



Лекция 4
Количество и сумма натуральных
делителей числа.
Критерий простоты.
Решето Эратосфена

Количество натуральных делителей числа

Теорема

Пусть $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}$ - каноническое разложение натурального числа n ($n > 1$)

Количество натуральных делителей числа n равно $\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_s + 1)$

Пример

$$\tau(60) = \tau(2^2 \cdot 3 \cdot 5) = (2+1)(1+1)(1+1) = 12$$

Сумма натуральных делителей числа

Теорема

Если $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}$ - каноническое разложение натурального числа n ($n > 1$), то сумма всех натуральных делителей числа n равна

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdot \dots \cdot \frac{p_s^{\alpha_s+1} - 1}{p_s - 1}$$



Примеры

$$\tau(1000000) = \tau(2^6 \cdot 5^6) = 7 \cdot 7 = 49;$$

$$\sigma(1000000) = \frac{2^7 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{5^7 - 1}{5 - 1};$$

$$\tau(4050) = \tau(2 \cdot 3^4 \cdot 5^2) = 2 \cdot 5 \cdot 3 = 30;$$

$$\sigma(4050) = \frac{2^2 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{3^5 - 1}{3 - 1} \cdot \frac{5^3 - 1}{5 - 1} = 11253.$$

Теорема (Евклида)

Множество простых чисел бесконечно

$$2 \cdot 3 + 1 = 7,$$

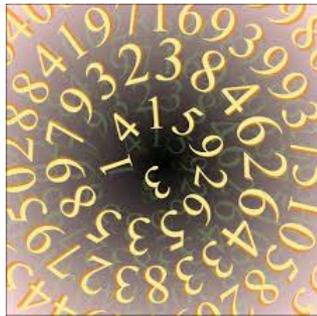
$$2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 31,$$

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 = 211,$$

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1 = 2311,$$

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031,$$

.....



Доказательство теоремы Евклида

- Предположим, что P – последнее, самое большое простое число*
- Рассмотрим натуральное число $M=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot \dots \cdot P+1$*
- Если число M составное, то оно должно иметь по крайней мере один простой делитель*
- Но этим делителем не может быть ни одно из простых чисел $2, 3, 5, \dots, P$, поскольку при делении M на каждое из них получается остаток 1*
- Следовательно, число M либо само простое, либо делится на простое число, большее P*
- Значит, предположение, что существует наибольшее простое число P , неверно и множество простых чисел бесконечно*

Теорема (критерий простоты)

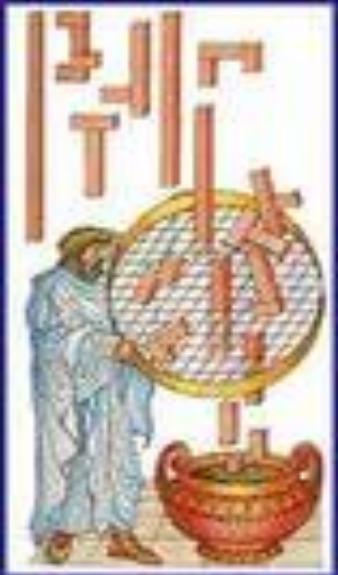
Если число $n > 1$ и не имеет простых делителей $p \leq \sqrt{n}$, то n – простое

Доказательство

- Если бы n было составным, то $n = ab$, где $1 < a < n$ и $1 < b < n$**
- Оба множителя не могут быть больше \sqrt{n} , иначе их произведение ab было бы больше n**
- Следовательно, хотя бы одно из чисел a и b не превышает \sqrt{n}**
- Если, например, число $a \leq \sqrt{n}$, то его простой делитель $p \leq \sqrt{n}$.**
- Таким образом, любое составное число имеет простой делитель, не превышающий \sqrt{n}**

Решето Эратосфена

Эратосфён Кирёнский (276 - 194 гг. до н.э.) — греческий математик, астроном, географ, филолог и поэт. Первый известный ученый, доказавший, что Земля имеет форму шара



	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

X	2	3	X	5	X	7	X	X	X
11	X	13	X	X	X	17	X	19	X
X	X	23	X	X	X	X	X	29	X
31	X	X	X	X	X	37	X	X	X
41	X	43	X	X	X	47	X	X	X
X	X	53	X	X	X	X	X	59	X
61	X	X	X	X	X	67	X	X	X
71	X	73	X	X	X	X	X	79	X
X	X	83	X	X	X	X	X	89	X
X	X	X	X	X	X	97	X	X	X