Ранг матрицы

В матрице размера m х n вычеркиванием каких-либо строк и столбцов можно выделить квадратные подматрицы k-го порядка, где $k \leq \min(m; n)$. Определители таких подматриц называются минорами k-го порядка матрицы A.

Рангом матрицы A называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы.

- Ранг матрицы A обозначается rang A или $r(A)$.

Из определения следует:

- ранг матрицы размера m х n не превосходит меньшего из её размеров, т.е. $r(A) \leq \min(m; n)$.
- $r(A)=0$ тогда и только тогда, когда все элементы матрицы равны нулю, т.е. $A=0$.
- Для квадратной матрицы n-го порядка $r(A) = n$ тогда и только тогда, когда матрица A – невырожденная.

В общем случае определение ранга матрицы перебором всех миноров достаточно трудоемко. Для облегчения этой задачи используются *элементарные преобразования*, сохраняющие ранг матрицы:

- Отбрасывание нулевой строки (столбца).
- Умножение всех элементов строки (столбца) матрицы на число, не равное нулю.
- Изменение порядка строк (столбцов) матрицы.
- Прибавление к каждому элементу одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на любое число.
- Транспонирование матрицы.

Теорема. Ранг матрицы не изменится при элементарных преобразованиях матрицы.

С помощью элементарных преобразований можно привести матрицу к ступенчатому виду:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2k} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & . & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rk} \end{pmatrix}, \text{где } a_{ii} \neq 0,\ i = 1..r;\ r \leq k.$$

Ранг ступенчатой матрицы равен r ,
так как имеется минор r-го порядка неравный нулю
$|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{rr}$.

Система линейных уравнений

Система m линейных уравнений с n переменными имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1j}x_j + ... + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2j}x_j + ... + a_{2n}x_n = b_2; \\ ... \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{ij}x_j + ... + a_{in}x_n = b_i; \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mj}x_j + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

где a_{ij}, b_i (i =1..m; j =1..n) – произвольные числа, называемые соответственно **коэффициентами при переменных** и **свободными членами** уравнений.

Решением системы (1) называется такая совокупность n чисел (x_1=k_1, x_2=k_2, … x_n=k_n), при подстановке которых в (1) каждое уравнение системы обращается в верное равенство.

Система уравнений называется **совместной,** если она имеет хотя бы одно решение, и **несовместной**, если она не имеет решений.

Совместная система, называется **определенной,** если она имеет единственное решение, и **неопределенной,** если она имеет более одного решения.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix},$$

Запишем систему (1) в матричной форме.

Обозначим: **A** – матрица коэффициентов при переменных, или матрица системы, **X** – матрица-столбец переменных; **B** – матрица-столбец свободных членов.

Систему (1) можно записать в виде:

AX=B.

Системы *n* линейных уравнений с *n* переменными

Пусть число уравнений системы (1) равно числу переменных, т.е. **m=n.** Тогда матрица системы является квадратной, а её определитель $\Delta=|A|$ называется **определителем системы.**

Предположим, что $|A|$ не равен нулю, тогда существует обратная матрица A^{-1}.

Умножая слева обе части матричного равенства на обратную матрицу A^{-1} получим:

$A^{-1}(AX)= A^{-1}B.$

$(A^{-1}A)X = EX = X$

Решением системы уравнений **методом обратной матрицы** будет матрица-столбец:

$$\boldsymbol{X= A^{-1}B.}$$

Метод Крамера

Теорема Крамера. Пусть Δ – определитель матрицы системы *A*, а Δ_j – определитель матрицы, полученный из матрицы заменой j-го столбца столбцом свободных членов. Тогда если Δ не равен нулю, то система имеет единственное решение, определённое по формулам Крамера:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \; j = 1,2,...,n$$

Метод Гаусса

Метод Гаусса – метод последовательного исключения переменных – заключается в том, что с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого или треугольного вида.

Рассмотрим матрицу:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

эта матрица называется **расширенной матрицей системы** (1), так как в нее кроме матрицы системы *A*, дополнительно включен столбец свободных членов.

П р и м е р 1. Методом Гаусса решить систему:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 3, \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$$

Р е ш е н и е.

Прямой ход метода Гаусса.

Запишем расширенную матрицу системы

и с помощью элементарных преобразований приведём матрицу к треугольному виду:

1. Поменяем местами 1-ю и 2-ю строки.

2. 1-ю строку умножим на (-3) и прибавим ко 2-й, потом 1-ю умножим на (-2) и прибавим к 3-й.

3. 3-ю строку умножим на (-4) и прибавим ко 2-й, получим эквивалентную матрицу.

4. 3-ю строку разделим на 13

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 4 & 3 \\ 2 & -4 & 3 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & -4 & 3 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 3 \\ 0 & 8 & -7 & -7 \\ 0 & 2 & -5 & -5 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 3 \\ 0 & 8 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 13 & 13 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 3 \\ 0 & 8 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Обратный ход метода Гаусса.

$$\begin{cases} x_3 = 1, \\ 8x_2 - 7x_3 = -7, \\ x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 3. \end{cases} \quad \to \quad x_3 = 1, x_2 = 0, x_1 = -1.$$

<u>Теорема Кронекера-Капелли.</u>

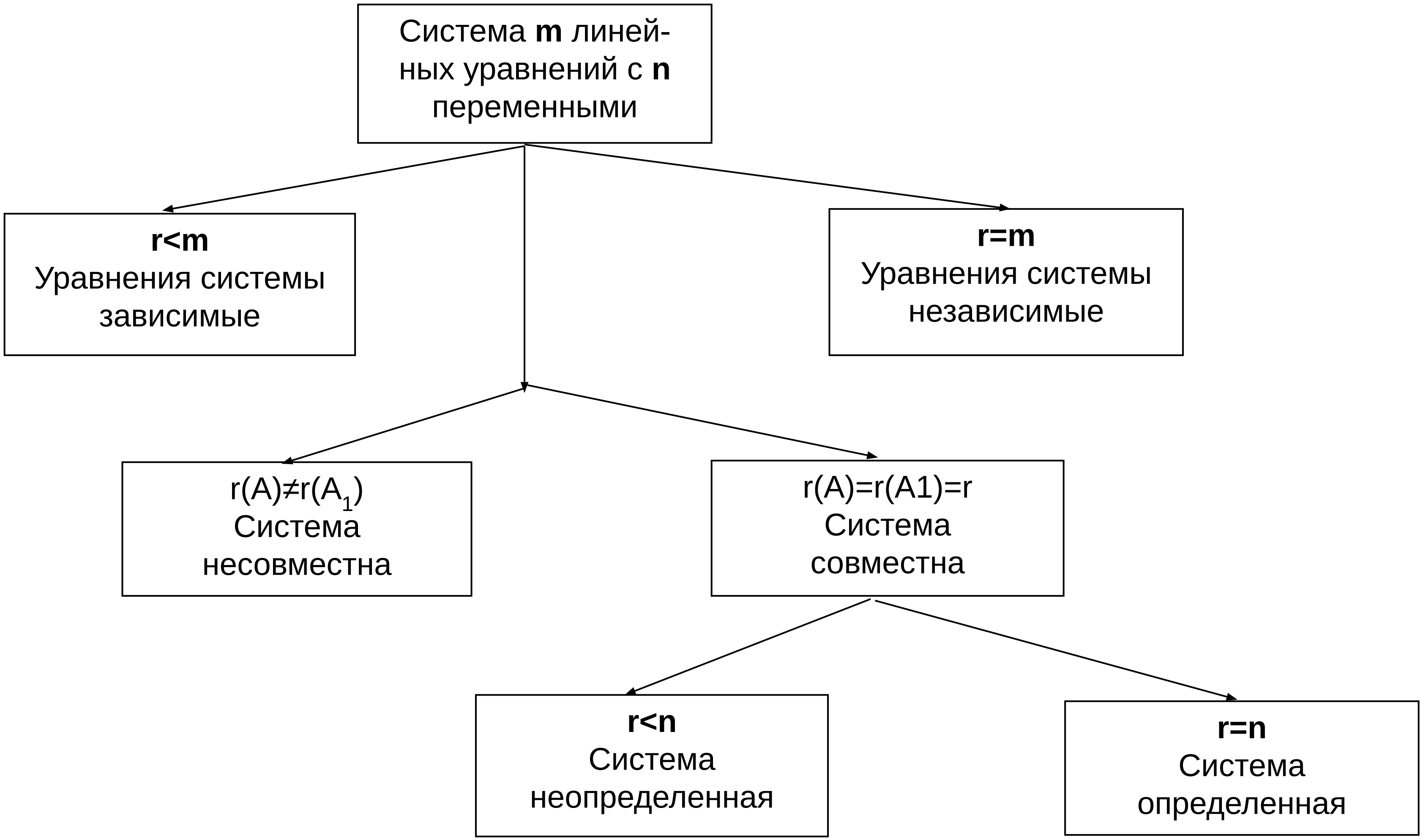
- Система линейных уравнений ***совместна*** тогда и только тогда, когда ***ранг матрицы*** системы равен ***рангу расширенной*** матрицы этой системы.

1.

- Если **ранг** матрицы совместной системы **равен числу переменных**, т.е. **r = n**, то система (1) ***определенная*** и имеет ***единственное*** решение;

2.

- Если ранг матрицы совместной системы меньше числа переменных, т.е. **r < n,** то система (1) - **неопределённая** и имеет **бесконечное множество** решений.
  - Пусть $r<n$, тогда r переменных называются ***основными*** (или ***базисными***), если определитель матрицы из коэффициентов при них (т.е. базисный минор) отличен от нуля. Остальные n-r переменных называются ***неосновными*** (или ***свободными***).
  - Для построения общего решения, содержащего все возможные решения системы уравнений, необходимо базисные переменные выразить через свободные.
  - Решение системы (1), в котором все **n- r неосновных** переменных **равны нулю**, называется **базисным.**


Система m линейных уравнений с n переменными
r<m
Уравнения системы зависимые
r=m
Уравнения системы независимые
r(A)≠r(A1)
Система несовместна
r(A)=r(A1)=r
Система совместна
r<n
Система неопределенная
r=n
Система определенная