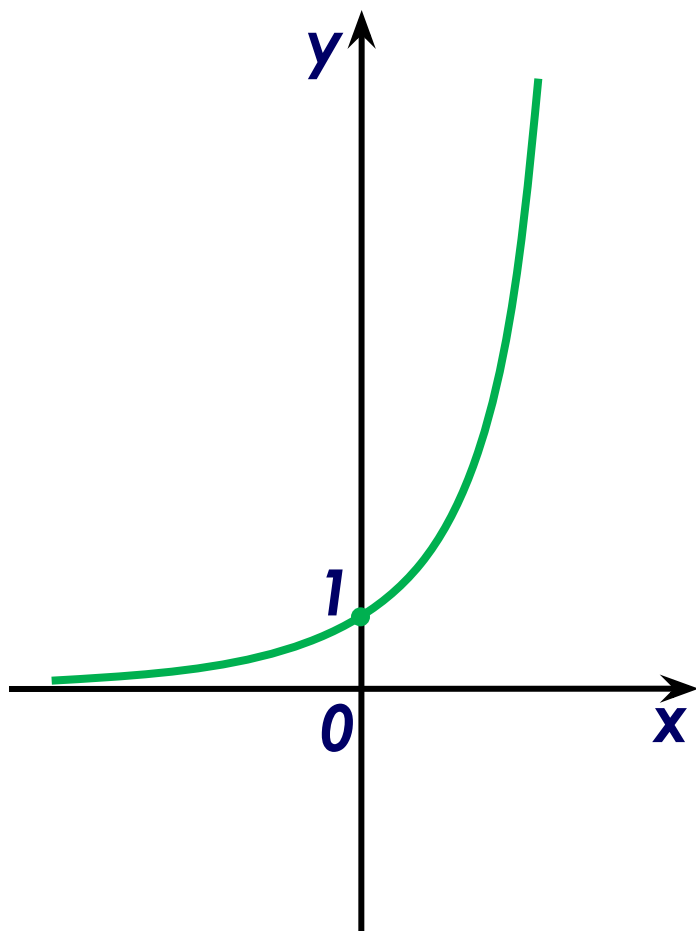


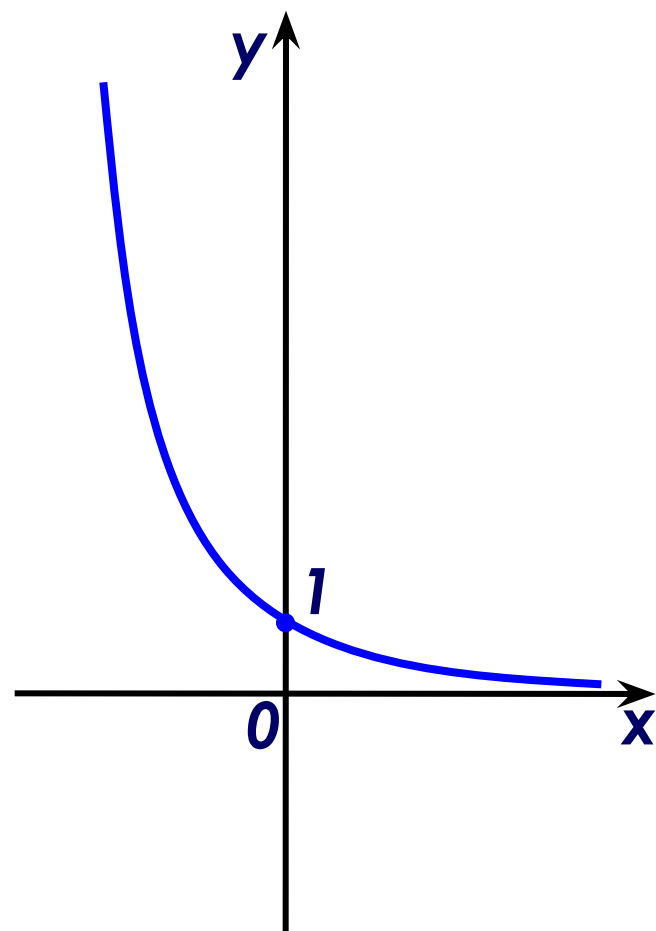
График показательной функции

$$y = a^x, a \neq 1, a > 0$$

$$y = a^x, a > 1$$



$$y = a^x, 0 < a < 1$$



Показательные уравнения

Уравнения вида $a^{f(x)} = a^{h(x)}$, где $a \neq 1$, $a > 0$ называют **показательными уравнениями**

$$a^{f(x)} = a^{h(x)}$$



$$f(x) = h(x)$$

Методы решения показательных уравнений:

1. Функционально-графический метод.
2. Метод уравнивания показателей.
3. Метод введения новой переменной.



Показательные уравнения. Примеры

Пример 1

$$2^{2x-4} = 64$$

$$2^{2x-4} = 2^6$$

$$2x - 4 = 6$$

$$x = 5$$

Ответ : 5

Пример 2

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} = \left(\frac{1}{3}\right)^{0,5}$$

$$2x - 3,5 = 0,5$$

$$x = 2$$

Ответ : 2

Пример 3

$$5^{x^2-3x} = 5^{3x-8}$$

$$x^2 - 3x = 3x - 8$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

Ответ : 2; 4



Показательные уравнения. Примеры

Пример 4

$$4^x + 2^{x+1} - 24 = 0$$

$$(2^2)^x + 2 \cdot 2^x - 24 = 0$$

$$(2^x)^2 + 2 \cdot 2^x - 24 = 0$$

Пусть $2^x = t$, где $t > 0$ тогда

$$t^2 + 2t - 24 = 0$$

$$\begin{cases} t_1 = -6, \\ t_2 = 4 \end{cases}$$

$t_1 = -6$ не удовлетворяет условию $t > 0$

Вернемся к исходной переменной

$$2^x = 4$$

$$x = 2$$

Ответ : 2



Показательные уравнения. Примеры

Пример 9. Решить уравнение $2 \cdot 3^{x+1} - 6 \cdot 3^{x-1} - 3^x = 9$

Решение

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3^{x+1} - 6 \cdot 3^{x-1} - 3^x = 9 &\Leftrightarrow 3^{x-1} \cdot (2 \cdot 3^2 - 6 - 3^1) = 9 \Leftrightarrow 3^{x-1} \cdot 9 = 9 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3^{x-1} = 1 &\Leftrightarrow 3^{x-1} = 3^0 \Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Ответ: $\{1\}$.

Пример 10. Решить уравнение $4^{x-1} + 4^{x-\frac{1}{2}} + 2^{2x-3} = 14$

Решение

$$\begin{aligned} 4^{x-1} + 4^{x-\frac{1}{2}} + 2^{2x-3} = 14 &\Leftrightarrow 4^{x-1} + 4^{x-\frac{1}{2}} + 4^{x-\frac{3}{2}} = 14 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4^{x-\frac{3}{2}} \cdot \left(4^{\frac{1}{2}} + 4^1 + 1 \right) = 14 &\Leftrightarrow 4^{x-\frac{3}{2}} \cdot 7 = 14 \Leftrightarrow 2^{2x-3} = 2 \Leftrightarrow 2x-3 = 1 \Leftrightarrow x = 2. \end{aligned}$$

Ответ: $\{2\}$.

Показательные уравнения. Примеры

Пример 5 (однородное уравнение)

$$5^{2x+1} - 13 \cdot 15^x + 54 \cdot 9^{x-1} = 0$$

$$5 \cdot 5^{2x} - 13 \cdot 15^x + 54 \cdot \frac{9^x}{9} = 0$$

$$5 \cdot 5^{2x} - 13 \cdot 15^x + 6 \cdot 9^x = 0$$

Разделим на 9^x , тогда

$$\frac{5 \cdot 5^{2x}}{9^x} - \frac{13 \cdot 15^x}{9^x} + \frac{6 \cdot 9^x}{9^x} = 0$$

$$5 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{2x} - 13 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^x + 6 = 0$$

Пусть $\left(\frac{5}{3}\right)^x = t$, где $t > 0$, тогда

$$5t^2 - 13t + 6 = 0$$

$$\begin{cases} t_1 = \frac{3}{5}, \\ t_2 = 2 \end{cases}$$

Вернемся к исходной переменной

$$\left(\frac{5}{3}\right)^x = \frac{3}{5} \quad \text{или} \quad \left(\frac{5}{3}\right)^x = 2$$

$$x = -1$$

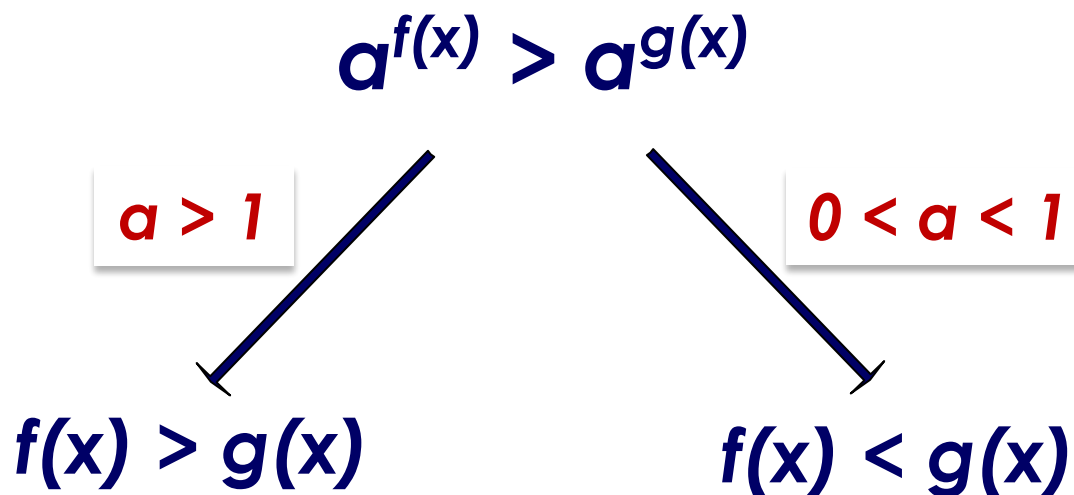
$$x = \log_{\frac{5}{3}} 2$$

Ответ : $-1; \log_{\frac{5}{3}} 2$.



Показательные неравенства

Неравенства вида $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, где $a \neq 1$, $a > 0$ называют **показательными неравенствами**



ИЛИ

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow (a - 1)(f(x) - g(x)) > 0$$



Показательные неравенства. Примеры

Пример 1

$$2^{2x-4} > 64$$

$$2^{2x-4} > 2^6$$

т.к. функция $y = 2^t$ монотонно
возрастает на \mathbb{R} , то

$$2x - 4 > 6$$

$$x > 5$$

Ответ: $(5; +\infty)$

Пример 2

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} < \left(\frac{1}{3}\right)^{0,5}$$

т.к. функция $y = \left(\frac{1}{3}\right)^t$

монотонно убывает на \mathbb{R} , то

$$2x - 3,5 > 0,5$$

$$x > 2$$

Ответ: $(2; +\infty)$



Показательные неравенства. Примеры

Пример 4

$$8^x + 18^x > 2 \cdot 27^x$$

$$2^{3x} + 2^x \cdot 3^{2x} > 2 \cdot 3^{3x} \quad | : (3^{3x}) \text{ т.к. } 3^{3x} > 0$$

$$\frac{2^{3x}}{3^{3x}} + \frac{2^x \cdot 3^{2x}}{3^{3x}} > \frac{2 \cdot 3^{3x}}{3^{3x}}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{3x} + \left(\frac{2}{3}\right)^x > 2$$

Пусть $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$, где $t > 0$

$$t^3 + t - 2 > 0$$

$$t^3 + t - 2 = t^3 + t - 1 - 1 = t^3 - 1 + t - 1 = (t - 1)(t^2 + t + 2)$$

т.к. $t^2 + t + 2 > 0$ для любых t , то $t - 1 > 0$

$$t > 1$$



Показательные неравенства. Примеры

Пример 4

Вернемся к исходной переменной :

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x > 1$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x > \left(\frac{2}{3}\right)^0,$$

т.к. $a = \frac{2}{3} < 1$, то функция $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ убывает на R

$$x < 0$$

Ответ : $(-\infty; 0)$.

