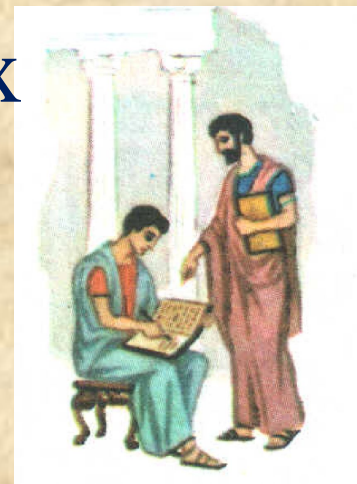
A spiral-bound notebook with a light brown, textured cover. The spiral binding is on the left side. The title is centered on the cover within a thin orange rectangular border.

ЗАДАЧИ НА
ПОСТРОЕНИЯ С
ПОМОЩЬЮ ЦИРКУЛЯ
И ЛИНЕЙКИ

Геометрические построения

– решение геометрических задач на построение геометрических фигур с помощью различных инструментов.

Древнегреческие математики считали истинно геометрическими лишь построения, производимые циркулем и линейкой. При этом они рассматривали линейку как неограниченную и одностороннюю, а циркулю приписывалось свойство чертить окружности любых размеров.



Ограничений средств
геометрических построений только
циркулем и линейкой придерживался
Евклид, хотя в «Началах» названия
циркуля и линейки он нигде не
упоминает.

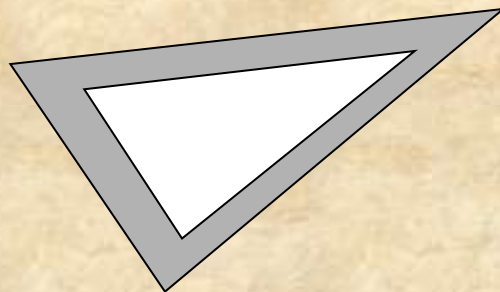
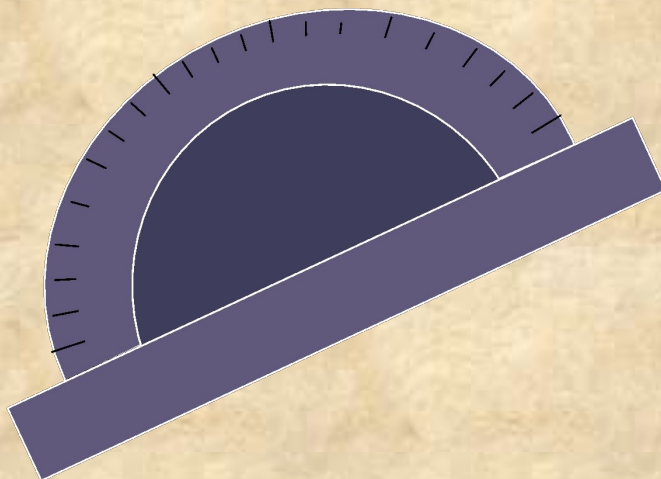
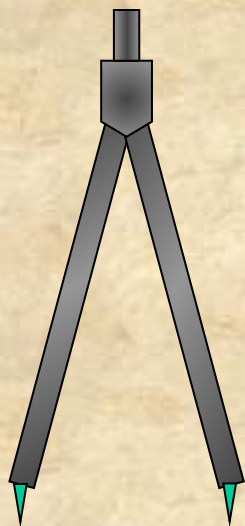


Леонардо да Винчи (1452-1519)



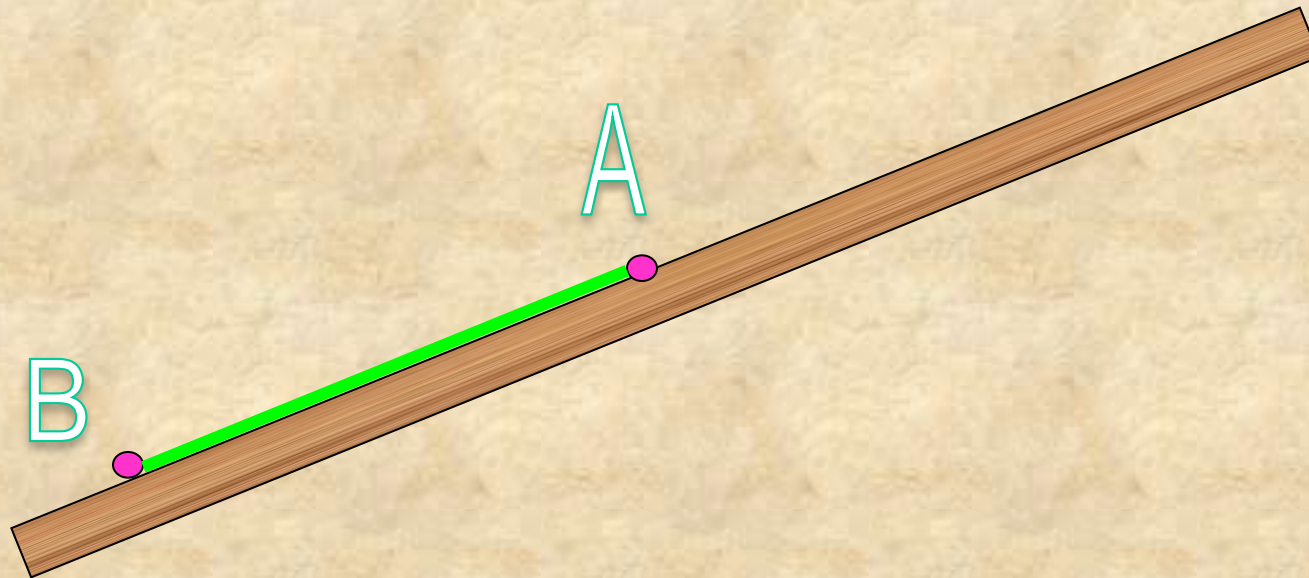
Леонардо да Винчи
рассматривал
построения
с помощью линейки и
циркуля постоянного
размаха

Укажите инструменты, используемые при классических построениях

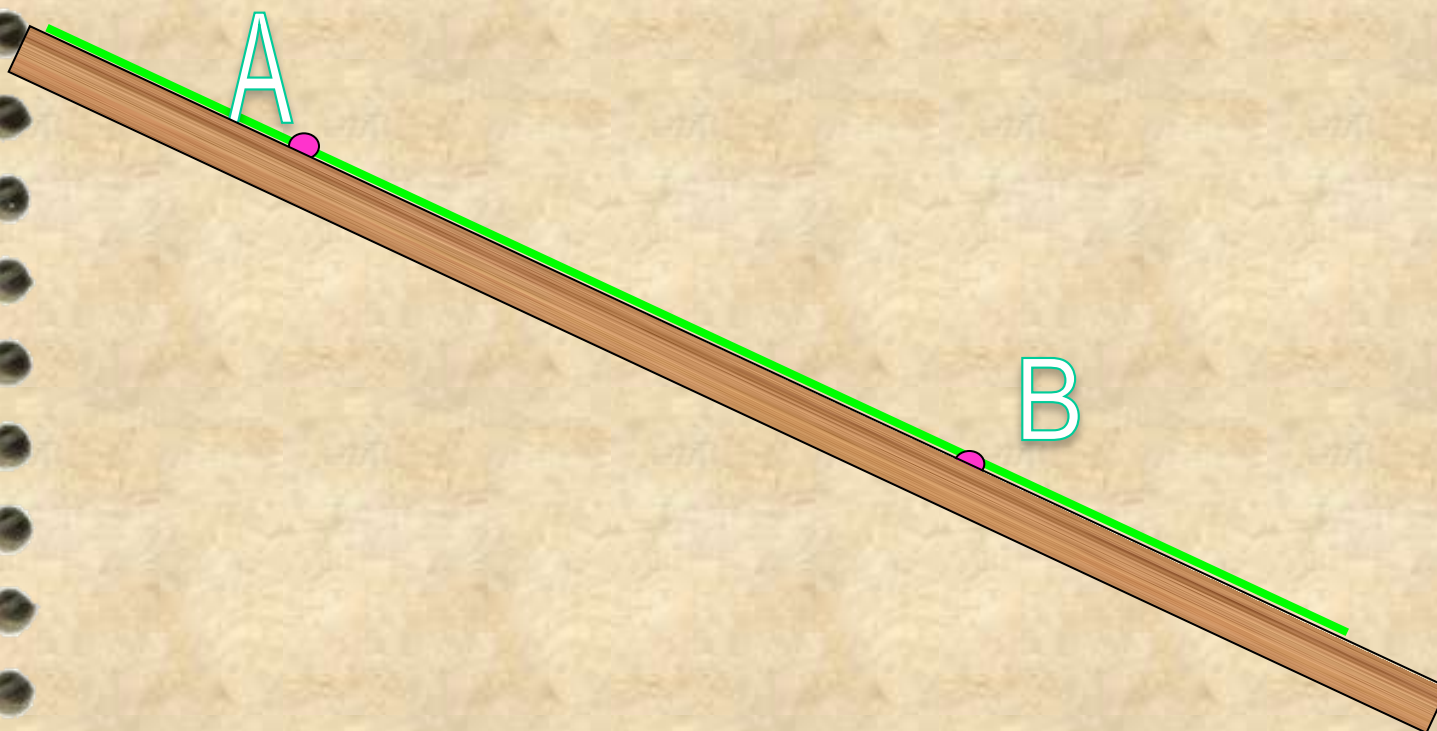


Линейка – инструмент для проведения прямой линии. Позволяет выполнить следующие построения:

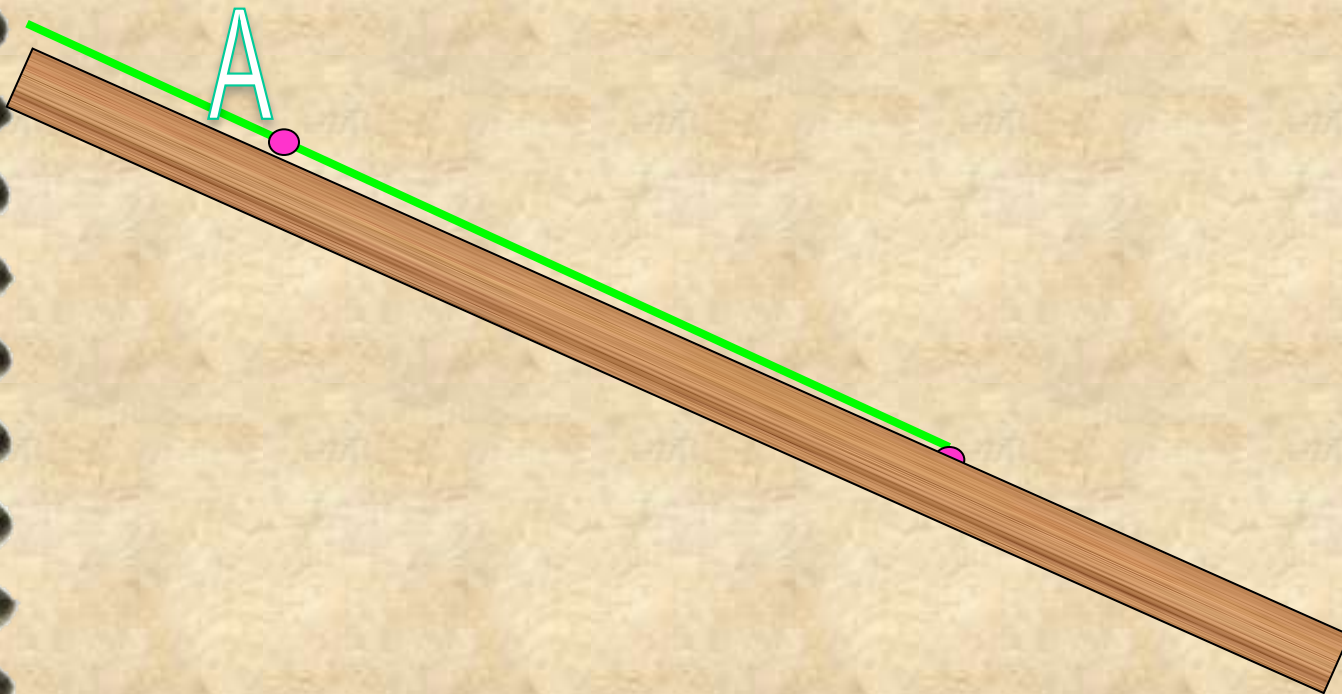
- построить отрезок, соединяющий две точки



- построить прямую, проходящую через две точки

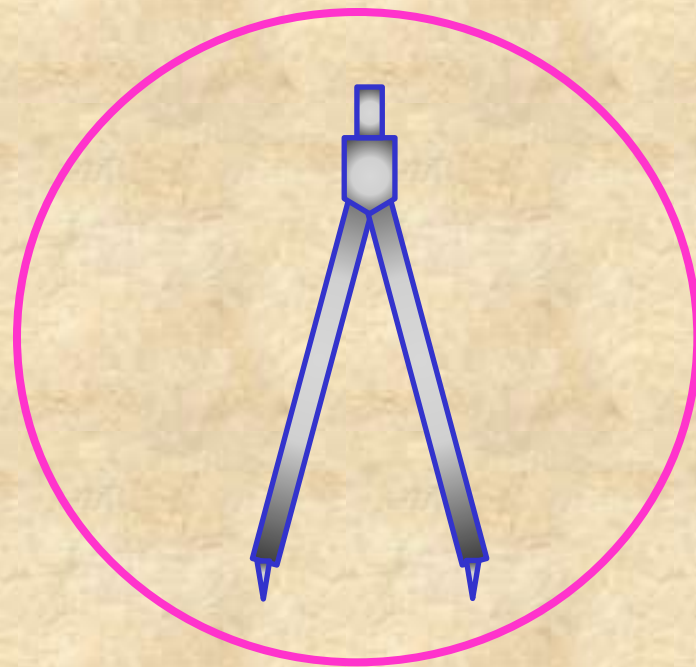


- построить луч, исходящий из точки и проходящий через другую точку

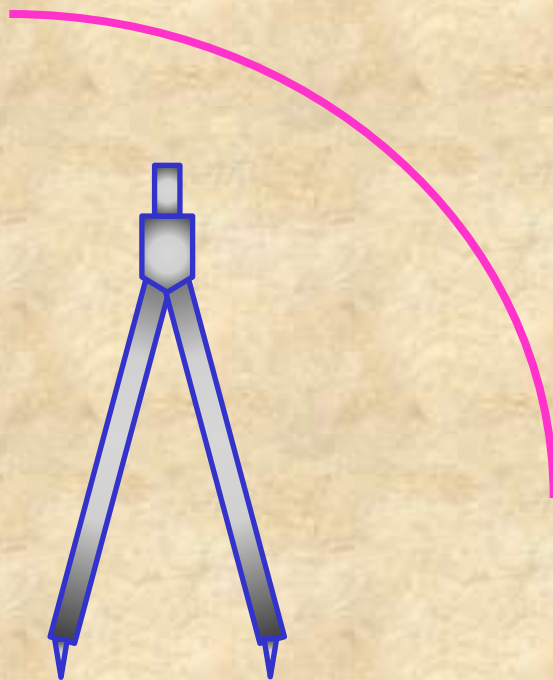


Циркуль – инструмент для вычерчивания окружностей и их дуг. Позволяет выполнить следующие построения:

- построить окружность с заданным центром и радиусом



- построить дугу окружности



Условные обозначения

$\text{окр}(O; r)$ - окружность с центром в точке O и радиусом r

\sphericalangle - знак угла

\in - знак принадлежности

\perp - знак перпендикулярности

\cap - знак пересечения

$\{ \}$ - в скобках указано множество точек пересечения

$:$ - заменяет слова "такой что"

Задача 1

На данном луче от его начала
отложить отрезок, равный данному

Дано:

Луч h , O - начало

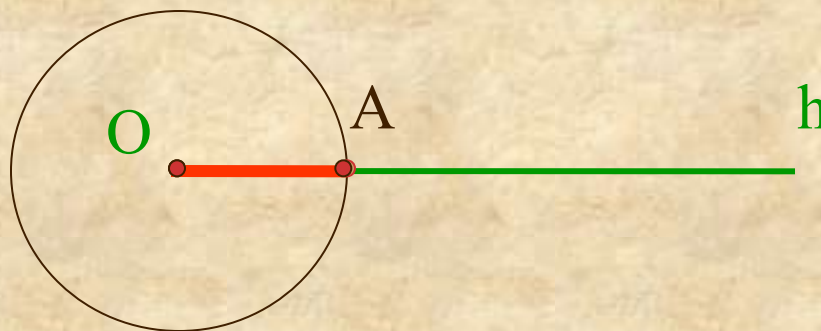
PQ -отрезок

P — Q

Построить:

OA : $A \in h$

$OA = PQ$



Построение:

1. $\text{окр}(O; PQ)$

2. $h \cap \text{окр}(O; PQ) = \{A\}$

3. OA -искомый

Задача 2

Построить середину данного отрезка

Дано:

AB-отрезок

Построить:

O: $O \in AB$
 $OA = OB$

Построение:

1. $\text{окр}(A; AB)$

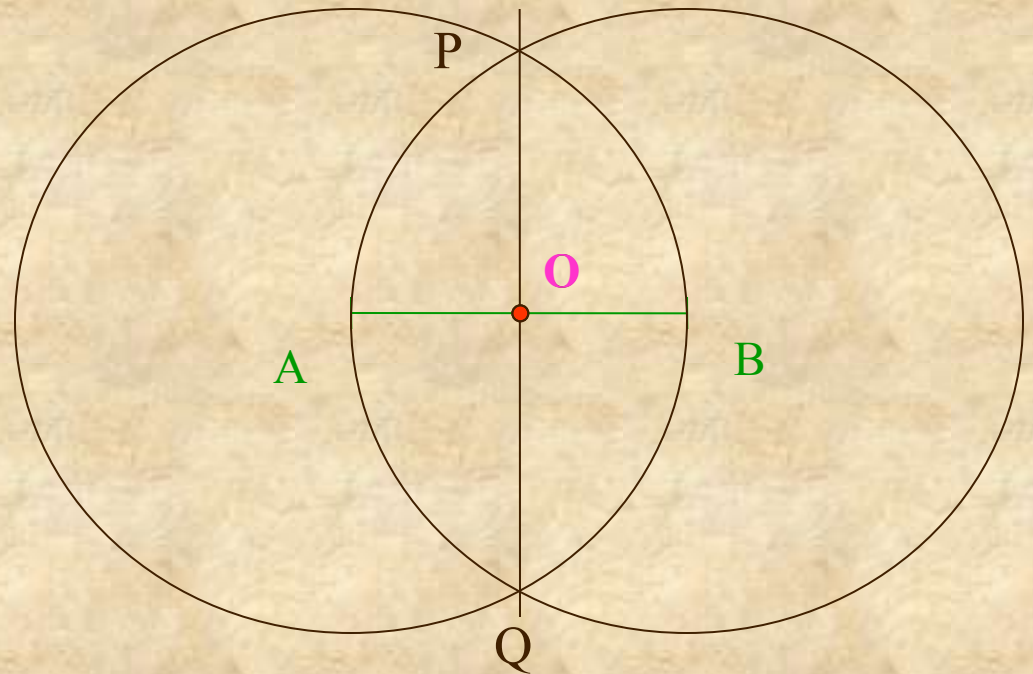
2. $\text{окр}(B; BA)$

3. $\text{окр}(A; AB) \cap \text{окр}(B; BA) = \{P; Q\}$

4. PQ-прямая

5. $PQ \cap AB = \{O\}$

6. O- искомая точка



Задача 2

Построить середину данного отрезка

Дано:

АВ-отрезок

Построить:

О: $O \in AB$
 $OA = OB$

Доказательство:

$\triangle ARQ = \triangle BRQ$ (по трем сторонам)

так как 1) $AR = BR = r$

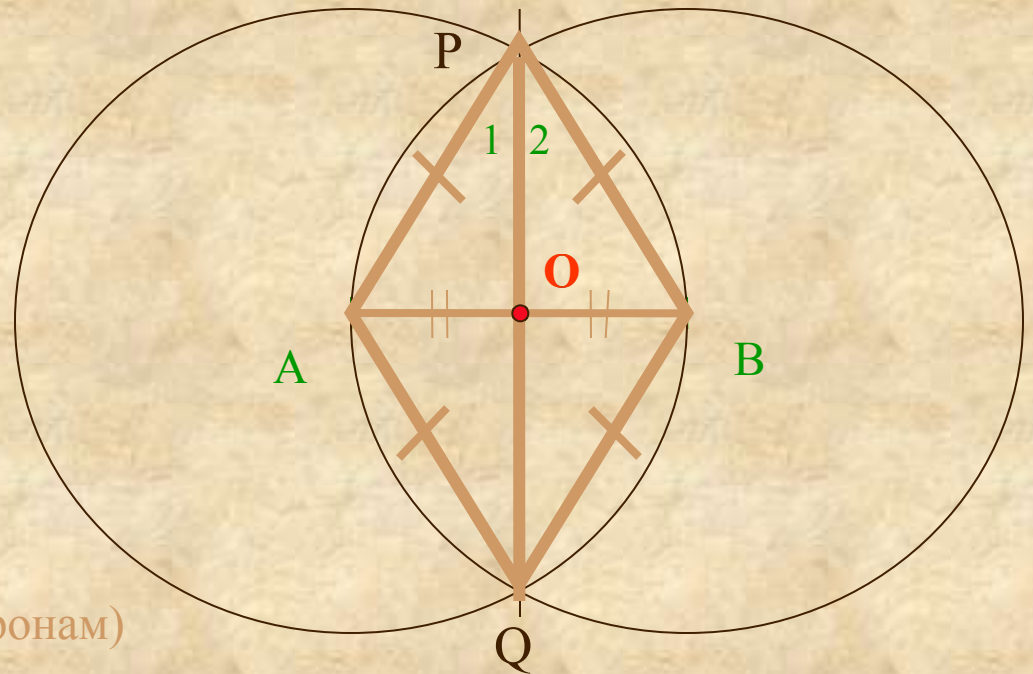
2) $AQ = BQ = r$

3) RQ -общая

Следовательно, $\angle 1 = \angle 2$

Значит, RO -биссектриса равнобедренного $\triangle ARB$.

Значит, RO и медиана $\triangle ARB$. То есть, O -середина AB .



Задача 3 Построить прямую, проходящую через данную точку и перпендикулярную к данной прямой

Дано:

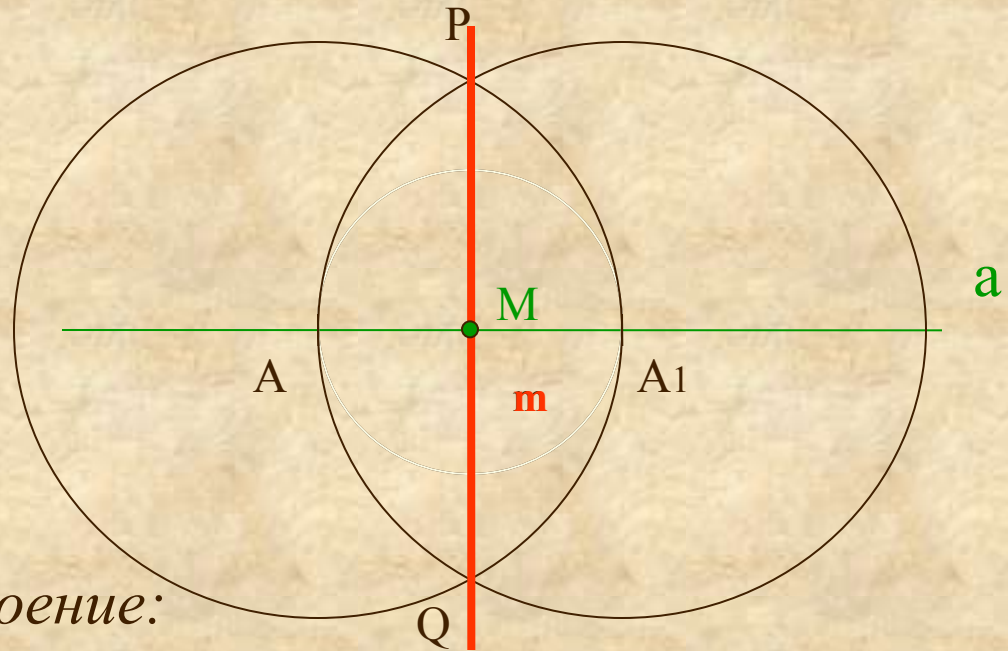
прямая a

точка M

Построить:

m : $M \in m$
 $m \perp a$

точка M принадлежит прямой a



Построение:

1. $\text{окр}(M; r)$; r -любой
2. $\text{окр}(M; r) \cap a = \{A; A_1\}$
3. $\text{окр}(A; AA_1)$
4. $\text{окр}(A_1; A_1A)$
5. $\text{окр}(A; AA_1) \cap \text{окр}(A_1; A) = \{P; Q\}$
6. прямая $PQ = m$
7. m -искомая

Задача 3 Построить прямую, проходящую через данную точку и перпендикулярную к данной прямой

Дано:

прямая a

точка M

Построить:

m : $M \in m$
 $m \perp a$

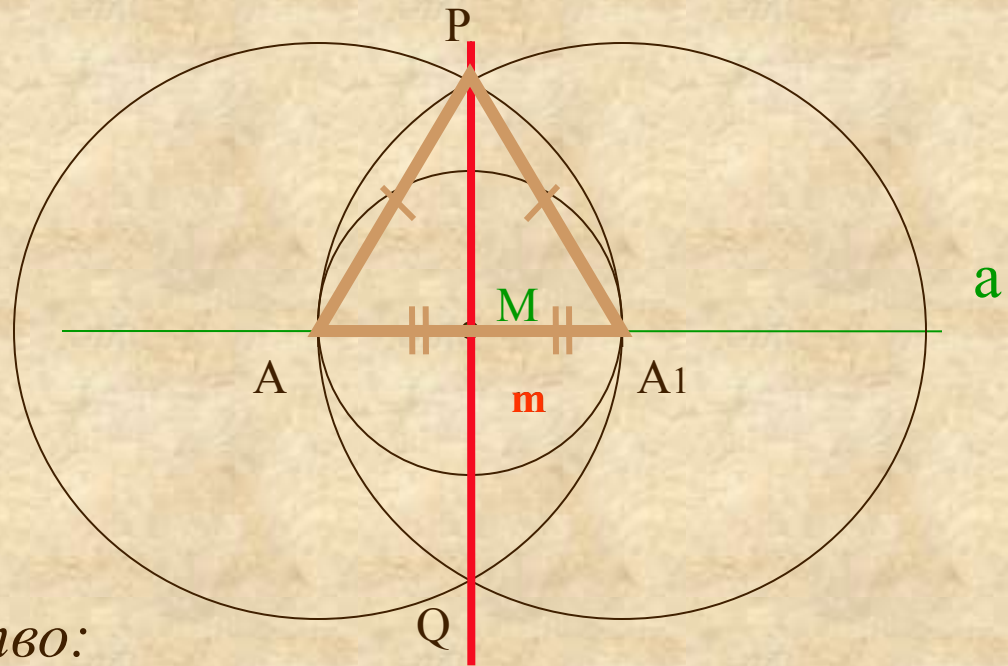
Доказательство:

$\triangle ARA_1$ -равнобедренный ($AR=A_1R=r$)

RM -медиана ($MA=MA_1=r_1$)

Значит, RM -высота $\triangle ARA_1$. То есть, $RQ \perp a$.

точка M принадлежит прямой a



Задача 4 Построить прямую, проходящую через данную точку и перпендикулярную к данной прямой

Дано:

прямая a

точка M

точка M не принадлежит прямой a

Построить:

m : $M \in m$
 $m \perp a$



Построение:

1. окр(M ; r)
2. окр(M ; r) \cap $a = \{A; A_1\}$
3. окр(A ; AM)
4. окр(A_1 ; A_1M)
5. окр(A ; AM) \cap окр(A_1 ; A_1M) = $\{M; Q\}$
6. прямая $MQ = m$
7. m -искомая

Задача 4 Построить прямую, проходящую через данную точку и перпендикулярную к данной прямой

Дано:

прямая a

точка M

Построить:

m : $M \in m$

$m \perp a$

Доказательство:

$\triangle AMQ = \triangle A_1MQ$ (по трем сторонам)

так как 1) $AM = A_1M = r$

2) $AQ = A_1Q = r$

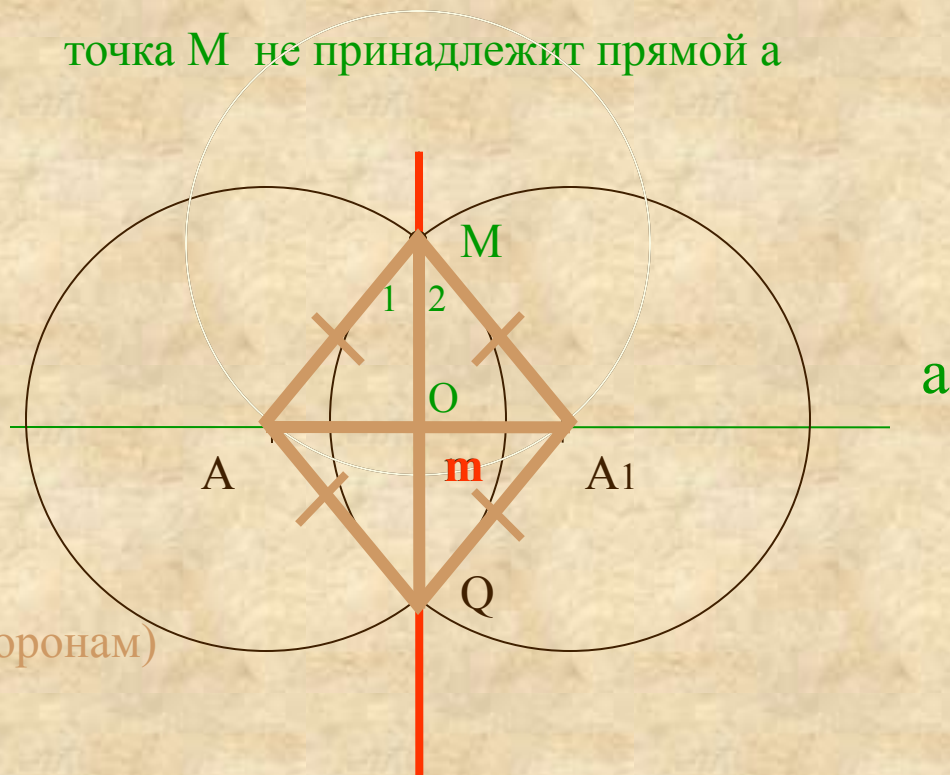
3) MQ -общая

Следовательно, $\angle 1 = \angle 2$.

Тогда, MO -биссектриса равнобедренного $\triangle AMA_1$.

Значит, MO и высота $\triangle AMA_1$. Тогда, $MQ \perp a$.

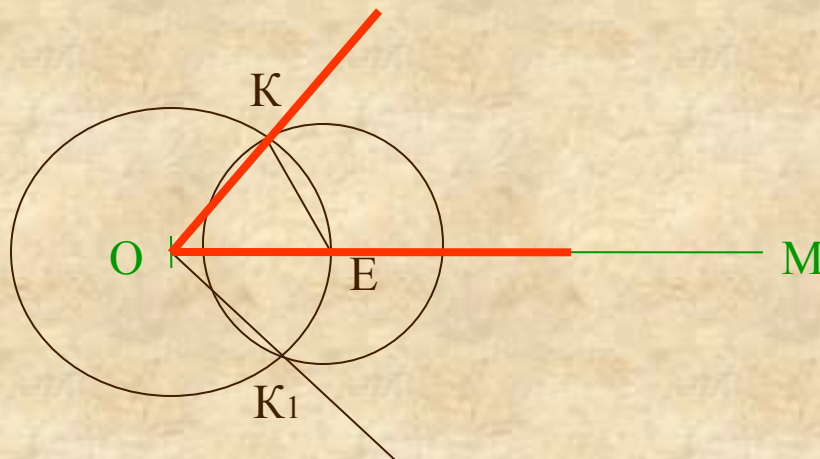
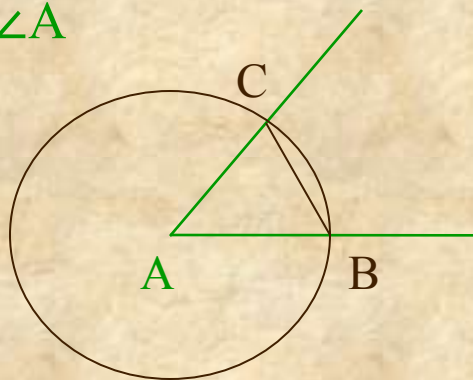
точка M не принадлежит прямой a



Задача 5 Отложить от данного луча угол, равный
данному

Дано:

луч OM
 $\angle A$



Построить:

$\angle KOM = \angle A$

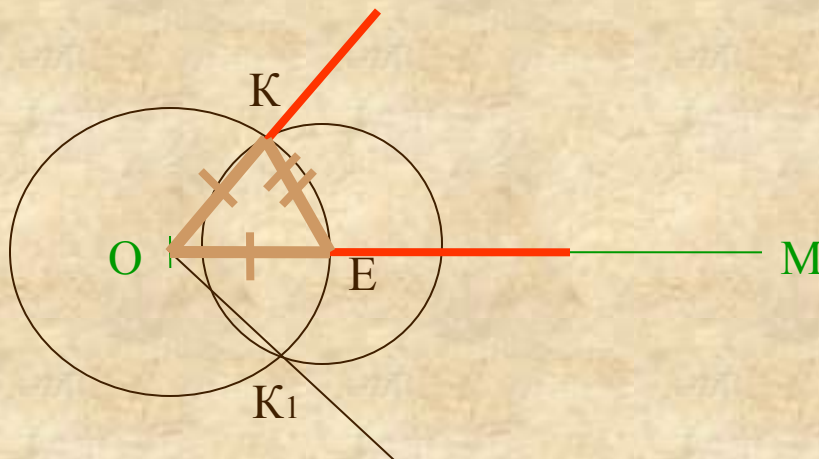
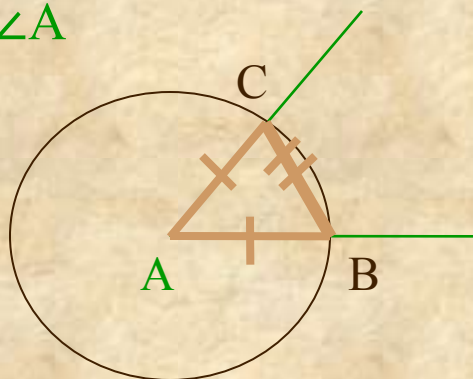
Построение:

1. $\text{окр}(A, \gamma)$; γ -любой
2. $\text{окр}(A, \gamma) \cap \angle A = \{B; C\}$
3. $\text{окр}(O, \gamma)$
4. $\text{окр}(O, \gamma) \cap OM = \{E\}$
5. $\text{окр}(E, BC)$
6. $\text{окр}(E, BC) \cap \text{окр}(O, \gamma) = \{K; K_1\}$
7. луч OK ; луч OK_1
8. $\angle KOM$ -искомый

Задача 5 Отложить от данного луча угол, равный данному

Дано:

луч OM
 $\angle A$



Доказательство:

Построить:

$\angle KOM = \angle A$

$\triangle ABC = \triangle OЕК$ (по трем сторонам)

так как 1) $AB = OE = \Gamma$

2) $AC = OK = \Gamma$

3) $BC = EK = \Gamma_1$

Следовательно, $\angle KOM = \angle A$

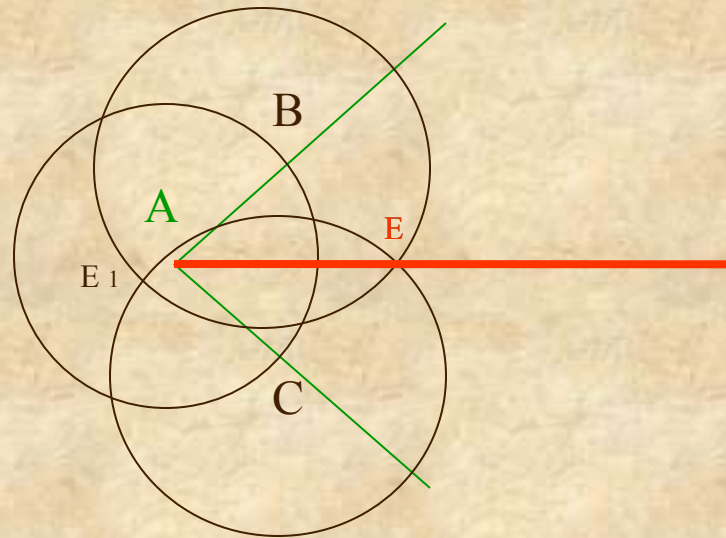
Задача 6 Построить биссектрису данного угла

Дано:

$\angle A$

Построить:

Луч AE -биссектрису $\angle A$



Построение:

1. $\text{окр}(A; r)$; r -любой
2. $\text{окр}(A; r) \cap \angle A = \{B; C\}$
3. $\text{окр}(B; r_1)$
4. $\text{окр}(C; r_1)$
5. $\text{окр}(B; r_1) \cap \text{окр}(C; r_1) = \{E; E_1\}$
6. E -внутри $\angle A$
7. AE -луч
8. AE -искомый

Задача 6 Построить биссектрису данного угла

Дано:

$\angle A$

Построить:

Луч AE -биссектрису $\angle A$

Доказательство:

$\triangle ABE = \triangle ACE$ (по трем сторонам)

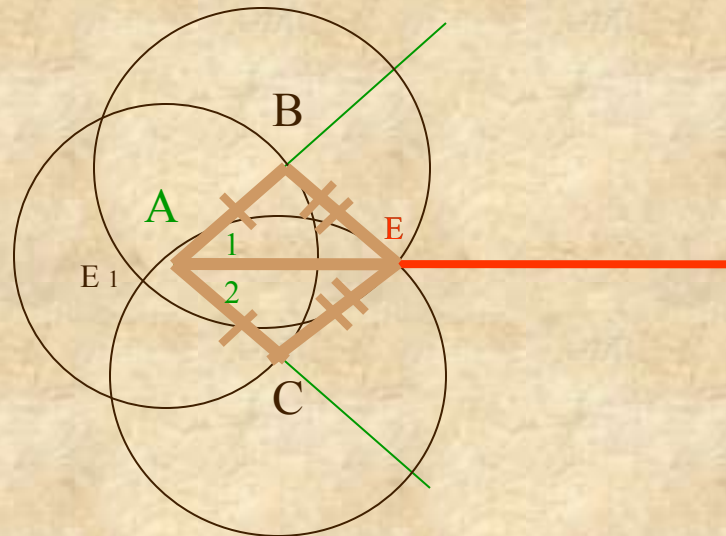
так как 1) $AC = AB = r$

2) $CE = BE = r_1$

3) AE -общая

Следовательно, $\angle 1 = \angle 2$.

Значит, AE -биссектриса $\angle A$.



Древнегреческие математики достигли
большого искусства в *геометрических*
построениях с помощью циркуля и линейки.

Однако три задачи не поддавались их усилиям.
Прошли тысячелетия, и только в наше время, наконец,
были получены их решения.



● Квадратура круга

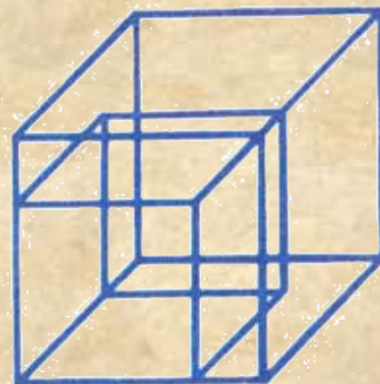


Великие задачи древности

● Трисекция угла

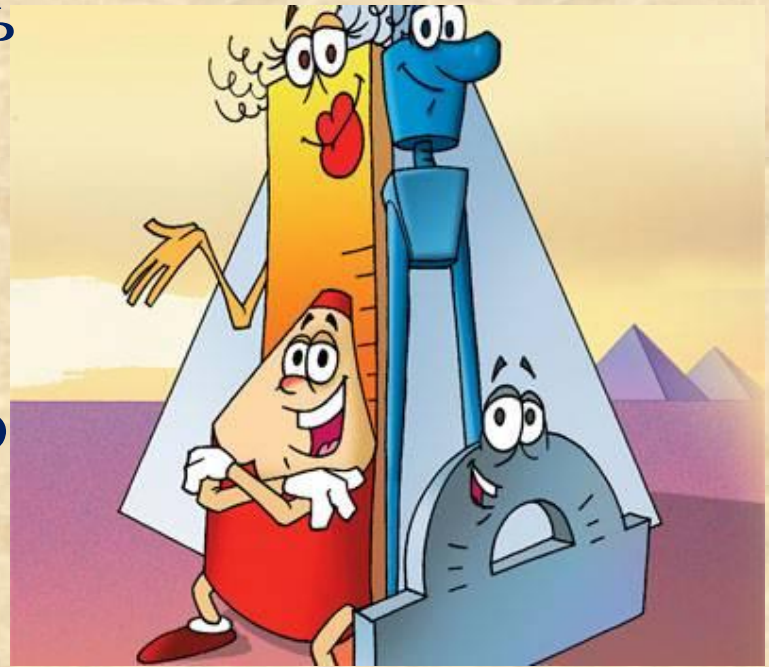


● Удвоение куба



В конце концов было доказано, что эти задачи невозможно решить, пользуясь только циркулем и линейкой. Но уже сама постановка задачи — «доказать неразрешимость» — была смелым шагом вперёд.

Вместе с тем предлагалось множество решений при помощи нетрадиционных инструментов. Всё это привело к возникновению и развитию совершенно новых идей в геометрии и алгебре.



Желаю успехов!