

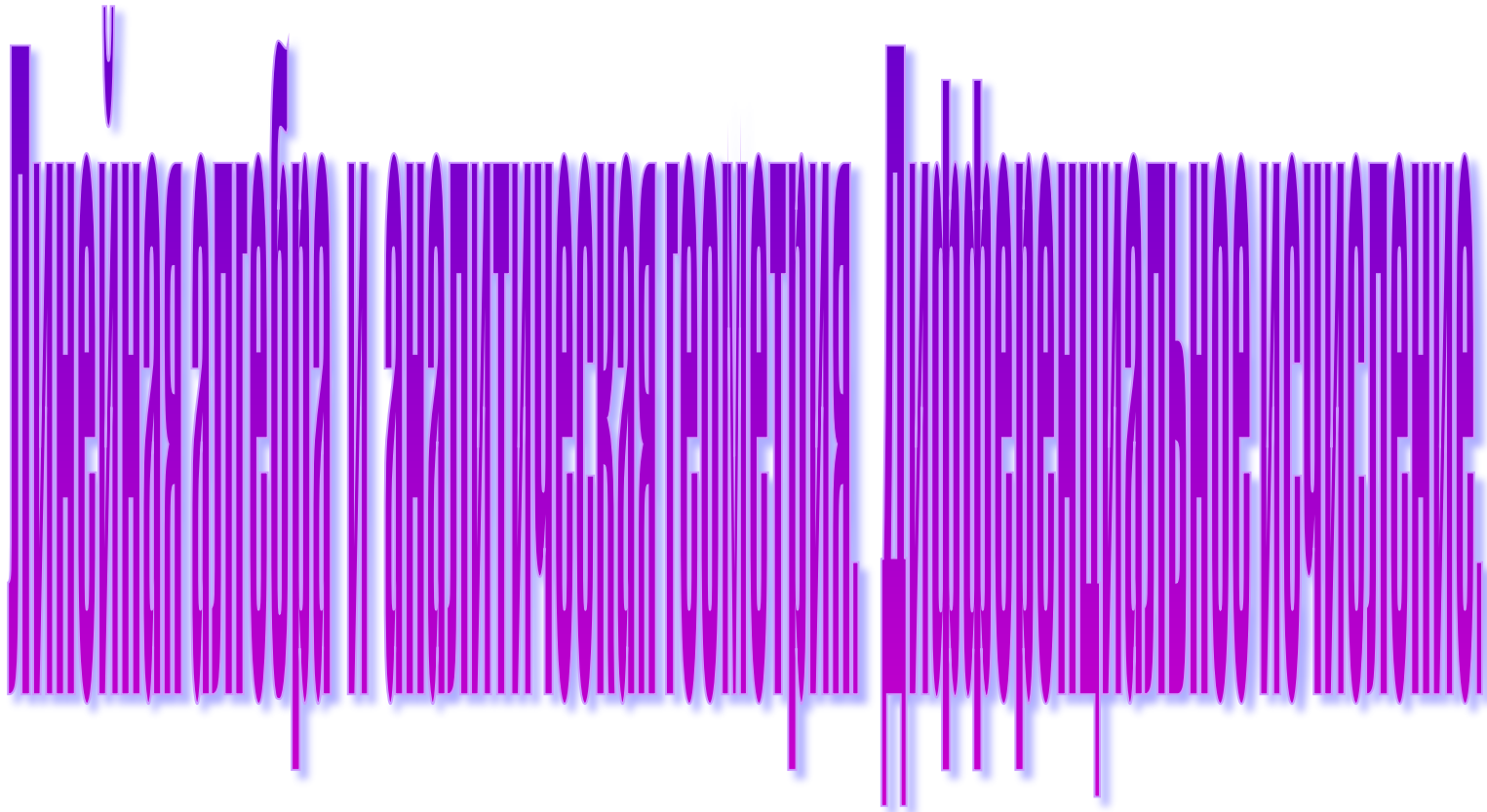
# Математика 1.1

Преподаватель:

***Филипенко Николай Максимович***

доцент кафедры

Высшей математики и математической физики ТПУ



<http://mph.phtd.tpu.ru>

Или

<http://mph.phtd.tpu.ru>/[methmat.php](http://mph.phtd.tpu.ru/methmat.php)

**Основная литература**

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Том 1. - М.: Наука, 1985. - 429с.
2. Ильин В.А., Поздняк Э.Г. Линейная алгебра. - М.: Наука, 1985
3. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. - М.: Наука, 1980.
4. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. М.: Наука, 1998.
5. Апатенок Р.Ф., Маркина А.М. и др. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. - Минск: Высшая школа, 1986.
6. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М.: Наука, 1985.

**Дополнительная литература (Задачники с решениями).**

1. Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике. - Харьков: ХТУ, 1974.-ч.1
2. Сборник задач по курсу высшей математики( под ред. Г.Н. Кручковича ), М. Наука, 1973г.
3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в примерах и задачах. –М. : ВШ, 1980.-ч.1
4. Терехина Л.И., Фикс И.И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. 2008, 2009, ....

## Рейтинг - лист

№	Темы	Трудоёмкость в часах Ауд / сам	Промежуточный контроль работы студента	Рейтинг промежуточного контроля	Рейтинг темы (баллы)
1	Линейная алгебра	24/22	ИДЗ-1	2	7
			1. контрольная работа	5	
2	Векторная алгебра	14/12	ИДЗ-2	2	7
			2. контрольная работа	5	
3	Аналитическая геометрия	26/22	ИДЗ-3,4	4	10
			3. контрольная работа	6	
	<b>Коллоквиум</b>		<b>6</b>		<b>30</b>
4	Введение в анализ	22/16	ИДЗ-5	2	9
			4. контрольная работа	7	
5	Дифференциальное исчисление функций одной переменной	24/22	ИДЗ-6,7	4	12
			5. контрольная работа	8	
6	Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных	18/18	ИДЗ-8	2	9
			6. контрольная работа	7	
	<b>ВСЕГО</b>		<b>Допуск к экзамену 33 балла</b>		<b>60</b>
			<b>Экзамен</b>		<b>40</b>

# • Матрицы, действия над ними.

Рассмотрим систему двух

линейных алгебраических

уравнений с двумя неизвестными:

Решением такой системы называется

пара значений:

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}}, \quad x_2 = \frac{b_2 a_{12} - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}}.$$

Подстановка которых вместо  $x_1$  и  $x_2$  обращает оба уравнения в тождества. Видно, что решение зависит от знаменателя. Если он не равен 0, то мы получим единственное решение для  $x_1$  и  $x_2$ .

Знаменатель получаем в результате действий с коэффициентами при неизвестных, из которых можно составить таблицу:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Если мы будем иметь более сложную систему уравнений, с большим количеством неизвестных и уравнений, то



1. Прямоугольные матрицы размера  $(m \times n)$  :

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & -8 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -8 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

размер  $(2 \times 4)$

размер  $(3 \times 2)$

2. Матрица - строка размера  $(1 \times n)$  :

$$(0 \quad -4 \quad 6 \quad \dots \quad 1).$$

Такая матрица состоит из одной строки и  $n$  столбцов и часто называется "вектор-строка".

3. Матрица - столбец размера  $(m \times 1)$  :

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \\ \dots \\ -8 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} \text{Такая матрица состоит} \\ \text{из одного столбца} \\ \text{и } m \text{ строк} \\ \text{и часто называется} \\ \text{"вектор - столбцом"} \end{array} \right|.$$

10

7. Единичная матрица:  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Как видно, в единичной матрице диагональные элементы равны единице, а остальные элементы равны нулю.





Например, система из трех уравнений с тремя неизвестными и ее основная матрица

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -6 \\ -4x_1 + 7x_2 + x_3 = 4 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 3 & -1 & 2 \\ -4 & 7 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Квадратная матрица} \\ \text{размера } \mathbf{(3 \times 3)} \text{ или} \\ \text{матрица } \mathbf{3\text{-го}} \text{ порядка} \end{array}$$

В этой же системе можно выписать в виде матрицы столбец свободных членов

$$B = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{Матрица - столбец размера } (3 \times 1)$$

Можно записать матрицу-строку  $C = (2 \quad 4 \quad -5 \quad -1)$ , размер матрицы  $(1 \times 4)$

В квадратных матрицах можно выделить главную и побочную диагонали

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 3 & -1 & 2 \\ -4 & 7 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{побочная} \\ \\ \text{главная} \end{array}$$

**Суммой**  $A+B$  - матриц  $A$  и  $B$  называется матрица  $C$  размера  $(m \times n)$ , каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц  $A$  и  $B$ :

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, (i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n).$$

**Произведением**  $\alpha A$  матрицы  $A$  на число  $\alpha$  называется матрица  $B$ , которая получается из матрицы  $A$  умножением всех элементов на  $\alpha$ :  $b_{ij} = \alpha a_{ij}$ .

Например:

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+3 & -2+4 \\ 5+2 & -2+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$2A = 2 \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 & 2 \cdot (-2) \\ 2 \cdot 5 & 2 \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 10 & -4 \end{bmatrix}$$

Умножение матриц возможно, если число столбцов  $n$  матрицы  $A$  равно числу столбцов  $n$  матрицы  $B$ .

**Правило умножения:** При умножении матриц каждый элемент матрицы произведения находится как сумма произведений элементов строки первой матрицы на соответствующие элементы столбца второй матрицы.

*Например:*

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 3 + (-2) \cdot 2 & 3 \cdot 4 + (-2) \cdot 5 \\ 5 \cdot 3 + (-2) \cdot 2 & 5 \cdot 4 + (-2) \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 11 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \left| \begin{array}{l} (3 \times 3)(3 \times 2) = (3 \times 2) \\ \text{Выполнять умножение} \\ \text{можно. В результате} \\ \text{получим матрицу} \\ \text{размера } (3 \times 2) \end{array} \right| =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 9 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 5 + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 & 2 \cdot 9 + 1 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) \\ 3 \cdot 5 + 2 \cdot 0 + (-4) \cdot 1 & 3 \cdot 9 + 2 \cdot 3 + (-4) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 9 & 22 \\ 11 & 37 \end{pmatrix}.$$

$$\text{ii. } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \left| \begin{array}{l} (1 \times 3)(3 \times 1) = (1 \times 1) \\ \text{получим матрицу, состоящую} \\ \text{из одного элемента} \end{array} \right| =$$

$$= (1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3) = (13).$$

$$\text{iii. } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \left| (3 \times 1)(1 \times 3) = (3 \times 3) \right| =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 & 2 \cdot 3 \\ 1 \cdot 1 & 1 \cdot 2 & 1 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

## Для квадратных матриц можно вычислить определитель.

Определитель квадратной матрицы есть некоторое число, которое вычисляется по элементам матрицы согласно правилу, которое будет сформулировано после введения понятий **миноров** и **алгебраических дополнений** элементов определителя.

**Минором** элемента определителя называется определитель, полученный после вычеркивания из исходного строки и столбца, на пересечении которых стоит этот элемент.

**Алгебраическое дополнение** элемента – это **минор** этого элемента, взятый со знаком (+), если сумма номеров строки и столбца, на которых находится элемент – четная, и со знаком (-), если эта сумма – нечетная.

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 3 & -1 & 2 \\ -4 & 7 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} \quad A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = M_{11}$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 3 & -1 & 2 \\ -4 & 7 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} = -M_{23}$$

# Вычисление определителей

1. Определитель 1-го порядка равен самому элементу

$$\Delta_1 = |a_{11}| = a_{11}$$

Например:  $\Delta_1 = |2| = 2,$        $\Delta_1 = |-7| = -7$

2. Определитель 2-го порядка находится по правилу

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

Определитель 2-го порядка равен разности произведений элементов главной и побочной диагонали.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - (-3) \cdot 4 = 10 - (-12) = 10 + 12 = 22$$

Например:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = (-6) \cdot 7 - (-2) \cdot (-3) = -42 - 6 = -48$$

# Определитель 3-го порядка.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} -$$

$$- a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

$$\left( \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right)^{ "+" }$$

$$\left( \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right)^{ "-" }$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2(-1) + 1 \cdot 4 \cdot 1 + 3 \cdot 3(-2) - 1 \cdot 2(-2) - 3 \cdot 1(-1) -$$

$$- 3 \cdot 4 \cdot 5 = -10 + 4 - 18 + 4 + 3 - 60 = -77.$$

Определитель 3-го можно найти путем разложения определителя по элементам строки или столбца.

При этом используется

Основное правило вычисления определителя:  
Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки или столбца на соответствующие им алгебраические дополнения

*Например, разложение определителя по элементам 1-ой строки будет иметь вид*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} =$$
$$= a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$



В соответствии со свойствами определитель порядка  $n$  может быть представлен в виде разложения этого определителя по элементам  $i$ -й строки:

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in} = a_{i1} (-1)^{i+1} M_{i1} + a_{i2} (-1)^{i+2} M_{i2} + \dots + a_{in} (-1)^{i+n} M_{in}.$$

То есть *определитель квадратной матрицы  $A$  порядка  $n$  равен сумме произведений элементов какой-либо  $i$ -й его строки на алгебраические дополнения этих элементов.*

Аналогичным образом можно разложить этот же определитель по элементам любого его столбца.

**Теорема Лапласа.** *Определитель равен сумме произведений всех элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения.*

Пример вычисления определителя путем разложения по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 5 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} + (-4) \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = \\
 = (3 \cdot 6 - (-2) \cdot (-1)) + 4 \cdot (5 \cdot 6 - (-2) \cdot 4) + 2 \cdot (5 \cdot (-1) - 3 \cdot 4) = \\
 = (18 - 2) + 4 \cdot (30 + 8) + 2 \cdot (-5 - 12) = 16 + 152 - 34 = 134$$

Наиболее простым, очевидно, является разложение определителя по элементам того ряда, в котором все элементы, кроме одного, равны нулю

Например, следующий определитель наиболее просто разложить по элементам 2-й строки

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ -6 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} + 0 + 0 = \\
 = -3 \cdot ((-1) \cdot 7 - (-2) \cdot 4) = -3 \cdot (-7 + 8) = -3 \cdot 1 = -3$$

## 2. Свойства определителей

- 1) При транспонировании *матрицы* её определитель не меняется.
- 2) При перестановке любых двух *строк (столбцов)* определитель меняет знак.
- 3) Общий множитель элементов любой *строки (столбца)* можно выносить за знак определителя.
- 4) Если все элементы *k-й строки* определителя  $|A|$  являются суммами двух элементов, то определитель равен сумме двух определителей  $|A_1|$  и  $|A_2|$ , у которых все строки, кроме *k-й*, совпадают со строками определителя  $|A|$ , *k-я строка* в определителе  $|A_1|$  состоит из первых слагаемых, а в определителе  $|A_2|$  – из вторых слагаемых.

**5) Определитель равен нулю если:**

**а) он имеет строку (столбец), состоящую из нулей;**

**б) он имеет хотя бы две одинаковые строки (столбца);**

**в) он имеет хотя бы две пропорциональные (т.е. отличающиеся множителем) строки (столбца);**

$$a_{ij} = \lambda_1 \cdot a_{i_1j} + \lambda_2 \cdot a_{i_2j} + \dots + \lambda_k \cdot a_{i_kj}, \quad j = \overline{1, n}$$

**г) хотя бы одна строка (столбец) является линейной**

**комбинацией нескольких других строк (столбцов).**

$$(a_{ji} = \lambda_1 \cdot a_{ji_1} + \lambda_2 \cdot a_{ji_2} + \dots + \lambda_k \cdot a_{ji_k}, \quad j = \overline{1, n})$$

- 6) *Определитель не изменится, если к каждому элементу  $i$ -й строки (столбца) прибавить соответствующий элемент  $k$ -й строки (столбца), умноженный на число  $\alpha \neq 0$ .*

Согласно свойству определителей: *Величина определителя не изменится, если к элементам какого-либо ряда прибавить соответствующие элементы другого ряда, предварительно умноженные на число.*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & -1 \\ -3 & 1 & -2 & 5 \\ -4 & -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2+2 & -4+3 & -6-4 & -8-1 \\ 3-3 & 6+1 & 9-2 & 12+5 \\ 4-4 & 8-3 & 12+1 & 16+2 \end{vmatrix} = \\
 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -10 & -9 \\ 0 & 7 & 7 & 17 \\ 0 & 5 & 13 & 18 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -10 & -9 \\ 7 & 7 & 17 \\ 5 & 13 & 18 \end{vmatrix} = \\
 = \begin{vmatrix} -1 & -10 & -9 \\ -7+7 & -70+7 & -63+17 \\ -5+5 & -50+13 & -45+18 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -10 & -9 \\ 0 & -63 & -46 \\ 0 & -37 & -27 \end{vmatrix} = \\
 = (-1) \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -63 & -46 \\ -37 & -27 \end{vmatrix} = -(-63 \cdot (-27) - (-46) \cdot (-37)) = \\
 = -(1701 - 1702) = 1
 \end{vmatrix}$$

## § Обратная матрица

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Обратной к матрице  $\mathbf{A}$  называется матрица, обозначаемая  $\mathbf{A}^{-1}$ , такая, что  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$ .

### СВОЙСТВА ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

- 1) Если матрица  $\mathbf{A}$  имеет обратную, то  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{A}^{-1}$  – квадратные матрицы одного порядка.
- 2) Если обратная матрица существует, то она единственная.
- 3) Если матрица  $\mathbf{A}$  имеет обратную, то определитель матрицы  $\mathbf{A}$  отличен от нуля.

Квадратная матрица, определитель которой отличен от нуля, называется невырожденной.

**ТЕОРЕМА.** Пусть  $\mathbf{A}$  – квадратная матрица. Матрица  $\mathbf{A}$  имеет обратную тогда и только тогда, когда её определитель  $|\mathbf{A}|$  отличен от нуля. Причем обратная матрица  $\mathbf{A}^{-1}$  может быть найдена по формуле:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \mathbf{S}^T$$

где  $\mathbf{S}$  – матрица из алгебраических дополнений элементов матрицы  $\mathbf{A}$ , т.е.

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \boxtimes & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \boxtimes & A_{2n} \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ A_{n1} & A_{n2} & \boxtimes & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Матрица  $\mathbf{S}^T$  называется союзной (или присоединенной, или взаимной) для матрицы  $\mathbf{A}$ .



# Схема нахождения обратной матрицы

- 1) Находится определитель матрицы. Если он отличен от нуля  $\det A \neq 0$ , то обратная матрица существует.
- 2) Составляется союзная матрица  $A^*$ , элементами которой являются алгебраические дополнения элементов исходной матрицы.
- 3) Полученную союзную матрицу транспонируем, т.е. меняем ролями строки и столбцы матрицы. Получаем матрицу  $A^{*T}$ .
- 4) Матрицу  $A^{*T}$  делим на определитель матрицы и получаем обратную матрицу. (При делении матрицы на число все ее элементы нужно разделить на это число)

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^{*T}$$

Рассмотрим примеры.

1. Найти матрицу, обратную данной  $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

$$1) \quad \det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - (-3) \cdot 4 = 22$$

$$2) \quad A^* = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad 3) \quad A^{*T} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \quad 4) \quad A^{-1} = \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

# Нахождение обратной матрицы

2. Найти матрицу, обратную данной

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Находим определитель матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 18 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 18 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -(18 \cdot 3 + 1) = -55 \neq 0$$

**Т.о. обратная матрица существует.**

2) Составляем союзную матрицу

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3 \quad A_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = -(3 + 8) = -11 \quad A_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1$$

$$A_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(4 - 5) = 1 \quad A_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 20 = 22 \quad A_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = -(2 + 16) = -18$$

$$A_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 5 = 13 \quad A_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(4 - 15) = 11 \quad A_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 12 = -14$$

$$A^* = \begin{pmatrix} -3 & -11 & -1 \\ 1 & 22 & -18 \\ 13 & 11 & -14 \end{pmatrix}$$

3) Полученную матрицу транспонируем

$$A^{*T} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 13 \\ -11 & 22 & 11 \\ -1 & -18 & -14 \end{pmatrix}$$

4) Обратная матрица

$$A^{-1} = -\frac{1}{55} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 13 \\ -11 & 22 & 11 \\ -1 & -18 & -14 \end{pmatrix}$$

# Матричные уравнения

Матричные уравнения – это уравнения, в которых участвуют как известные матрицы, так и неизвестная матрица, которую и нужно найти. Существуют два основных типа матричных уравнений.

1 тип (левое умножение)

$$\begin{aligned} & \underline{A \cdot X = B} \\ A^{-1} \cdot A \cdot X &= A^{-1} \cdot B \\ E \cdot X &= A^{-1} \cdot B \\ & \underline{X = A^{-1} \cdot B} \end{aligned}$$

2 тип (правое умножение)

$$\begin{aligned} & \underline{X \cdot A = B} \\ X \cdot A \cdot A^{-1} &= B \cdot A^{-1} \\ X \cdot E &= B \cdot A^{-1} \\ & \underline{X = B \cdot A^{-1}} \end{aligned}$$

В виде матричного уравнения  $A \cdot X = B$  может быть записана система линейных уравнений, решение которой  $X = A^{-1} \cdot B$  существует, если определитель основной матрицы отличен от нуля.

Если в системе количество уравнений и неизвестных разное, то нельзя говорить об определителе основной матрицы и решать систему матричным методом нельзя.

Для решения таких систем применяется метод Гаусса

- Решить матричное уравнение

$$X \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Выполним вначале умножение матриц на число и упростим уравнение. При умножении матрицы на число все ее элементы нужно умножить на это число. При сложении матриц складываются соответствующие элементы, т.е. элементы, стоящие на одинаковых местах в матрицах. При вычитании матриц также нужно вычитать соответствующие элементы.

$$X \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & -9 \end{pmatrix};$$

$$X \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & -9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}, \Rightarrow X \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Обозначим  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

Тогда получим матричное уравнение вида  $X \cdot A = B$ , решение которого  $X = B \cdot A^{-1}$ , где  $A^{-1}$  – матрица, обратная матрице  $A$ . Итак,

$$X = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

Найдем  $A^{-1}$  по известной схеме:

$$1) \det(A) = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 4 = 10, \quad 2) A^* = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$3) A^{*\tau} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \quad 4) A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^{*\tau} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Окончательно:

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 7 \cdot 3 + (-2) \cdot (-4) & 7 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 \\ 0 \cdot 3 + (-3) \cdot (-4) & 0 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 3 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь мы выполнили умножение двух матриц по следующему правилу: *При умножении матриц каждый элемент матрицы произведения получается как сумма произведений элементов строки первой матрицы на соответствующие элементы столбца второй матрицы.*