

*Лекция 1*  
*Делимость целых чисел.*  
*Теорема о делении с остатком*



## *Теория чисел:*

- *наука о числовых системах*
- *изучает числа с точки зрения их строения и внутренних связей, рассматривает возможности представления чисел через другие, более простые*
- *арифметика или высшая арифметика (arithmetike от arithmos – «число», и techne – «наука»)*

# *Пифагорейские числа*

- *Совершенные, недостаточные и избыточные числа:*
  - *недостаточные числа* – те, сумма собственных делителей которых меньше самого числа (собственный делитель числа – это другое число, на которое исходное число делится нацело, включая единицу и исключая само число);
  - *избыточные числа* – те, сумма собственных делителей которых больше самого числа;
  - *совершенные числа* равны сумме всех своих собственных делителей
- *Дружественные числа:* два таких числа, каждое из которых равно сумме делителей другого. Пифагорейцам была известна лишь одна пара дружественных чисел:  
*220 и 284*

$$284=1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110 \text{ (сумма делителей числа 220).}$$

$$220=1+2+4+71+142 \text{ (сумма делителей числа 284).}$$

## *Числа близнецы*

*• Числа близнецы - пары простых чисел с разностью, равной двум (в пределах первой сотни):*

*3 и 5, 5 и 7, 11 и 13, 17 и 19, 29 и 31, 41 и 43, 59 и 61, 71 и 73*

*• Среди них имеются пары очень больших чисел. На 2005г. рекордсменами считались близнецы  $33218925 \cdot 2^{169690} \pm 1$ , найденные с помощью ЭВМ*

*• До сих пор неизвестно, конечно или бесконечно множество пар близнецов*

- *Учение о целых числах всегда казалось учёным неисчерпаемым полем для исследований и во все времена привлекало к себе внимание наиболее выдающихся умов*

*«Эта особенность теории чисел вместе с неисчислимым богатством её, которым она столь сильно превосходит другие отрасли математики, придаёт высшей арифметике неотразимое очарование, сделавшее её любимой наукой величайших математиков»*  
(Гаусс)



*Иога́нн Карл Фри́дрих Га́усс (1777 — 1855 гг.) — немецкий математик, механик, физик, астроном и геодезист*

# *Отношение делимости. Делимость целых чисел*



- *В Италии существует поговорка «Трудное дело деление». Так обычно говорят, когда оказываются перед почти неразрешимой проблемой*
- *В Средние века людей, умевших производить деление, можно было пересчитать чуть ли не по пальцам. Их уважительно называли «магистрами деления». Они переезжали из города в город по приглашениям купцов, желавших привести в порядок свои счета*

## *Старинная восточная притча*

*Давным-давно жил-был старик, который, умирая, оставил своим трём сыновьям 19 верблюдов. Он завещал старшему сыну половину, среднему – четвёртую часть, а младшему – пятую. Не сумев найти решения самостоятельно (ведь задача в «целых верблюдах» решения не имеет), братья обратились к мудрецу*



## *Старинная восточная притча*

*- Нет ничего проще, - ответил им мудрец. –  
Возьмите моего верблюда и идите домой.*

*Братья дома легко разделили 20 верблюдов  
пополам, на 4 и на 5. Старший брат получил  
10, средний – 5, а младший – 4 верблюда. При  
этом один верблюд остался ( $10+5+4=19$ ).*

*Раздосадованные, братья вернулись к мудрецу и  
пожаловались:*

*- О мудрец, опять мы не выполнили волю отца!  
Вот этот верблюд – лишний.*

*- Это не лишний, - сказал мудрец, - это мой  
верблюд. Верните его и идите домой*





# Определение отношения делимости

*Пусть  $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ . Говорят, что  $a$  делится на  $b$ , если существует  $c \in \mathbb{Z}$ , что  $a = b \cdot c$*

- *Обозначают:  $a : b$*
- *Говорят также:  $b$  – делитель  $a$ ,  $b$  делит  $a$  (обозначают:  $b \mid a$ ),  $a$  кратно  $b$ .*



# *На 0 делить нельзя*

- *Число 0 не рассматривается в качестве делителя*
- *Действительно, если  $a \neq 0$ , то  $a = 0 \cdot q$  невозможно при любом  $q$*
- *Если же  $a = 0$ , то  $0 = 0 \cdot q$  верно при любом целом  $q$ . Однако в этом случае частное  $q$ , в отличие от остальных случаев, определяется не однозначно*
- *Если считать, что 0 делится на 0, то это создаёт определённые неудобства*



## *Пример*

- *Разложим в произведение выражение  $a^2 - a^2$  двумя способами:*

- *Имеем:*

$$a(a-a) = (a-a)(a+a)$$

- *Разделим обе части на  $(a-a)$  и получим:*

$$a = 2a$$

- *Ещё раз разделим на  $a$ , получим, что*

$$1 = 2$$

## *Свойства делимости*

1.  $a \div a$ , если  $a \neq 0$
2. Если  $a \div b$  и  $b \div c$ , то  $a \div c$
3. Если  $a \neq 0$ , то  $0 \div a$
4. Если  $a \neq 0$  и  $a \div b$ , то  $|a| \geq |b|$
5. Если  $1 \div b$ , то  $b = \pm 1$
6. Если  $a \div b$  и  $b \div a$ , то  $a = \pm b$
7.  $a \div 1$  для любого целого  $a$

## *Свойства делимости*

8. Если  $a \div c$  и  $b \div c$ , то  $(a \pm b) \div c$
9. Если  $a \div c$  и  $b \in \mathbf{Z}$ , то  $ab \div c$
10. Если  $a_1, a_2, \dots, a_n \div c$  и  $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbf{Z}$ , то  $(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n) \div c$
11. Если  $(a + b) \div c$  и  $b \div c$ , то  $a \div c$
12. Если  $(a + b) \div c$  и  $b \text{ не } \div c$ , то  $a \text{ не } \div c$
13. Если  $a \div c$  и  $b \div d$ , то  $(ab) \div cd$
14. Если  $a \div c$  и  $b \in \mathbf{N}$ , то  $(ab) \div cb$
15. Если  $(ab) \div cb$ , то  $a \div c$
16. Если  $a \div b$ , то  $\pm a \div (\pm b)$

## *Теорема о делении с остатком*

*Для любого целого числа  $a$  и любого целого  $b \neq 0$  существуют и единственные целые числа  $q$  и  $r$ , такие, что*

$$a = bq + r, \text{ где } 0 \leq r < |b|$$

*Число  $q$  называют неполным частным,  
 $r$  – остатком*



# Доказательство

1)  $b > 0$ . Рассмотрим числовую прямую и разобьем её на отрезки длины  $b$  точками  $0, \pm b, \pm 2b, \pm 3b, \dots$



Очевидно, что где бы ни было расположено число  $a$ , оно обязательно попадёт в один из полуинтервалов

$[bq, b(q+1))$ , где  $q$  – целое, так как числовая прямая – объединение всех таких полуинтервалов. То есть найдётся целое  $q$ , что  $bq \leq a < b(q+1)$ . К каждой части неравенства прибавим  $-bq$ , получим  $0 \leq a - bq < b$

Обозначим  $a - bq = r$ . Тогда  $a = bq + r$ ,  $0 \leq r < b = |b|$

2)  $b < 0$ . Тогда  $-b > 0$  и по доказанному для  $a$  и  $-b$  существуют целые  $q$  и  $r$ , что  $a = (-b)q + r$ ,  $0 \leq r < |-b|$ .

Откуда получаем:

$a = b(-q) + r$ , где  $0 \leq r < |b|$ . Существование  $q$  и  $r$  доказано

*Докажем единственность.*

• Пусть  $a = bq + r$ ,  $0 \leq r < |b|$ , и  $a = bq_1 + r_1$ ,  $0 \leq r_1 < |b|$

• Имеем:  $bq + r = bq_1 + r_1$ ,  $b(q - q_1) = r_1 - r$

□ Если  $q = q_1$ , то  $r_1 = r$   $\div b$

□ Если же  $q \neq q_1$ , то  $(r_1 - r)$  и, следовательно,  $|r_1 - r| \geq |b|$  (свойство делимости 5)

• Однако  $|r_1 - r| < |b|$  - противоречие

• Следовательно,  $q = q_1$ ,  $r_1 = r$





# Ребус

