ 2\pi+2\pi k)$, kZ;

Графиком функции является синусоида.

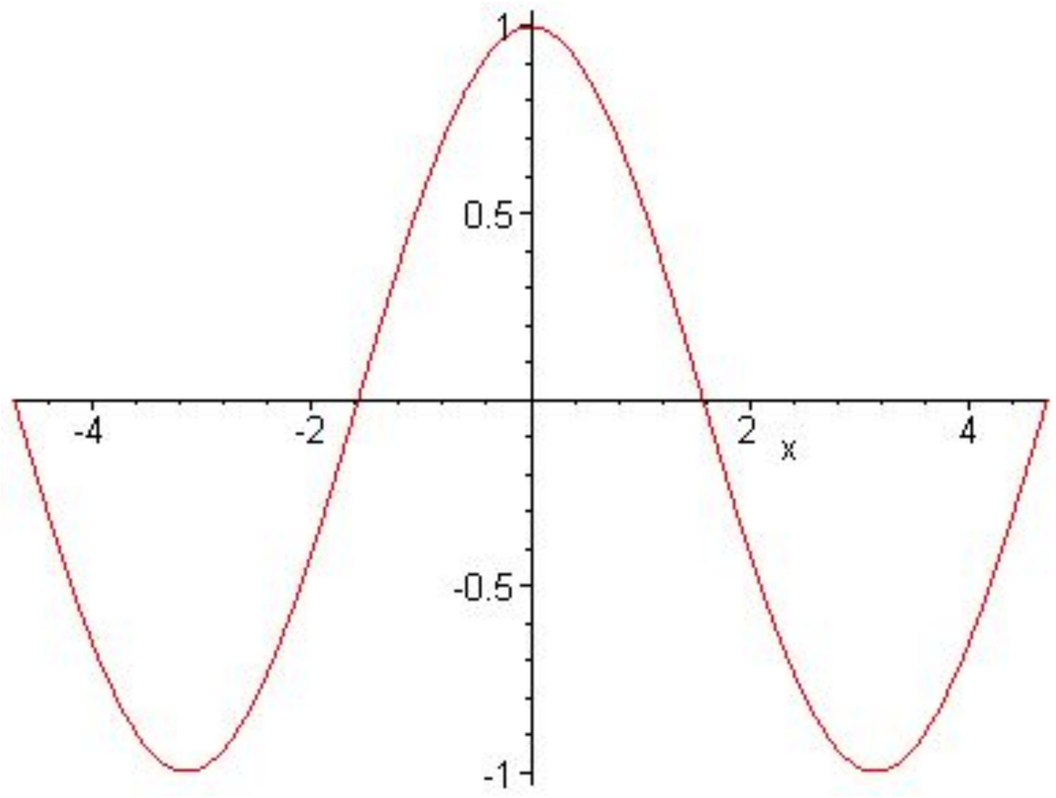
Список функций

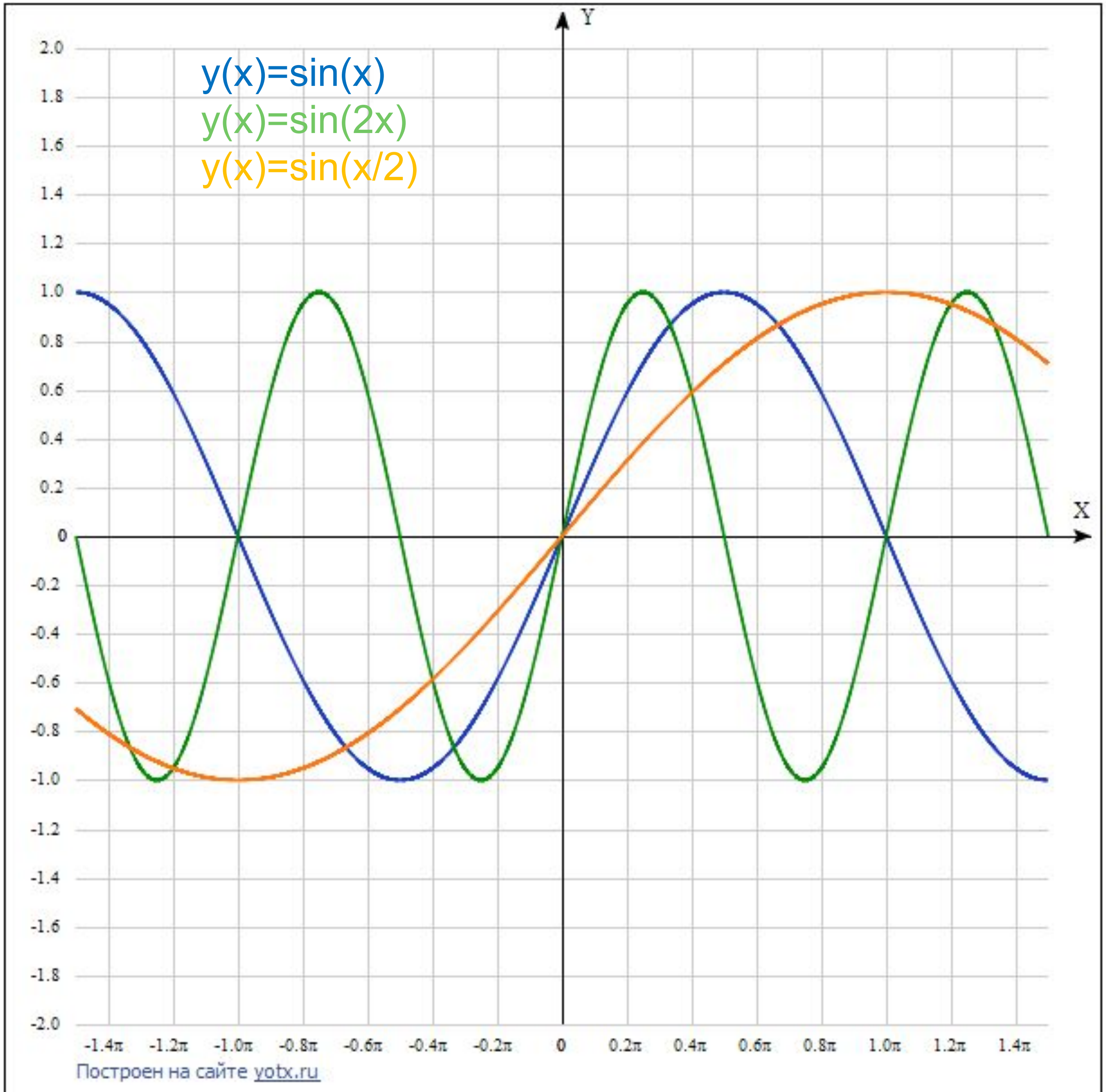


Выше меры конь не скачет – точная верхняя грань

Функция y=cos x

Список функций




y(x)=sin(x)
y(x)=sin(2x)
y(x)=sin(x/2)
Y
X
2.0
1.8
1.6
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1.0
-1.2
-1.4
-1.6
-1.8
-2.0
-1.4π
-1.2π
-1.0π
-0.8π
-0.6π
-0.4π
-0.2π
0
0.2π
0.4π
0.6π
0.8π
1.0π
1.2π
1.4π
Построен на сайте yotx.ru

Обратные тригонометрические функции

Функция y=arcsin x

Список функций

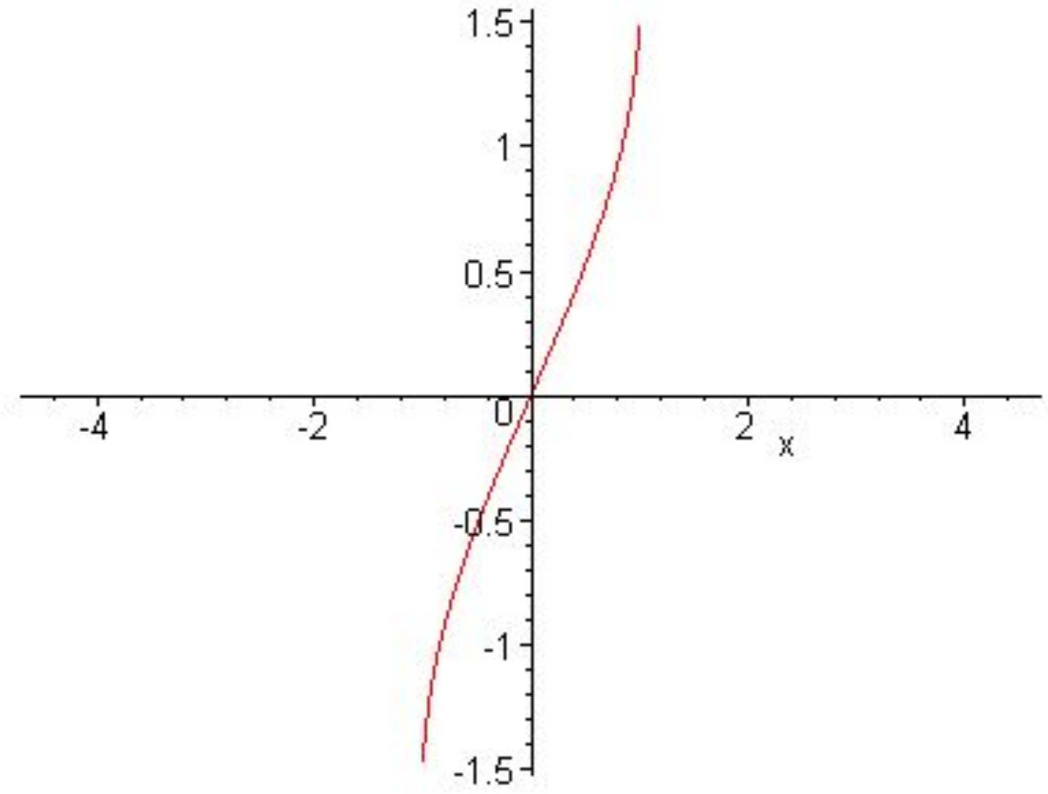
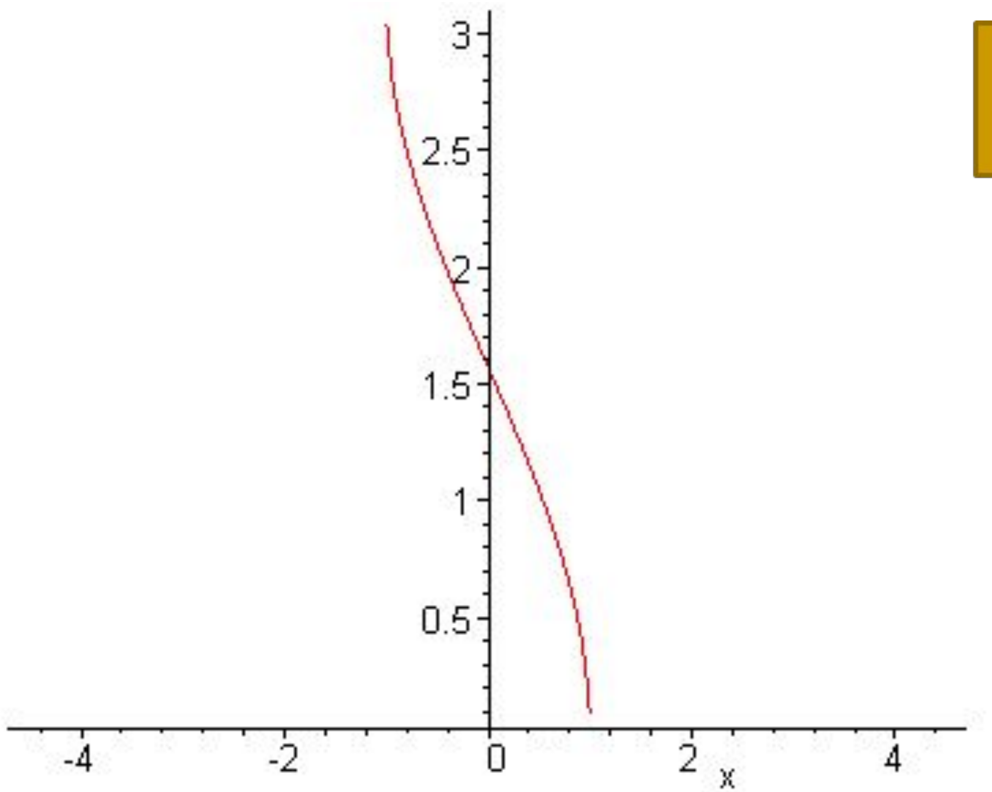


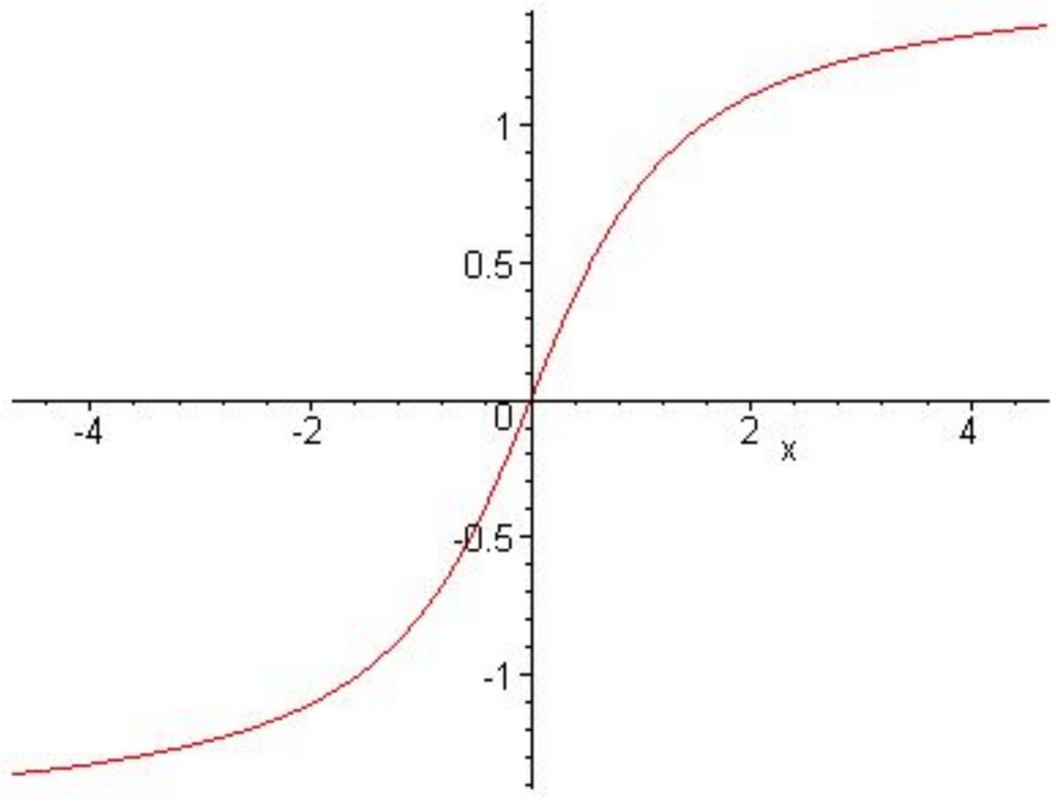
График функции y = arccos x:



Список функций

y=arctgx

Список функций



Асимптоты

- <u>Асимптотой</u> для функции y=f(x) называется прямая, к которой неограниченно (не пересекая) приближается кривая графика функции.

Функция может иметь

- <u>вертикальную</u> асимптоту x=a, если $=\infty$ (может, слева или справа),
- <u>наклонную</u> асимптоту y=kx+b, если существуют конечные числа k и b

$$, b = \lim_{x\to\infty} f(x) - kx$$

- <u>горизонтальную</u> y=b ,если

Горизонтальная асимптота – частный случай наклонной при k=0

Исследование функции производится по схеме:

1) Область определения.

2) Область значений функции.

3) Нули функции.

4) Четность (нечетность).

5) Периодичность.

6) Вычисление первой производной и с ее помощью нахождение промежутков возрастания (убывания) функции, точек экстремума.

7) Вычисление второй производной функции и с ее помощью выяснение выпуклости вверх (вогнутости вниз), нахождение точек перегиба.

8) Нахождении асимптот графика.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Функция, имеющая производную в некоторой точке, называется дифференцируемой в этой точке.

Операция нахождения производной данной функции называется дифференцированием обозначается с помощью штриха.

При нахождении производных применяются правила дифференцирования, например:

$$C' = 0 \qquad (Cf(x))' = Cf'(x) \qquad \textbf{(2.3)}$$

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Функции одного переменного. При нахождении производных применяются правила дифференцирования:

$$\left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x)+g'(x) \quad \textbf{(2.1)}$$

$$\left(f(x)g(x)\right)' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \quad \textbf{(2.2)}$$

$$C' = 0 \qquad \left(Cf(x)\right)' = Cf'(x) \quad \textbf{(2.3)}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)} \quad \textbf{(2.4)}$$

Сложная функция

Опред. Если y зависит от x через посредство промежуточного аргумента u, то y называется <u>сложной</u> функцией от x.

Примеры. y=((1+5x)^3 , ***u*** =1+5x, y=***u***^{3}

y=sin4x, ***u*** =4x, y=sin***u***

Для сложной функции ***y=f (u)***, ***u=φ(x)***

$$(f(\varphi(x)))' = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

$y' = ((1+5x)^3)' = 3 \cdot u^2 \cdot (1+5x)' = 3 \cdot (1+5x)^2 \cdot 5 = 15 \cdot (1+x)^3$

$y' = (\sin 4x)' = (\sin u)' = \cos u \cdot u' = \cos 4x \cdot 4 = 4 \cdot \cos 4x$

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$ $\quad (\sin u)' = \cos u \cdot u'$ $\quad (\cos u)' = -\sin u \cdot u'$

Таблица основных производных

$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}, \quad x'=1$	$(u^{\alpha})'=\alpha u^{\alpha-1}u'$
$(\cos x)'=-\sin x;$ $(\sin x)'=\cos x$	$(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$ $(\sin u)'=\cos u\cdot u'$
$(\mathrm{tg}x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x};\ (\mathrm{ctg}x)'=\dfrac{-1}{\sin^2 x}$	$(\mathrm{tg}u)'=\dfrac{u'}{\cos^2 u};\ (\mathrm{ctg}u)'=\dfrac{-u'}{\sin^2 u}$
$(a^x)'=a^x\ln a, \quad (e^x)'=e^x$	$(a^u)'=a^u\ln a\cdot u',\ (e^u)'=e^u u'$
$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a},\ (\ln x)'=\dfrac{1}{x}$	$(\log_a u)'=\dfrac{u'}{u\ln a},\ (\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$
$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin u)'=\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$(\arccos x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos u)'=\dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$(\mathrm{arctg}x)'=\dfrac{1}{1+x^2};$	$(\mathrm{arctg}u)'=\dfrac{u'}{1+u^2};$
$(\mathrm{arcctg}x)'=\dfrac{-1}{1+x^2}$	$(\mathrm{arcctg}u)'=\dfrac{-u'}{1+u^2}$

Список функций

*

ДО НОВЫХ ВСТРЕЧ С ФУНКЦИЯМИ!