Пространство

Понятие пространства в современной физике

Пространство

Философская трактовка

- Одна из форм (наряду со временем) существования бесконечно развивающейся материи…

Литер.:

1. Ожегов, Шведова «Толковый словарь русского языка»
2. БСЭ статья «Пространство и время»

Математическая трактовка (векторное или линейное пространство)

- Множество объектов, между которыми установлены отношения, сходные по своей структуре с обычными пространственными отношениями типа окрестности, расстояния и т. д.

Литер.:

1. БСЭ статья «Пространство»

Пространство в современной физике

- В современной физике используется математическая трактовка

Линейная алгебра: поле

- Поле – множество элементов с введенными на нем операциями «+» и «*»; при этом операции «+» и «*» должны обладать определенным набором свойств

Линейная алгебра: поле

- Коммутативность:

$$a+b=b+a,$$
$$a\cdot b=b\cdot a;$$

- Ассоциативность:

$$a+(b+c)=(a+b)+c,$$
$$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c;$$

- Наличие нейтрального и обратного элемента:

$$a+0=a, \qquad a+(-a)=0,$$
$$a\cdot 1=a; \qquad a\cdot\left(\frac{1}{a}\right)=1;$$

- Дистрибутивность:

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c.$$

Примеры полей

- Рациональные, вещественные числа
- Не являются полями: целые числа, натуральные числа
- Будем говорить о поле вещественных чисел

Векторное пространство

- Пространство над полем P – это множество элементов, на котором введены операции сложения и умножения на скаляр, обладающие определенными свойствами
- Скаляр – элемент поля P

Векторное пространство

- Элемент пространства – вектор
- Вектор задается координатами:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n);$$

- Радиус-вектор – вектор, начало которого лежит в начале координат
- Координатами точки называются координаты ее радиус-вектора

Размерность пространства

- Рассмотрим линейную комбинацию:

$$\alpha_1 \overrightarrow{x_1} + \alpha_2 \overrightarrow{x_2} + \ldots + \alpha_n \overrightarrow{x_n},$$

Где α_n – ненулевые скаляры, а x_n – произвольные векторы.

- Попытаемся подобрать скаляры так, чтобы л. к. обратилась в нуль. Размерность пространства - максимальное число векторов, для которых этого сделать не удастся. А оставшийся набор векторов называется базисом
- Можно показать, что размерность пространство совпадает с числом координат векторов
- Вещественное пространство размерности n обозначается R^n

Евклидово пространство

- Пространство, свойства которого изучаются в евклидовой геометрии. В более широком понимании Е. п. называют n-мерное векторное пространство, в котором определено скалярное произведенье

Литер.:
1. БСЭ статья «Евклидово пространство»

Евклидово пространство: скалярное произведенье

- Рассмотрим:

$$\bar{x} = (x_1, x_2),$$

$$\bar{y} = (y_1, y_2),$$

Где x, y принадлежат пространству R^2, а x_1, x_2, y_1, y_2 – полю R.

- Введем скалярное произведенье:

$$\lambda = \bar{x} \cdot \bar{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2,$$

Причем λ принадлежит полю Р.

- Скалярное произведенье порождает норму:

$$\|\bar{x}\| = \sqrt{\bar{x} \cdot \bar{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Евклидово пространство

- Наше пространство – трехмерное евклидово пространство

Аксиомы Евклида

- 5 постулатов, на которых строится геометрия евклидового пространства
- Сформулированы Евклидом для R^2
- Гильберт уточнил аксиоматику и распространил ее на случай R^3

Фазовое пространство

- Рассмотрим систему из N молекул. В каждый момент времени у каждой i-той молекулы определен вектор скорости:

$$\overline{v_i} = (v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3}),$$

и радиус-вектор (вектор-положение):

$$\overline{r_i} = (r_{i,1}, r_{i,2}, r_{i,3}).$$

- В каждый момент времени состояние системы описывается точкой в 6N-мерном фазовом пространстве:

$$(x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}, x_{2,1}, \ldots, x_{N,1}, x_{N,2}, x_{N,3}, v_{1,1}, v_{1,2}, v_{1,3}, v_{2,1}, \ldots, v_{N,1}, v_{N,2}, v_{N,3}).$$

Пространство Минковского

- Четырехмерное пространство. Помимо пространственных координат вводится временная ct
- Не является Евклидовым, так как определение нормы отлично от данного выше
- Квадрат нормы в пространстве Минковского:

$$s^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (y_1 - y_2)^2$$

Пространство Минковского

- Пространство Минковского можно сделать евклидовым, введя евклидову норму, но, зачастую, это неудобно

Пятый постулат Евклида

- Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, лежащая с данной прямой в одной плоскости и не пересекающая её

Геометрия Лобачевского

- Через точку, не лежащую на данной прямой, проходят по крайней мере две прямые, лежащие с данной прямой в одной плоскости и не пересекающие её

Геометрия Лобачевского

- Лобачевскому удалось на основе своей аксиоматики построить полную и непротиворечивую геометрию
- Геометрия Лобачевского находит применение в специальной и общей теории относительности

Выводы

- Понятие пространства в физике – это абсолютно строгая математическая модель
- Евклидово пространство – частный случай этой модели
- В большинстве случаев удобно полагать, что мы живем в трехмерном Евклидовом пространстве
- Часто для расчета физических процессов приходится прибегать к использованию евклидовых пространств с большим числом измерений

Список литературы

1. Ильин В. А., Позняк Э.Г. «Линейная алгебра». Изд.: Москва Наука 1999 г.
2. Гельфанд И. М. «Лекции по линейной алгебре». Изд.: МЦНМО 1998 г.
3. Апатенок Р. Ф. «Элементы линейной алгебры». Изд.: Минск «Высшая школа» 1977 г.
4. Н. В. Ефимов, Э. Р. Розендорн. «Линейная алгебра и многомерная геометрия». 1970 г.
5. Манин Ю. И., Кострикин А. И. «Линейная алгебра и геометрия». 1980 г.