**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»
Кафедра прикладной математики**

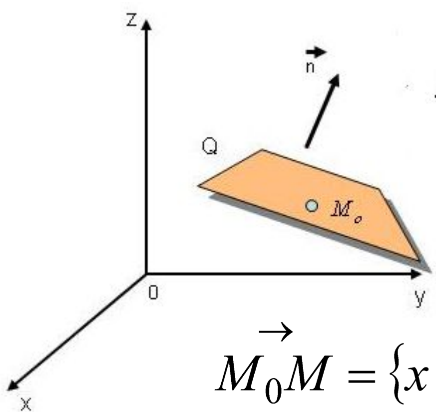
И.Г. Руцкова

Плоскость в пространстве

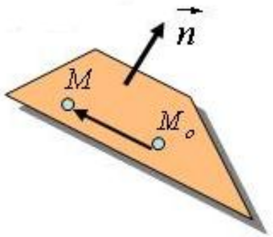
**Электронный курс лекций «Линейная алгебра»,
часть 11**

Оренбург 2016

1 Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ перпендикулярно ненулевому вектору $\vec{n}=\{A;B;C\}, A^2+B^2+C^2\neq 0$.



Пусть $M(x;y;z)$ - произвольная точка пространства, а α - плоскость, удовлетворяющая указанным условиям, уравнение которой нам нужно составить



$$M(x;y;z)\in\alpha \quad \Leftrightarrow$$

$$\vec{M_0M}=\{x-x_0;y-y_0;z-z_0\}\in\alpha \quad \Leftrightarrow \vec{M_0M}\perp\vec{n} \Leftrightarrow$$

$$\left(\vec{n},\vec{M_0M}\right)=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\boxed{A\cdot(x-x_0)+B\cdot(y-y_0)+C\cdot(z-z_0)=0}$$

Пример 1.

$M_0(1;7;3);$

$\vec{n}=\{2;3;5\}$

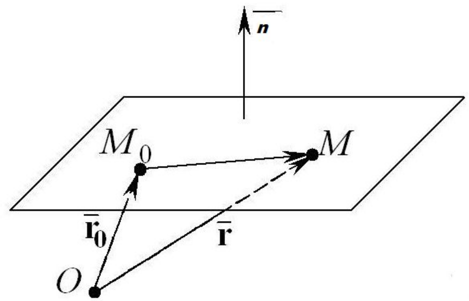
$$2\cdot(x-1)+3\cdot(y-7)+5\cdot(z-3)=0,$$

$$2x-2+3y-21+5z-15=0,$$

$$2x+3y+5z-38=0$$

$$\boxed{A\cdot(x-x_0)+B\cdot(y-y_0)+C\cdot(z-z_0)=0}$$ *в координатной форме*

Если использовать радиус-векторы точек $M(x;y;z)$ и $M_0(x_0;y_0;z_0)$: $\vec{r}=\vec{OM}$ и $\vec{r_0}=\vec{OM_0}$



$$\left(\vec{n},\vec{M_0M}\right)=0 \Leftrightarrow \left(\vec{n},\vec{r}-\vec{r_0}\right)=0, \quad \boxed{\left(\vec{n},\vec{r}\right)-\left(\vec{n},\vec{r_0}\right)=0}$$ *в векторной форме.*

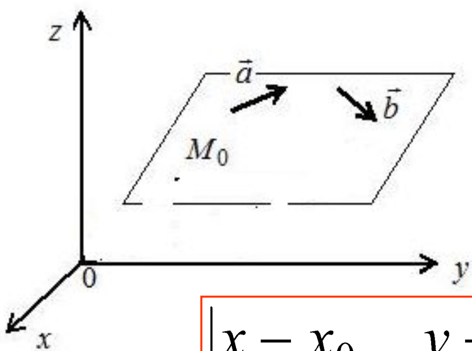
$$\boxed{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0}$$ *нормальное уравнение плоскости*

p - расстояние от плоскости до начала координат,

$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ - направляющие косинусы вектора $\vec{OP}$, совпадающего с перпендикуляром, опущенным из начала координат на плоскость.

2 Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, параллельно двум ненулевым неколлинеарным векторам $\vec{a}=\{m_1; n_1; p_1\}$ и $\vec{b}=\{m_2; n_2; p_2\}$

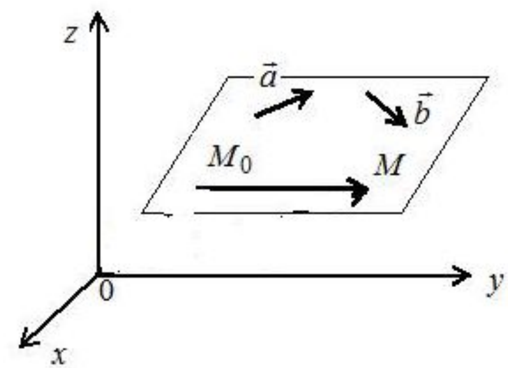
Пусть $M(x; y; z)$ - произвольная точка пространства, а α - плоскость, удовлетворяющая указанным условиям, уравнение которой нам нужно составить



$$M(x; y; z) \in \alpha \quad \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \in \alpha$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M},\ \vec{a},\ \vec{b}\ \text{- компланарны}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M}\,\vec{a}\,\vec{b}=0 \Leftrightarrow$$



$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0$$

в *координатной форме*

$$\left(\vec{r}-\vec{r_0}\right)\vec{a}\,\vec{b}=0$$

в *векторной форме*

Пример 2.

$M_0(0;1;2)$,

$\vec{a}=\{1;3;2\}$,

$\vec{b}=\{2;5;4\}$

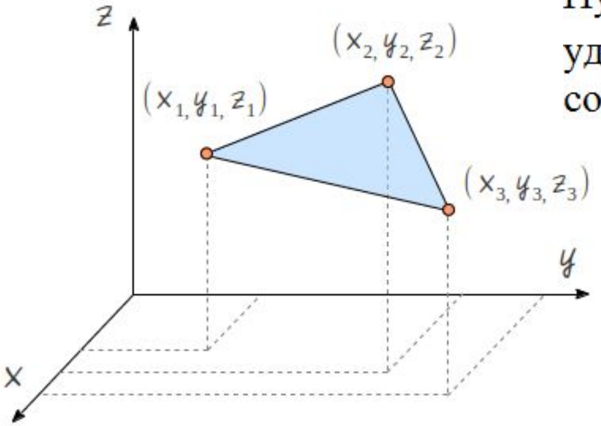
$$\begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z-2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix}=0,$$

$$12x+5(z-2)+4(y-1)-6(z-2)-10x-4(y-1)=0,$$

$$12x+5z-10+4y-4-6z+12-10x-4y+4=0,$$

$$2x-z+2=0$$

3 Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ и $M_3(x_3;y_3;z_3)$, не лежащие на одной прямой



Пусть $M(x;y;z)$ - произвольная точка пространства, а α - плоскость, удовлетворяющая указанным условиям, уравнение которой нам нужно составить

$$M_0 = M_1, \qquad \vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{M_1M_3}.$$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

в координатной форме

Векторная форма

$$\left(\vec{r}-\vec{r_1}\right)\left(\vec{r_2}-\vec{r_1}\right)\left(\vec{r_3}-\vec{r_1}\right) = 0,$$

где $\vec{r}, \vec{r_1}, \vec{r_2}, \vec{r_3}$ - радиус-векторы точек M, M_1, M_2, M_3.

Пример 3.

$M_1(0;8;3)$,

$M_2(-1;2;4)$,

$M_3(5;7;1)$.

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-8 & z-3 \\ -1-0 & 2-8 & 4-3 \\ 5-0 & 7-8 & 1-3 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} x & y-8 & z-3 \\ -1 & -6 & 1 \\ 5 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$12x + (z-3) + 5(y-8) + 30(z-3) - 2(y-8) + x = 0,$$

$$13x + 3y + 31z - 3 - 40 - 117 = 0$$

Общее уравнение плоскости в пространстве

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0, \quad A, B, C \in R} \qquad (11)$$

Теорема 1. Если $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, то уравнение вида (11) задает плоскость в пространстве.

Доказательство. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.

Следствие 1. Если $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, то вектор $\vec{n} = \{A; B; C\}$ перпендикулярен плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

Доказательство

$$M_1(x_1; y_1; z_1) \in \alpha, \; M_2(x_2; y_2; z_2) \in \alpha, \quad \overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\},$$

$$\left(\vec{n}, \overrightarrow{M_1M_2}\right) = A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = (Ax_2 + By_2 + Cz_2) - (Ax_1 + By_1 + Cz_1)$$

$$M_1 \in \alpha \;\Rightarrow\; Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0, \quad Ax_1 + By_1 + Cz_1 = -D,$$

$$M_2 \in \alpha \;\Rightarrow\; Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0, \quad Ax_2 + By_2 + Cz_2 = -D;$$

$$\left(\vec{n}, \overrightarrow{M_1M_2}\right) = (-D) - (-D) = 0, \quad \vec{n} = \{A; B; C\} \perp \overrightarrow{M_1M_2}, \quad \forall M_1, M_2 \in \alpha$$

Нормальный вектор к плоскости

Определение 1. Ненулевой вектор, перпендикулярный к плоскости α, называется *нормальным вектором* плоскости α.

Следствие 2. Если $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, то для любого ненулевого $k \in R$ вектор $\vec{n}' = \{kA; kB; kC\}$ является нормальным вектором плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

Доказательство. Доказательство проведите самостоятельно.

Пример 4. Укажите один нормальный вектор для плоскости $2x - 3y + 5z + 4 = 0$.

Решение. $\vec{n} = \{2;-3;5\}$

Замечание. Следствие 1 характеризует геометрический смысл коэффициентов A, B, C общего уравнения плоскости. Коэффициент D, в свою очередь позволяет определить проходит ли плоскость через начало координат $O(0;0;0)$: если $D = 0$, то плоскость проходит через начало координат, если $D \neq 0$, то начало координат плоскости не принадлежит.

Уравнение плоскости «в отрезках»

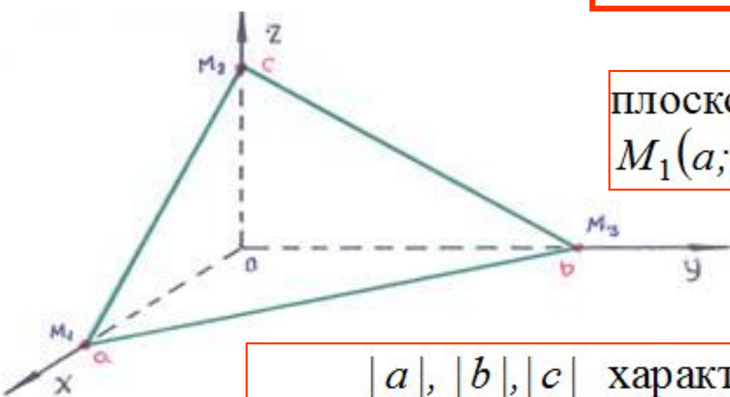
$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad A \neq 0,\ B \neq 0,\ C \neq 0,\ D \neq 0$$

$$Ax + By + Cz = -D, \qquad \frac{Ax}{D} + \frac{By}{D} + \frac{Cz}{D} = 1, \qquad \frac{x}{\frac{D}{A}} + \frac{y}{\frac{D}{B}} + \frac{z}{\frac{D}{C}} = 1,$$

$$\boxed{a = \frac{D}{A},\quad b = \frac{D}{B},\quad c = \frac{D}{C},}$$

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1}$$

«в отрезках».



плоскость пересекает координатные оси OX, OY, OZ в точках $M_1(a;0;0)$, $M_2(0;b;0)$, $M_3(0;0;c)$ соответственно

$|a|, |b|, |c|$ характеризуют длины отрезков, отсекаемых плоскостью на координатных осях, а знаки – направления, в которых откладываются эти отрезки.

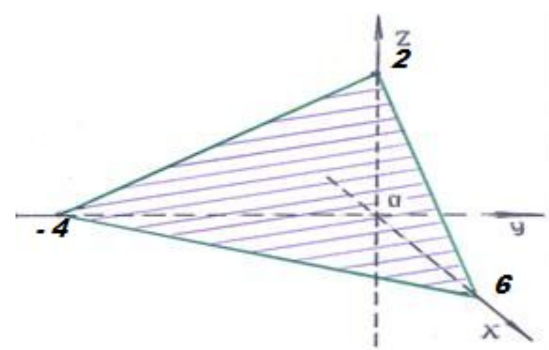
Пример 5.

$$2x - 3y + 6z - 12 = 0,$$

$$2x - 3y + 6z = 12,$$

$$\frac{2x}{12} - \frac{3y}{12} + \frac{6z}{12} = 1,$$

$$\boxed{\frac{x}{6} + \frac{y}{-4} + \frac{z}{2} = 1}$$



Взаимное расположение плоскостей в пространстве

$$\alpha_1: \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 \neq 0, \quad \vec{n_1} = \{A_1,\ B_1,\ C_1\} \perp \alpha_1,$$

$$\alpha_2: \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \quad A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 \neq 0, \quad \vec{n_2} = \{A_2,\ B_2,\ C_2\} \perp \alpha_2.$$

$$\boxed{\alpha_1 \,||\, \alpha_2 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{n_1} \,||\, \vec{n_2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2};}$$

$$\boxed{\alpha_1 = \alpha_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}}$$

$$\boxed{\alpha_1 \perp \alpha_2 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{n_1} \perp \vec{n_2} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\vec{n_1}, \vec{n_2}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0}$$

$$\boxed{cos\,\varphi = \frac{\left|\left(\vec{n_1}, \vec{n_2}\right)\right|}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|},}$$

где φ - наименьший из двугранных углов, образуемых плоскостями α_1 и α_2