Скалярное произведение векторов

$$(\vec{a},\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\,\vec{b}$$

Определение. Скалярное произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вычисляется по формуле

$$\boxed{(\vec{a},\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})}$$

$$(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \varphi \text{ – угол между } \vec{a},\ \vec{b}$$

$$(\vec{a},\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$$

Результатом **скалярного** произведения является **число**, т.е. **скалярная величина**.

Теорема. **Свойства скалярного произведения**. *Имеют место следующие соотношения:*

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, тогда и только тогда, когда $\vec{a} \perp \vec{b}$;
2. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$, $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$;
3. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
4. $\lambda \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \lambda \vec{b}$, λ — число;
5. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \text{пр}_{\vec{b}}\, \vec{a} \cdot |\vec{b}| = \text{пр}_{\vec{a}}\, \vec{b} \cdot |\vec{a}|$;
6. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$;
7. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \{a_1; a_2; a_3\} \cdot \{b_1; b_2; b_3\} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$;
   вид скалярного произведения через координаты сомножителей;
8. $\cos\varphi = \dfrac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$

Доказательство.

1. Если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0$

Если $\vec{a} = \vec{O}$ или $\vec{b} = \vec{O}$, то по определению $\vec{a} \perp \vec{b}$

2.

$$(\widehat{\vec{a}, \vec{a}}) = 0, \quad \cos 0 = 1, \quad \vec{a}\,\vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot 1 = |\vec{a}|^2$$

3.

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \cos\varphi = \cos(-\varphi) = \cos(\widehat{\vec{b}, \vec{a}}) \implies \vec{a}\,\vec{b} = \vec{b}\,\vec{a}$$

4. Самостоятельно – два случая: $\lambda > 0$ и $\lambda < 0$.

5. По определению

$$\text{пр}_{\vec{b}}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi,$$

поэтому

$$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi = |\vec{a}|\cos\varphi|\vec{b}| = \text{пр}_{\vec{b}}\,\vec{a}\,|\vec{b}|$$

6. $$(\vec{a}+\vec{b})\vec{c} = \text{пр}_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b})|\vec{c}| =$$
$$= \left(\text{пр}_{\vec{c}}\,\vec{a} + \text{пр}_{\vec{c}}\,\vec{b}\right)|\vec{c}| =$$
$$= \text{пр}_{\vec{c}}\,\vec{a}\,|\vec{c}| + \text{пр}_{\vec{c}}\,\vec{b}\,|\vec{c}| = \vec{a}\,\vec{c} + \vec{b}\,\vec{c}$$

7. $$\vec{a}\cdot\vec{b} = \{a_1; a_2; a_3\}\cdot\{b_1; b_2; b_3\} =$$
$$= (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k})\cdot(b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) =$$
$$= a_1b_1\vec{i}\,\vec{i} + a_1b_2\vec{i}\,\vec{j} + a_1b_3\vec{i}\,\vec{k} +$$
$$+ a_2b_1\vec{j}\,\vec{i} + a_2b_2\vec{j}\,\vec{j} + a_2b_3\vec{j}\,\vec{k} +$$
$$+ a_3b_1\vec{k}\,\vec{i} + a_3b_2\vec{k}\,\vec{j} + a_3b_3\vec{k}\,\vec{k} =$$
$$= \left[\begin{array}{c} \vec{i}\,\vec{i} = \vec{j}\,\vec{j} = \vec{k}\,\vec{k} = 1 \\ \vec{i}\,\vec{j} = \vec{i}\,\vec{k} = \vec{j}\,\vec{k} = 0 \end{array}\right] =$$
$$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = \vec{a}\cdot\vec{b}$$

8. $$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi \quad\Longrightarrow\quad \cos\varphi = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

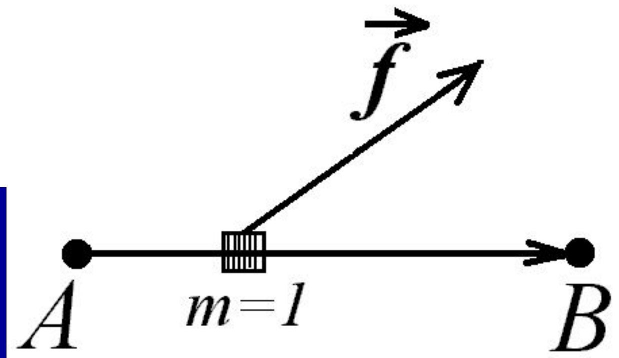
$$(\vec{a},\vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3;$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2};\quad |\vec{b}| = \sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}$$

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

Механический смысл скалярного произведения. *Если тело единичной массы под дествием постоянной силы $\vec{f}$ перемещается из точки A в точку B вдоль прямой, то совершаемая при этом работа W есть скалярное произведение вектора силы на вектор перемещения:*

$$W = \vec{f}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}\cdot\vec{f}$$

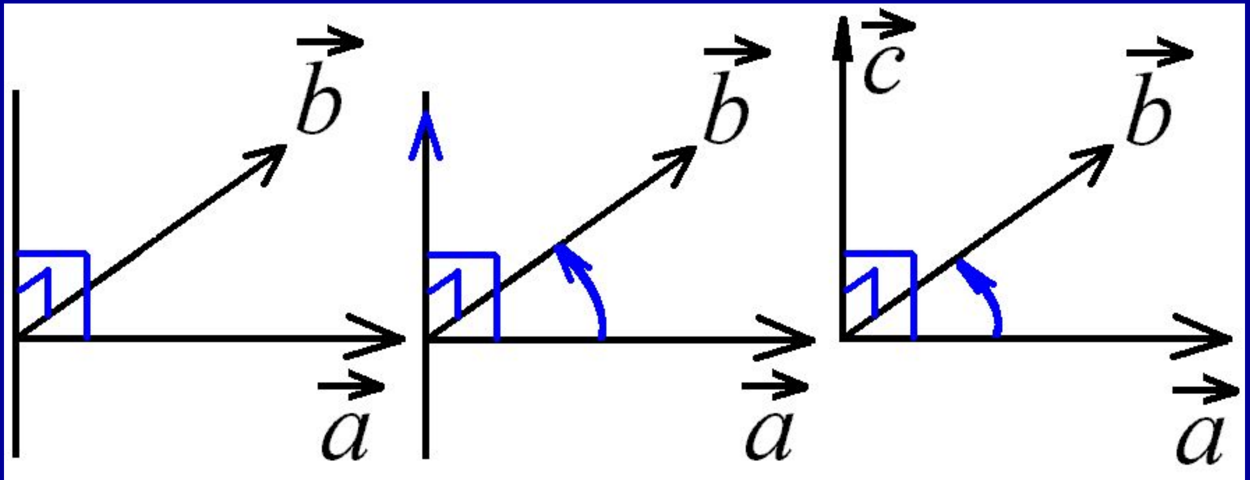


Векторное произведение векторов

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a} \times \vec{b}$$

Определение. Результат векторного произведения двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ есть третий **вектор** $\vec{c}$: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ — однозначно определяемый следущими тремя условиями:

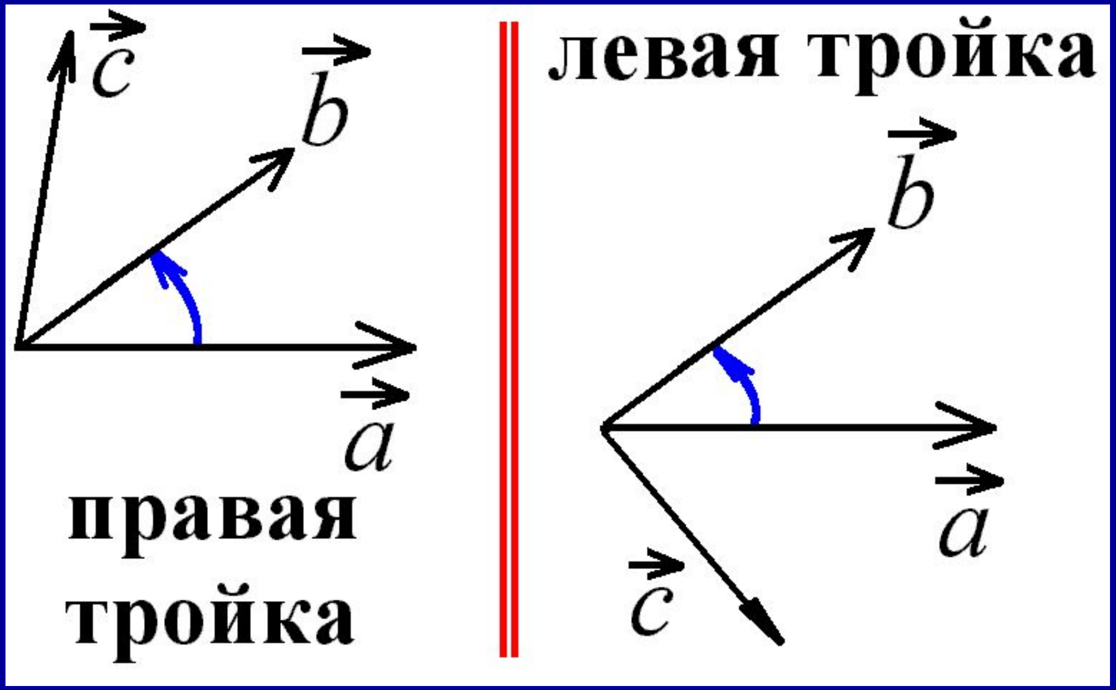
1. $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$;
2. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — правая тройка векторов;
3. $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$



Определение.

Тройка векторов называется **правой**, если кратчайший поворот от первого вектора ко второму из конца третьего вектора наблюдается **против хода часовой стрелки**.

Тройка векторов называется **левой**, если кратчайший поворот от первого вектора ко второму из конца третьего вектора наблюдается **по ходу часовой стрелки**.



Теорема. **Свойства векторного произведения**. *Имеют место следующие соотношения:*

1. $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{O}$, если $\vec{a} \parallel \vec{b}$;
2. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$;
3. $\lambda[\vec{a}, \vec{b}] = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$, λ — число;
4. $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$;
5. $|\vec{a} \times \vec{b}| = S_{\Diamond ABCD}$;
6. $\{a_1; a_2; a_3\} \times \{b_1; b_2; b_3\} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

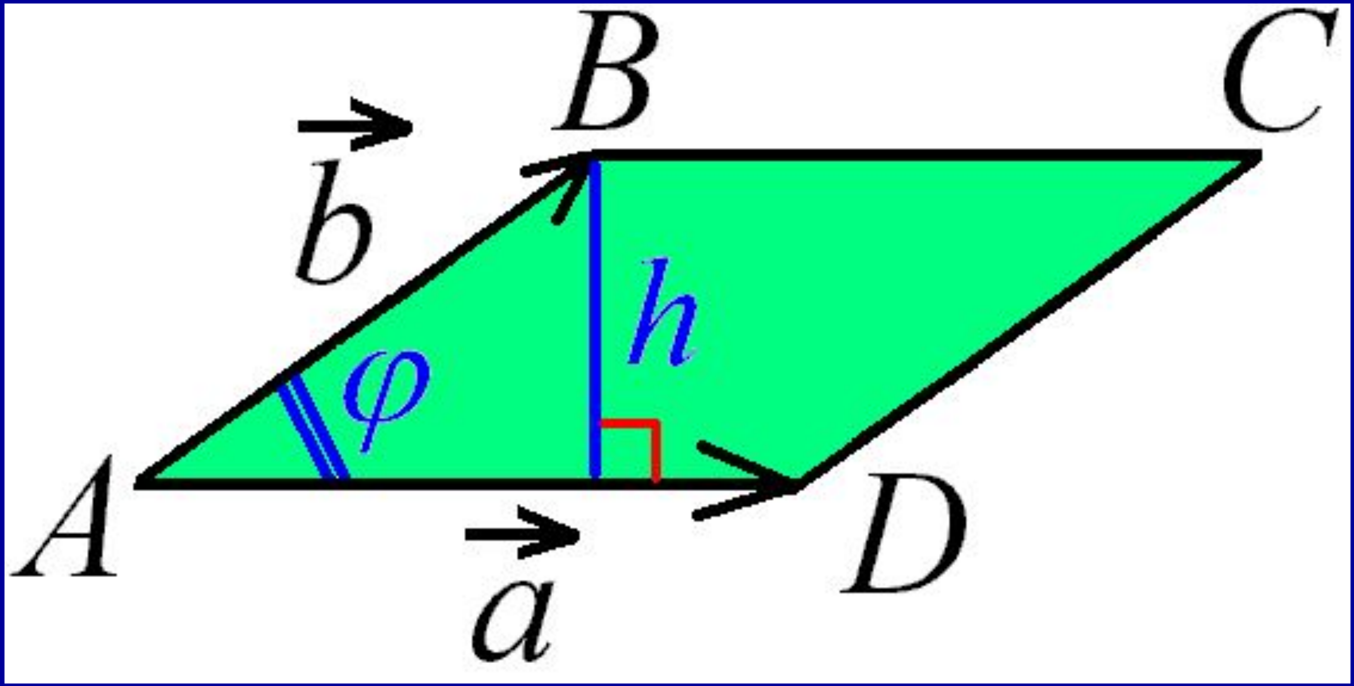
Доказательство.

1. Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\varphi = 0$, $\sin 0 = 0$.

2.
$$(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = -(\widehat{\vec{b}, \vec{a}}) \implies \vec{b},\ \vec{a},\ -\vec{c} \quad \text{правая}$$

3,4 – без доказательства.

5. $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi = |\vec{a}| \cdot h = S_{\Diamond ABCD}$



6. Вид векторного произведения через координаты сомножителей – **правило для запоминания**

$$\vec{a} = \{a_1; a_2; a_3\}, \quad \vec{b} = \{b_1; b_2; b_3\}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} =$$

определитель нужно раскрыть по первой строке

$$= \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + (-1)\vec{j} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} =$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2)\vec{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\vec{k} =$$

$$= c_1 \vec{i} + c_2 \vec{j} + c_3 \vec{k} = \{c_1; c_2; c_3\} = \vec{c}$$

Доказательство формулы:

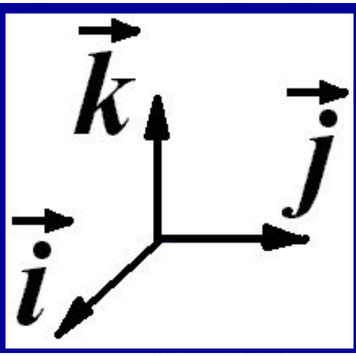
$$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=(a_1\overrightarrow{i}+a_2\overrightarrow{j}+a_3\overrightarrow{k})\times(b_1\overrightarrow{i}+b_2\overrightarrow{j}+b_3\overrightarrow{k})=$$

$$=a_1b_1\overrightarrow{i}\times\overrightarrow{i}+a_1b_2\overrightarrow{i}\times\overrightarrow{j}+a_1b_3\overrightarrow{i}\times\overrightarrow{k}+$$

$$+a_2b_1\overrightarrow{j}\times\overrightarrow{i}+a_2b_2\overrightarrow{j}\times\overrightarrow{j}+a_2b_3\overrightarrow{j}\times\overrightarrow{k}+$$

$$+a_3b_1\overrightarrow{k}\times\overrightarrow{i}+a_3b_2\overrightarrow{k}\times\overrightarrow{j}+a_3b_3\overrightarrow{k}\times\overrightarrow{k}=$$

$\times$	$\overrightarrow{i}$	$\overrightarrow{j}$	$\overrightarrow{k}$
$\overrightarrow{i}$	$\overrightarrow{0}$	$\overrightarrow{k}$	$-\overrightarrow{j}$
$\overrightarrow{j}$	$-\overrightarrow{k}$	$\overrightarrow{0}$	$\overrightarrow{i}$
$\overrightarrow{k}$	$\overrightarrow{j}$	$-\overrightarrow{i}$	$\overrightarrow{0}$



$$=a_1b_1\overrightarrow{O}+a_1b_2\overrightarrow{k}+a_1b_3\left(\overrightarrow{-j}\right)+$$

$$+a_2b_1\left(\overrightarrow{-k}\right)+a_2b_2\overrightarrow{O}+a_2b_3\overrightarrow{i}+$$

$$+a_3b_1\overrightarrow{j}+a_3b_2\left(\overrightarrow{-i}\right)+a_3b_3\overrightarrow{O}=$$

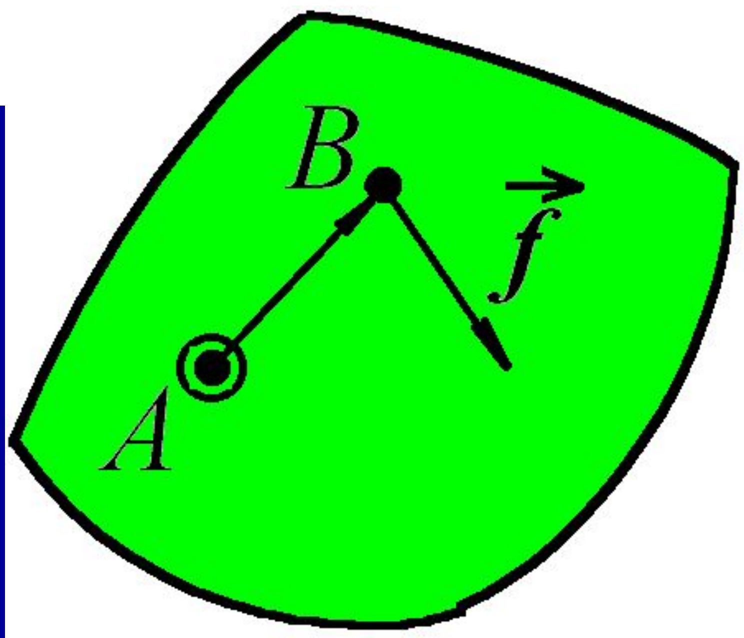
$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k} =$$

$$= \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

Механический смысл векторного произведения. Тело закреплено в точке A, в точке B приложена сила $\vec{f}$, поэтому тело крутится.

$$M_A\vec{f} = \overrightarrow{AB} \times \vec{f}$$

$\overrightarrow{AB}$ – вектор-плечо



Смешанное произведение

Определение. $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}$

$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{d}$ – вектор; $\vec{d} \cdot \vec{c}$ – число;

результат смешанного произведения – **число, скаляр**

Вид через координаты сомножителей

Пусть $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$, $\vec{c} = \{c_1, c_2, c_3\}$

$$(\vec{a} \times \vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \boxed{c_1 \; c_2 \; c_3} \end{vmatrix} = c_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} =$$

$$= c_1 d_1 + c_2 d_2 + c_3 d_3 = \vec{d} \cdot \vec{c};$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{d} = \{d_1\, d_2, d_3\} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Свойства смешанного произведения:

1.
$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

Если определитель раскрыть по первой строке, то

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{a} \cdot \vec{f} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

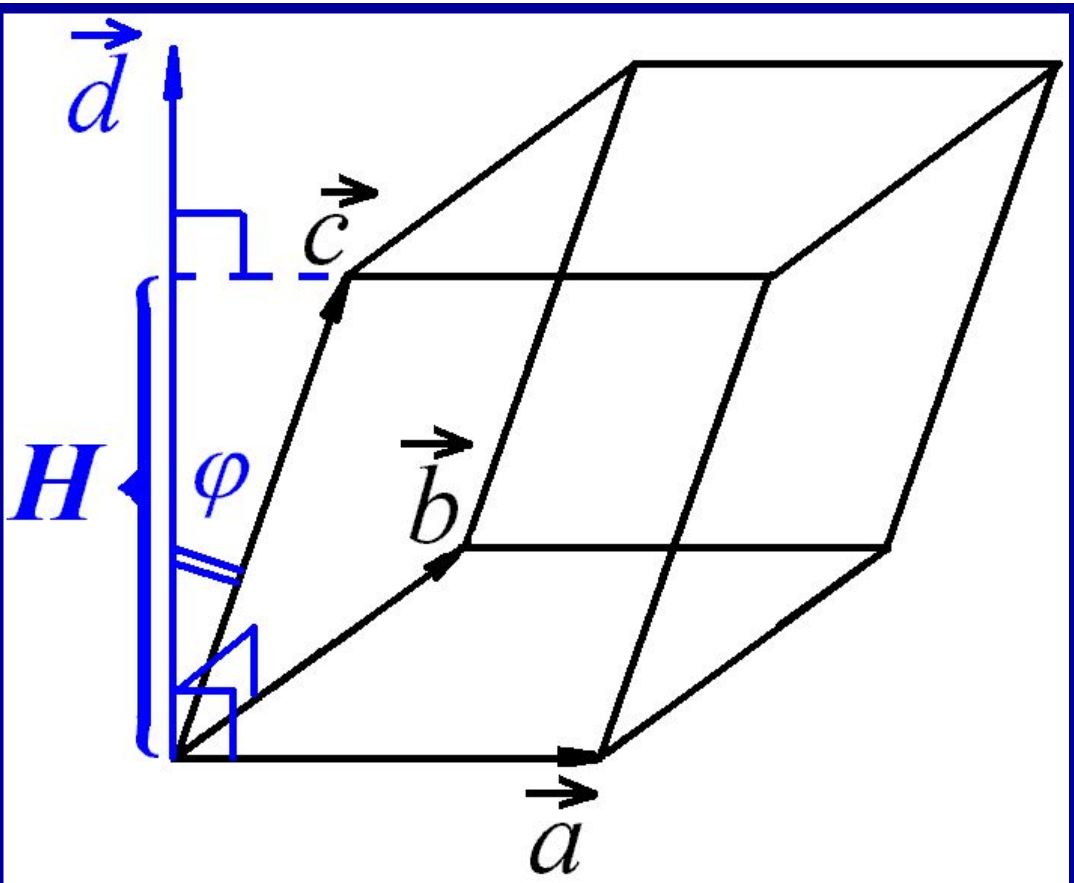
2.
$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = -\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c} = \vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}$$

по свойству определителей.

3. $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \pm V_{\text{пар}} = \pm 6V_{\text{пир}}$

$V_{\text{пар}}$ – объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \vec{d}\,\vec{c} = |\vec{d}||\vec{c}|\cos\varphi = S_{\lozenge ABCD}\cdot(\pm H) = \pm V_{\text{пар}}$$



$V_{\text{пир}}$ – объем пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot S_{\Diamond ABCD} \cdot H = \frac{1}{6} \cdot V_{\text{пар}}$$

4. $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = 0$ тогда и только тогда, когда все три вектора лежат в одной плоскости, т.е. компланарны.

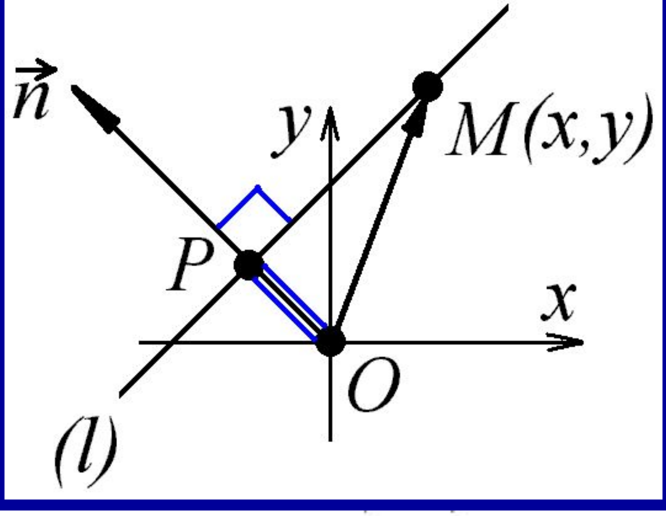
Механического смысла у смешанного произведения **нет**.

Прямая на плоскости

Теорема. *Любая прямая на плоскости задается линейным уравнением:*

$$(\ell) : \quad Ax+By+D=0; \;\; A,\ B,\ D \text{ – const}; \;\; A^2+B^2 \neq 0 \qquad (*)$$

и наоборот, т.е. любое уравнение (*) задает прямую.



Доказательство. Для заданной на плоскости прямой (ℓ) построим ненулевой **нормальный** вектор $\vec{n} = \{A, B\}$

$$\vec{n} \perp (\ell); \quad A^2 + B^2 \neq 0$$

Пусть точка $M(x, y)$ – прозвольная точка прямой. Радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ при проектировании на вектор $\vec{n}$ даст число $p = \pm|OP|$, т.е.

$$p = \text{пр}_{\vec{n}} \overrightarrow{OM}; \quad p = \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|}; \quad p = \frac{Ax + By}{\sqrt{A^2 + B^2}};$$

$$Ax + By = p\sqrt{A^2 + B^2}; \quad Ax + By + D = 0, \text{ где } D = -p\sqrt{A^2 + B^2}$$

Первая часть теоремы доказана, вторую – самостоятельно!!

1. Прямая, проходящая через данную точку $M_0(x_0, y_0)$ и имеющая заданный нормальный вектор $\vec{n} = \{A, B\}$:

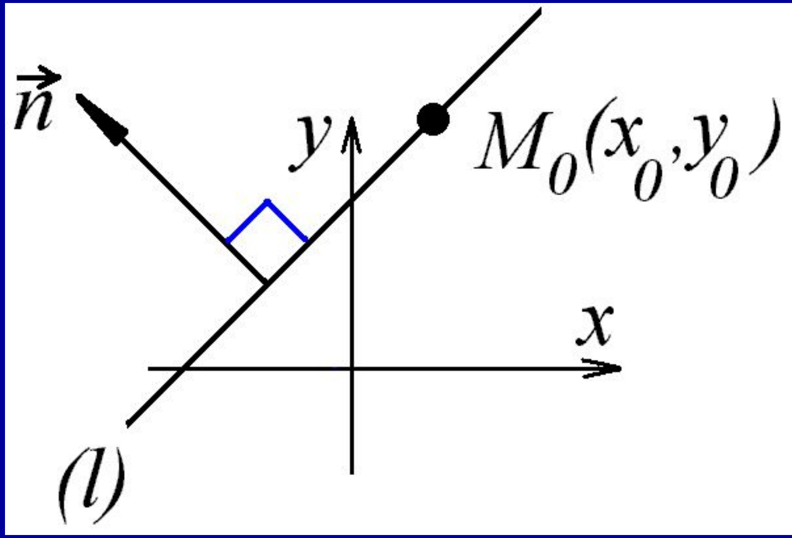
$$(\ell) \ : \ \ A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

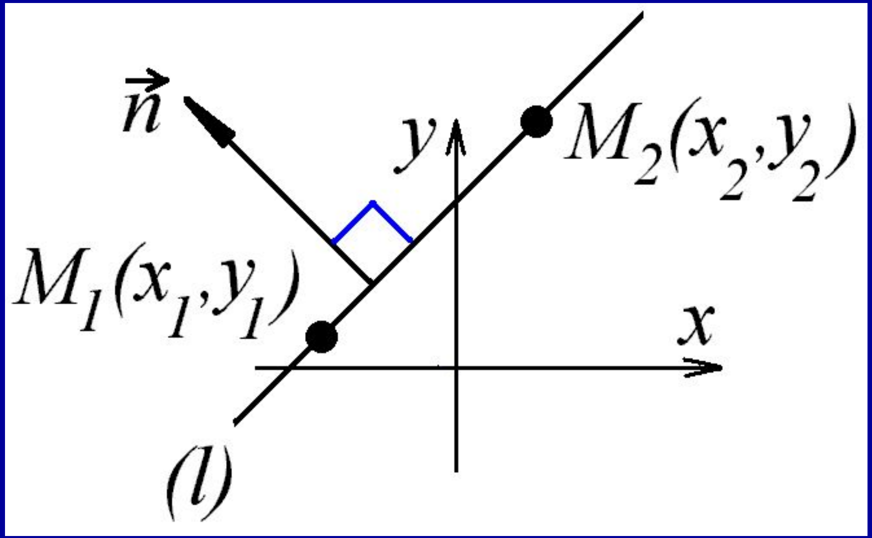
2. Прямая, проходящая через две заданные точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$:

$$(\ell) \ : \ \ (y_2 - y_1)(x - x_1) - (x_2 - x_1)(y - y_1) = 0$$

т.к.

$\overrightarrow{M_1M_2} = \{(x_2 - x_1), (y_2 - y_1)\} \parallel (\ell)$; $\overrightarrow{M_1M_2} \perp \{(y_2 - y_1), -(x_2 - x_1)\} = \vec{n}$





3. Случай $B \neq 0$ из уравнениия (6.2):

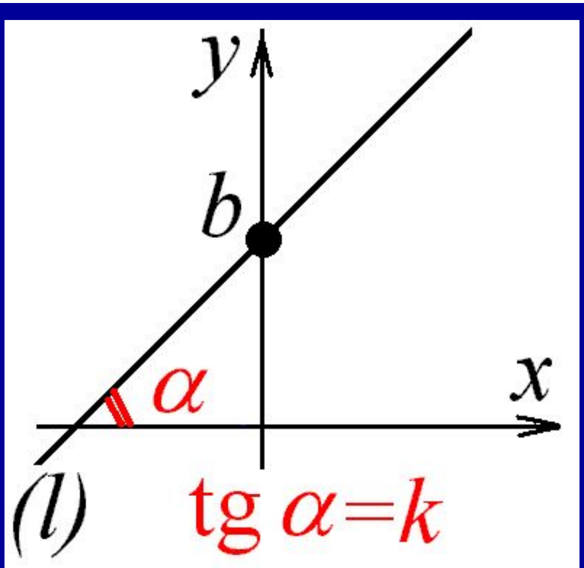
$$(\ell) \; : \quad \frac{A}{B}x + y + \frac{D}{B} = 0; \;\; y = -\frac{A}{B}x - \frac{D}{B}$$

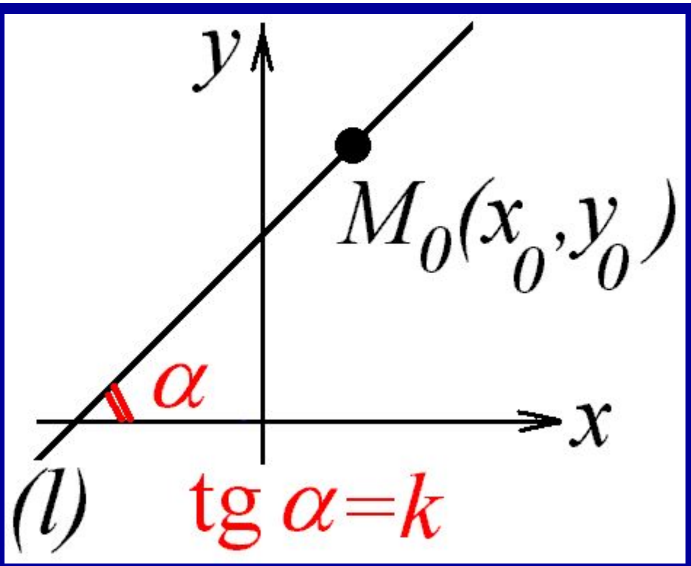
т.е.

$$(\ell) \; : \quad y = kx + b, \;\; k = -\frac{A}{B} = \operatorname{tg}\alpha, \;\; b = -\frac{D}{B}$$

4. Прямая, проходящая через данную точку $M_0(x_0, y_0)$ и имеющая заданный наклон k:

$$(\ell) \; : \quad (y - y_0) = k(x - x_0)$$





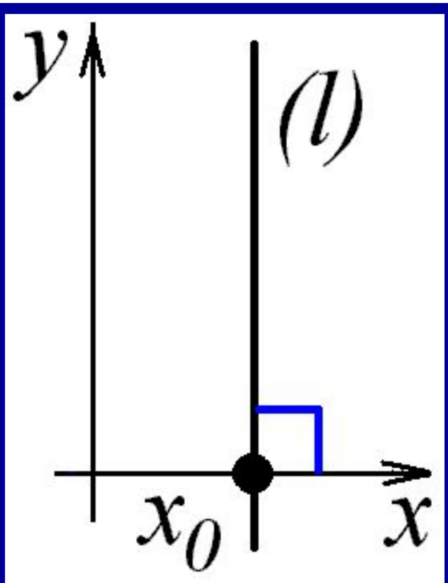
5. Прямая, проходящая через две заданные точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$:

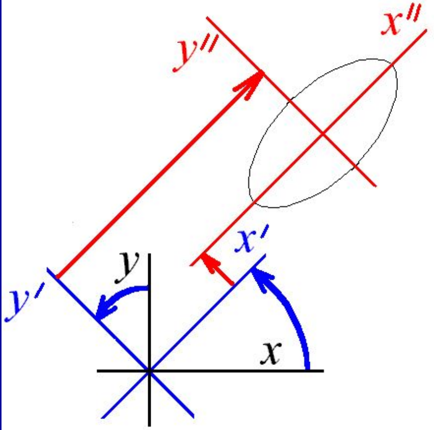
$$(\ell) \ : \quad \frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{(y - y_1)}{(y_2 - y_1)}; \quad (y - y_1) = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}(x - x_1)$$

6. Случай $B = 0$, $A \neq 0$:

$$(\ell) \ : \quad Ax + D = 0, \quad x = x_0, \quad \text{где} \quad x_0 = -\frac{D}{A}$$

вертикальная прямая, проходящая через точку $x = x_0$





Кривые второго порядка

Линейные уравнения $Ax + By + D = 0$
задают прямые на плоскости
Уравнения второго порядка

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0; \quad A, B, C, D, E, F \ \text{– const}$$

задают на плоскости **кривые второго порядка**
С помощью **поворота координатных осей** и **параллельного переноса** системы координат можно оси симметрии кривой сделать новыми осями координат, а новое начало координат поместить центр симетрии кривой второго порядка

Переход от старой системы к новой осуществляется с помощью **линейных функций**

В новой системе координат уравнение будет иметь **канонический вид**

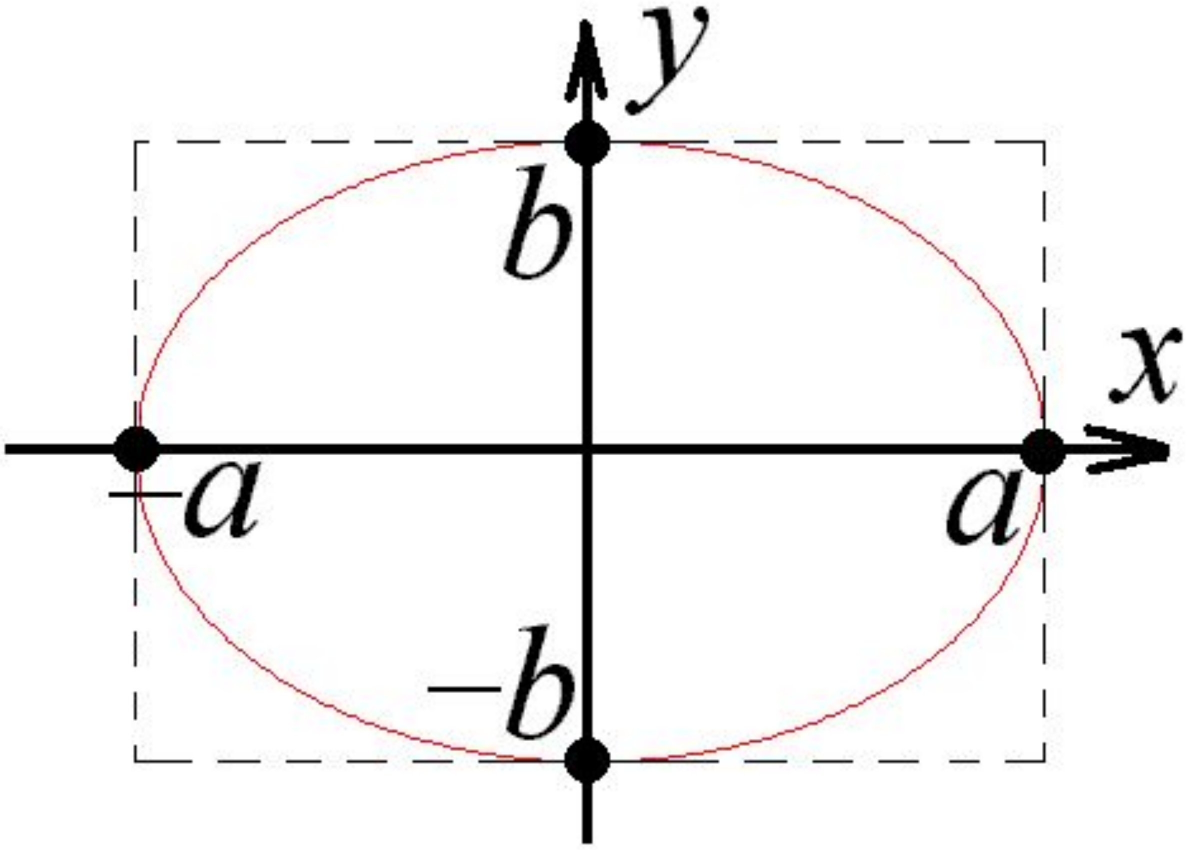
Если не вырожденный случай, то кривых второго порядка всего три:

$$\text{эллипс}\ :\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;\quad a,b=\text{const}>0,\quad a>b$$

$$\text{гипербола}\ :\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\quad a,b=\text{const}>0$$

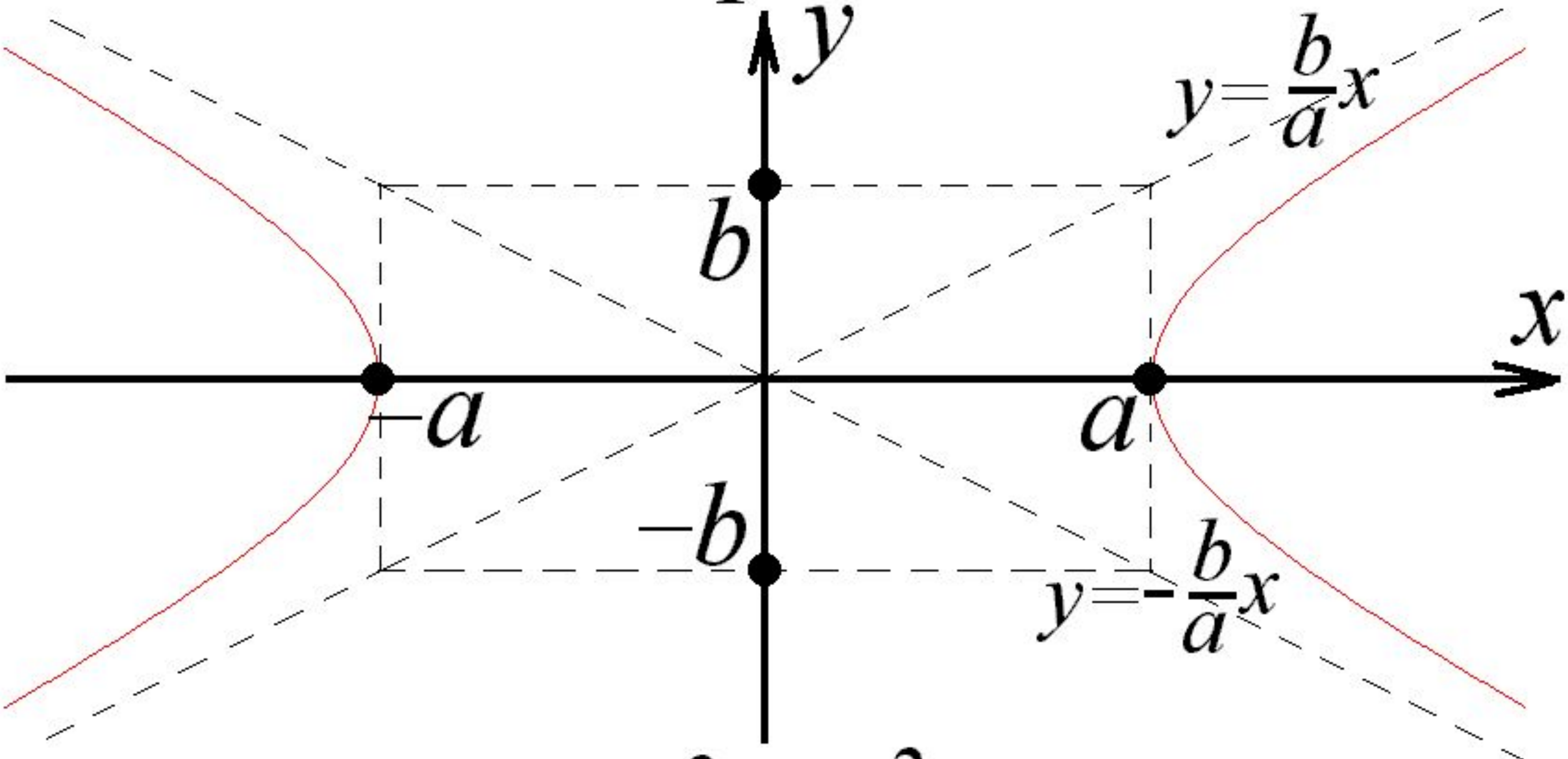
$$\text{парабола}\ :\quad y^2=2px,\quad p=\text{const}>0$$

эллипс

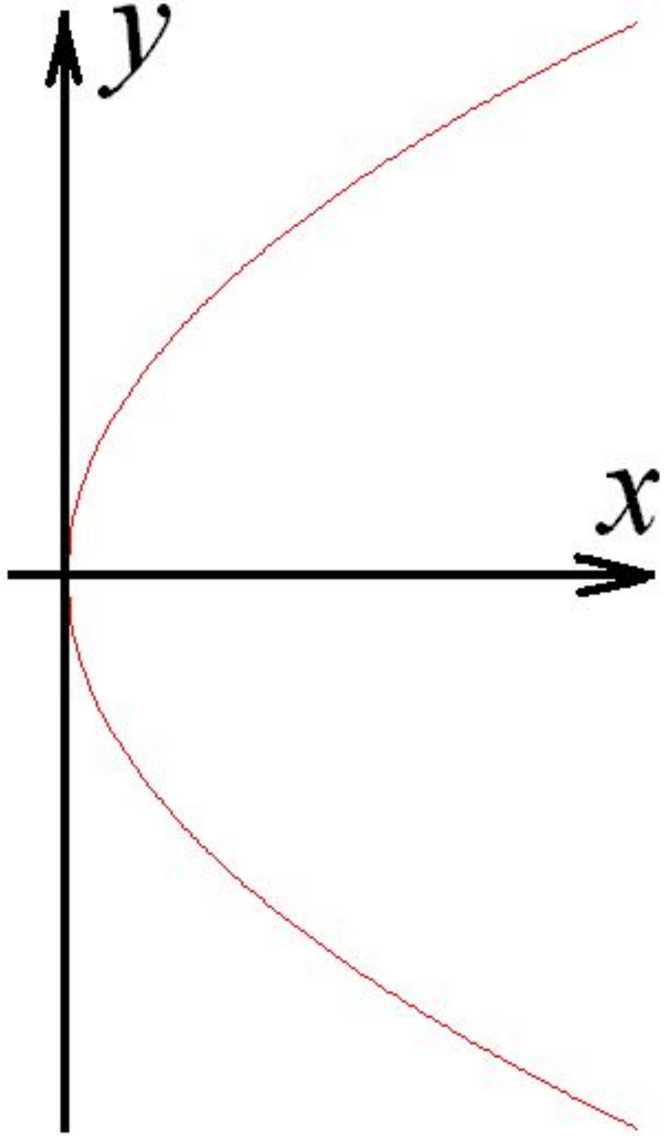


$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

гипербола



$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$



парабола

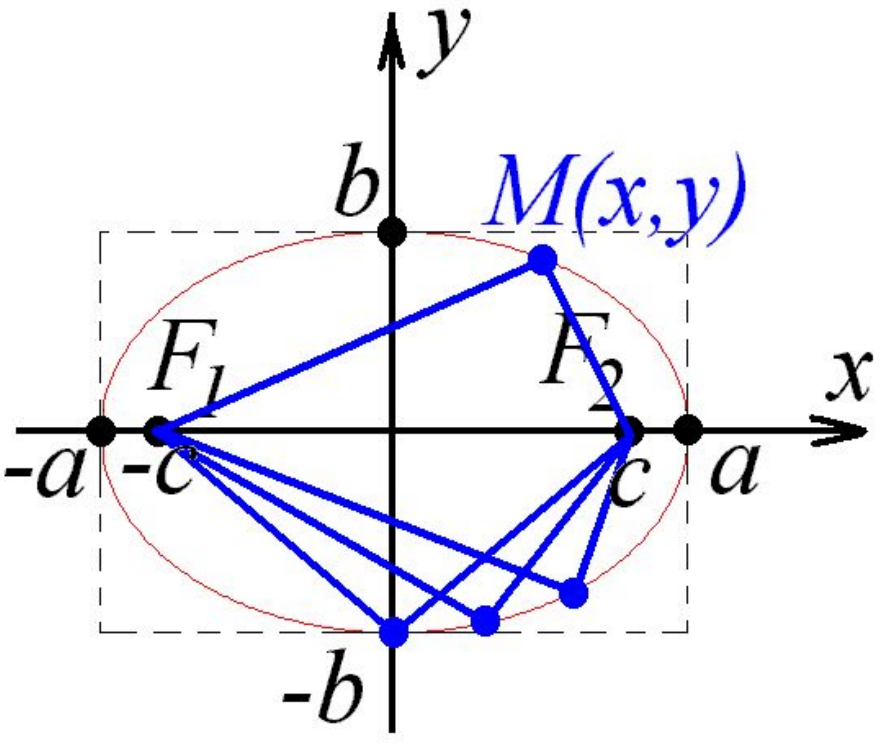
$$y^2 = 2px$$

Геометрические свойства кривых второго порядка

Сумма расстояний от произвольной точки эллипса до его фокусов есть величина постоянная, равная $2a$.

$F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ – фокусы; Ox, Oy – оси симметрии

$(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$, $(0, -b)$ – вершины



$$\left|\overrightarrow{F_1M}\right| + \left|\overrightarrow{F_2M}\right| = 2a$$

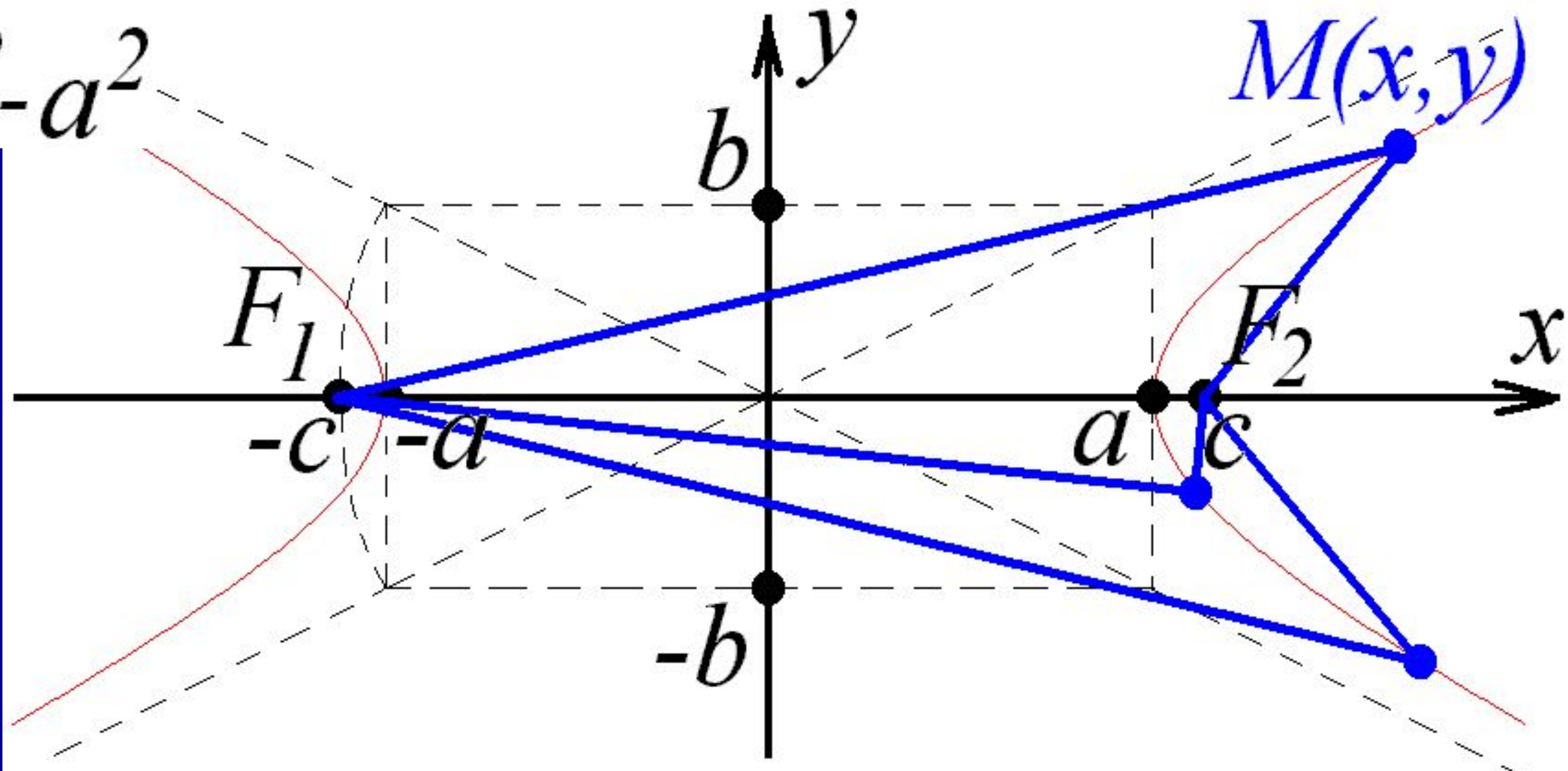
$$b^2 = a^2 - c^2$$

Разность расстояний от произвольной точки гиперболы до ее фокусов есть величина постоянная, равная $2a$.

$F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ – фокусы; Ox, Oy – оси симметрии;

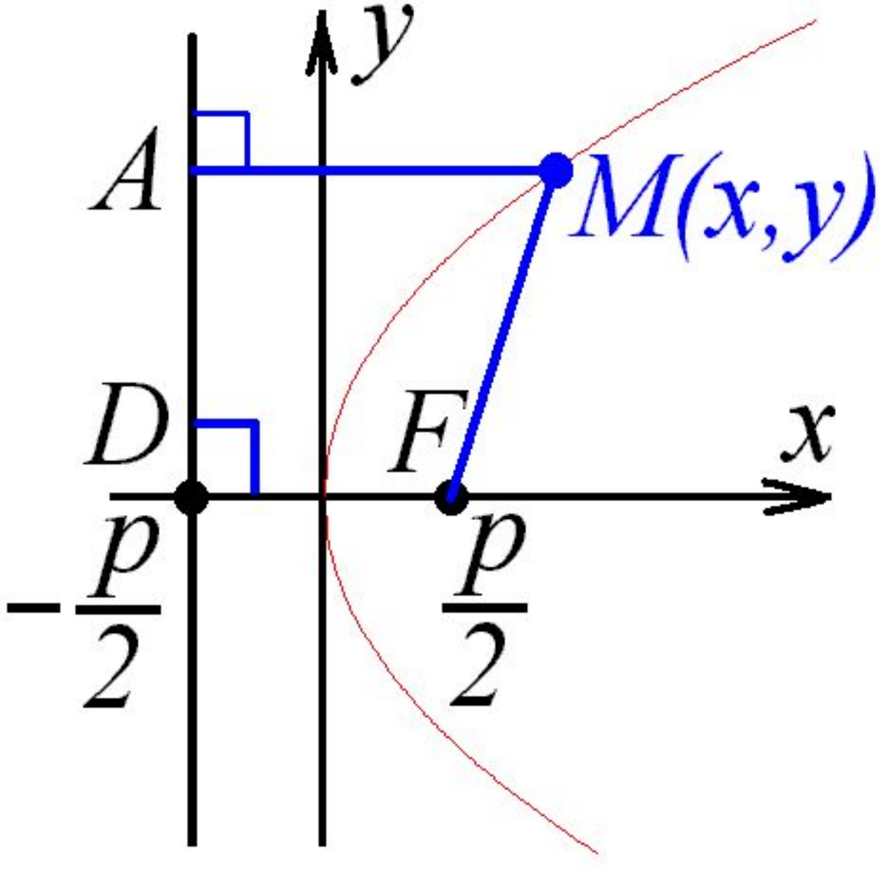
$(a,0)$, $(-a,0)$ – вершины

$$b^2=c^2-a^2$$



$$\left|\overrightarrow{F_1M}\right|-\left|\overrightarrow{F_2M}\right|=2a$$

Расстояние от произвольной точки параболы до ее фокуса равно расстоянию от этой точки до **директрисы** параболы. $F(p/2, 0)$ – фокус, $x = -p/2$ – директриса, Ox – ось симметрии, $(0,0)$ – вершина.



$$\left|\overrightarrow{FM}\right| = \left|\overrightarrow{AM}\right|$$

Оптические свойства кривых второго порядка