Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»
Кафедра прикладной математики

И.Г. Руцкова

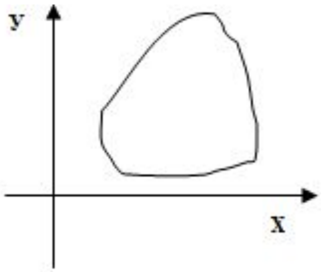
Кривые второго порядка

Электронный курс лекций «Линейная алгебра»,
часть 13

Оренбург 2016

Линии на плоскости: основные понятия, определения, классификация

Пусть на плоскости задана прямоугольная декартова система координат Oxy и некоторая линия L, заданная уравнением (1) или (2) :



$$\Phi(x, y) = 0, \qquad (1)$$

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \qquad (2)$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ предполагаются непрерывными по параметру t в некоторой области изменения параметра t.

т.е. *кривая (линия) представляет собой (в данной системе координат) геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению*

При изучении линий, как правило, рассматриваются задачи двух типов

1) изучение свойств линии при помощи заранее заданного уравнения этой линии, т.е. изучение геометрических свойств графика;

2) вывод уравнения линии, заранее заданной геометрически (как геометрическое место точек, удовлетворяющих некоторым условиям).

Линии на плоскости: основные понятия, определения, классификация

$$\Phi(x,y)=0 \qquad (1)$$

Определение 1. Линия L называется *алгебраической,* если в некоторой декартовой прямоугольной системе координат она определяется уравнением (1), где $\Phi(x,y)$ представляет собой алгебраический полином, т.е. сумму конечного числа слагаемых вида $a_{kl}x^k y^l$, где k и l - неотрицательные числа, а a_{kl} - некоторые постоянные

Определение 2. Всякая неалгебраическая линия называется *трансцендентной*

Определение 3. *Алгебраическая линия называется линией порядка n*, если в некоторой декартовой прямоугольной системе координат эта линия определяется уравнением (1), в котором функция $\Phi(x,y)$ представляет собой алгебраический полином n-ой степени

Теорема 1. Если линия в некоторой декартовой прямоугольной системе координат определяется алгебраическим уравнением степени n, то эта линия и в любой другой декартовой системе координат определяется алгебраическим уравнением той же степени.

<u>Доказательство.</u> Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия.

Линии первого порядка

Теорема 2. Если на плоскости зафиксирована декартова прямоугольная система координат Oxy, то любое уравнение вида (3):

$$Ax + By + C = 0,\ A^2 + B^2 \neq 0 \qquad (3)$$

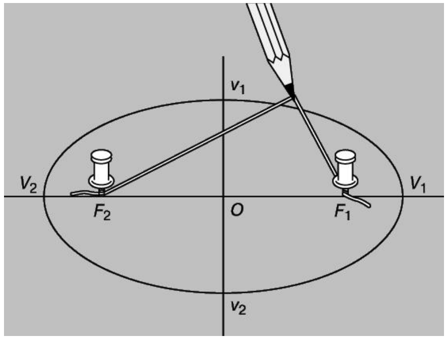
задает прямую на плоскости.

Уравнение (3) называется ***общим уравнением прямой.***

С другими способами задания прямой и способами определения взаимного расположения прямых по коэффициентам их уравнений можно ознакомиться по книге Ильин В.А., Поздняк Э.Г. Аналитическая геометрия, М.: Наука, 1988, стр. 110 – 126.

Каноническое уравнение эллипса

Определение 4. *Эллипсом* называется геометрическое место точек плоскости, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек F_1 и F_2 этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная



$F_1 = F_2$ – окружность

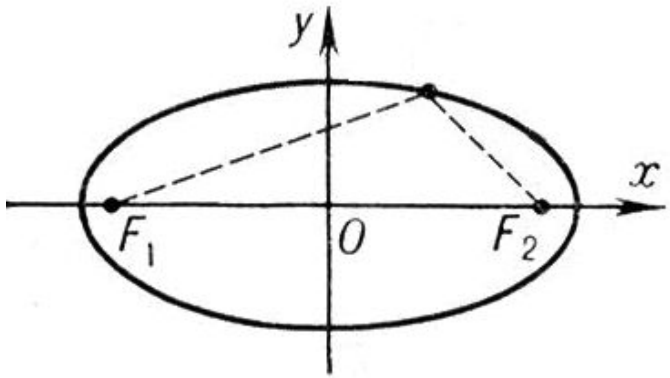
Определение 5. Середина отрезка F_1F_2, соединяющего фокусы, называется *центром эллипса.*

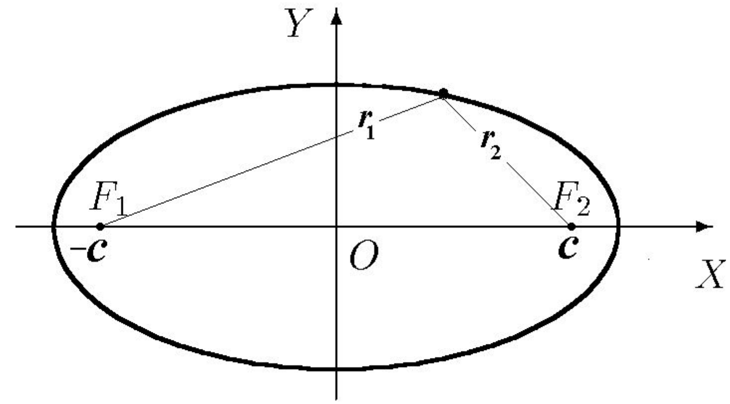
Определение 6. Вся прямая F_1F_2, называется его *фокальной или первой осью.*

Определение 7. Прямая, проходящая через центр эллипса перпендикулярно к фокальной оси, называется *второй осью эллипса.*

Определение 8. Расстояние между фокусами F_1 и F_2 называется *фокусным расстоянием*

Каноническое уравнение эллипса





Пусть длина отрезка F_1F_2 равна $2c$, $c \geq 0$ (случай $c = 0$, соответствует совпадению фокусов),

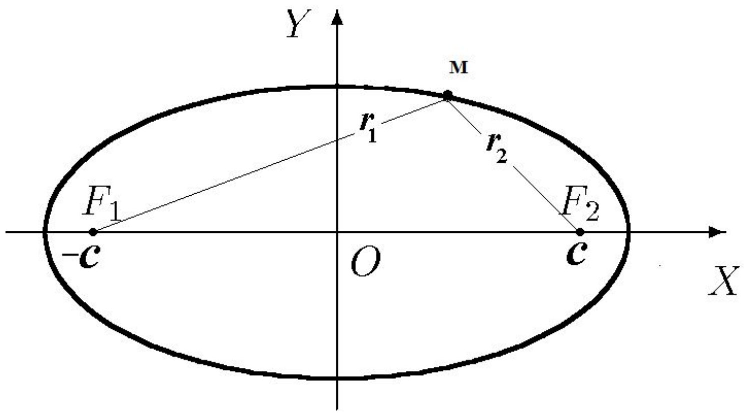
$$F_1(-c;0),\quad F_2(c;0).$$

Пусть сумма расстояний от точек эллипса (исследуемого геометрического множества точек) до фокусов F_1 и F_2 равно $2a$,

$$2a > 2c,\qquad a > c$$

Пусть $M(x, y)$ - произвольная точка плоскости. $r_1 = \rho(M, F_1),\quad r_2 = \rho(M, F_2).$

$$M \in L \quad \Leftrightarrow \quad r_1 + r_2 = 2a$$



$$\boxed{r_1 + r_2 = 2a,} \qquad (4)$$

$$r_1 = \left|\overrightarrow{F_1M}\right| = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

$$r_2 = \left|\overrightarrow{F_2M}\right| = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

$$\boxed{\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a,}$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \qquad (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2,$$

$$2xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - 2xc, \qquad a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - xc,$$

$$a^2\left((x-c)^2 + y^2\right) = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2, \qquad a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + x^2c^2,$$

$$a^2x^2 - x^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2, \qquad \left(a^2 - c^2\right)x^2 + a^2y^2 = a^2\left(a^2 - c^2\right),$$

$$\boxed{a > c,} \qquad a^2 - c^2 > 0, \qquad \boxed{b^2 = a^2 - c^2}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \qquad (5)$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

(5) $$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$ - следствие $$\boxed{\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a}$$

Поэтому необходимо показать, что любая точка $M(x,y)$, координаты которой удовлетворяют уравнению принадлежит рассматриваемому эллипсу, т.е. выполняется равенство

$$\boxed{r_1+r_2=2a.} \qquad (4)$$

Пусть координаты точки $M(x,y)$ удовлетворяют уравнению **(5)**

$$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}, \qquad y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)=\left(a^2-c^2\right)\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)=a^2-c^2-x^2+\frac{c^2x^2}{a^2},$$

$$r_1=\left|\overrightarrow{F_1M}\right|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{a^2+2xc+\frac{c^2x^2}{a^2}}=\sqrt{\left(a+\frac{cx}{a}\right)^2}=\left|a+\frac{cx}{a}\right|, \qquad \boxed{r_1=a+\frac{cx}{a},}$$

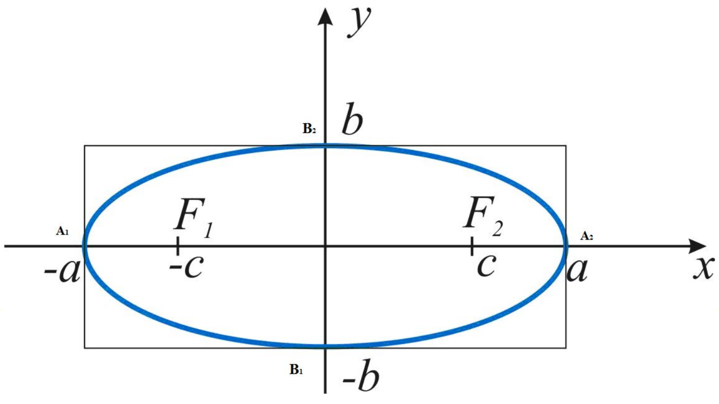
$$r_2=\left|\overrightarrow{F_2M}\right|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\sqrt{a^2-2xc+\frac{c^2x^2}{a^2}}=\sqrt{\left(a-\frac{cx}{a}\right)^2}=\left|a-\frac{cx}{a}\right|, \qquad \boxed{r_2=a-\frac{cx}{a},}$$

$$x^2\le a^2, \qquad |x|\le|a|, \qquad \boxed{a>c\ge 0,} \qquad \boxed{0\le\frac{c}{a}<1,} \qquad r_1+r_2=2a$$

(5) $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1}$ ***- каноническое уравнение эллипса***

Определение 10. Число $\dfrac{c}{a}$ называется *эксцентриситетом эллипса*

Обозначения: $e=\dfrac{c}{a},\quad \varepsilon=\dfrac{c}{a}.$



$a>c\geq 0,$

$b^2=a^2-c^2;$

$0\leq\varepsilon<1,$

$$\varepsilon=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a},$$

$$\frac{b}{a}=\sqrt{1-\varepsilon^2}.$$

весь эллипс лежит в прямоугольнике, ограниченном прямыми $x=\pm a, y=\pm b$, который называется *основным прямоугольником для данного эллипса*

пересекается с осями координат в точках $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$, которые *называются вершинами эллипса*

Определение 11. Отрезки A_1A_2 и B_1B_2, соединяющие противоположные вершины эллипса, а также их длины $2a$ и $2b$, называются *большой и малой осями эллипса*

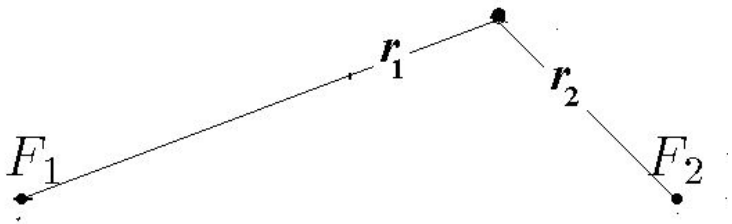
обе оси эллипса являются его осями симметрии;

центр эллипса является его центром симметрии;

a – большая полуось,
b – малая полуось.

Каноническое уравнение гиперболы

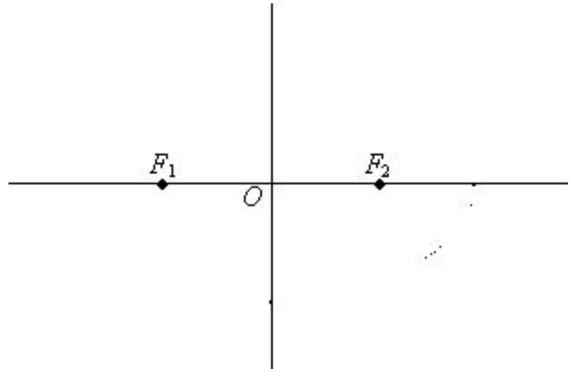
Определение 12. *Гиперболой* называется геометрическое место точек плоскости, для которых абсолютная величина разности расстояний до двух фиксированных точек F_1 и F_2 этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная



Определение 13. Указанные выше точки F_1 и F_2 называются *фокусами гиперболы*

Нетрудно заметить, что если фокусы совпадают и указанная в определении гиперболы постоянная равна нулю, то любая точка плоскости удовлетворяет этому условию; если же указанная постоянная не равна нулю, то таких точек не существует точек

Поэтому далее мы предполагаем, что точки F_1 и F_2 не совпадают.



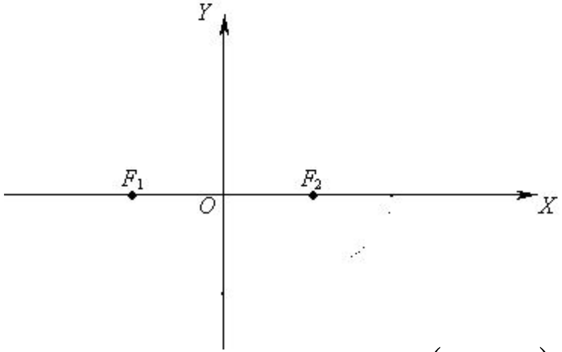
Определение 14. Середина отрезка F_1F_2, соединяющего фокусы, называется *центром гиперболы.*

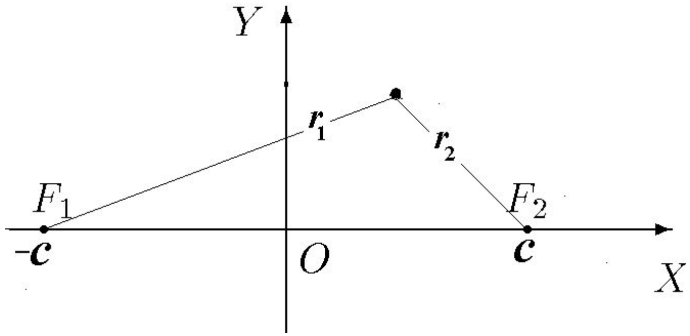
Определение 15. Прямая, на которой лежат фокусы гиперболы, называется *фокальной или первой осью* гиперболы

Определение 16. Прямая, проходящая через центр гиперболы, перпендикулярно к фокальной оси, называется *второй осью гиперболы*

Определение 17. Расстояние между фокусами F_1 и F_2 называется *фокусным расстоянием*

Пусть длина отрезка F_1F_2 равна $2c$, $c > 0$.





$F_1(-c;0),\ F_2(c;0)$

Пусть абсолютная величина разности расстояний от точек гиперболы (исследуемого геометрического множества точек) до фокусов F_1 и F_2 равна $2a$.

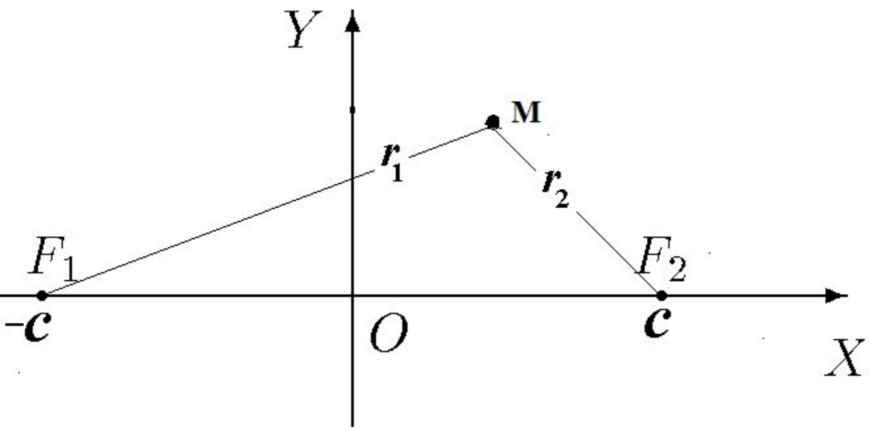
$2a \le 2c$ Поскольку случай $2a = 2c$ приводит к ситуации, когда точка располагается на фокальной оси вне отрезка F_1F_2 и гипербола вырождается в два луча ограничиваемся случаем $c > a$.

Пусть $M(x,y)$ - произвольная точка плоскости.

Пусть r_1 - расстояние от точки М до фокуса F_1, а r_2- расстояние до фокуса F_2

$$M \in L \iff |r_1 - r_2| = 2a$$

Определение 18. Числа r_1 и r_2 называются *фокальными радиусами гиперболы.*



$$\boxed{|r_1 - r_2| = 2a} \qquad (6)$$

$$r_1 = \left|\overrightarrow{F_1M}\right| = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

$$r_2 = \left|\overrightarrow{F_2M}\right| = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

$$\boxed{\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a,} \qquad \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a,$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \quad (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \mp 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2,$$

$$2xc = 4a^2 \mp 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - 2xc, \qquad \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - xc,$$

$$a^2\left((x-c)^2 + y^2\right) = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2, \qquad a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + x^2c^2,$$

$$\boxed{\left(a^2 - c^2\right)x^2 + a^2y^2 = a^2\left(a^2 - c^2\right)}$$

$$\boxed{a < c,} \qquad \boxed{b^2 = c^2 - a^2} \qquad \boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \qquad (7)$$

$$a^2 - c^2 < 0, \qquad \boxed{-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2,}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$$

(7) - следствие $\boxed{\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right|=2a}$

Поэтому необходимо показать, что любая точка $M(x,y)$, координаты которой удовлетворяют уравнению (7) принадлежит рассматриваемой гиперболе, т.е. выполняется равенство

$$\boxed{|r_1-r_2|=2a}$$

Пусть координаты точки $M(x,y)$ удовлетворяют уравнению (7).

$$\frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-1,\quad y^2=b^2\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)=\left(c^2-a^2\right)\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)=\frac{c^2x^2}{a^2}-x^2-c^2+a^2,$$

$$r_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{a^2+2xc+\frac{c^2x^2}{a^2}}=\sqrt{\left(a+\frac{cx}{a}\right)^2}=\left|a+\frac{cx}{a}\right|$$

$$r_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\sqrt{a^2-2xc+\frac{c^2x^2}{a^2}}=\sqrt{\left(a-\frac{cx}{a}\right)^2}=\left|a-\frac{cx}{a}\right|$$

$$\boxed{x^2\ge a^2,}\quad \boxed{|x|\ge|a|,}\quad \boxed{c>a>0,}\quad \boxed{\frac{c}{a}>1,}\quad \boxed{\left|\frac{cx}{a}\right|>a.}$$

1) x>0 $r_1=a+\frac{cx}{a},\quad r_2=-\left(a-\frac{cx}{a}\right)=-a+\frac{cx}{a},\quad \boxed{r_1-r_2=2a}$

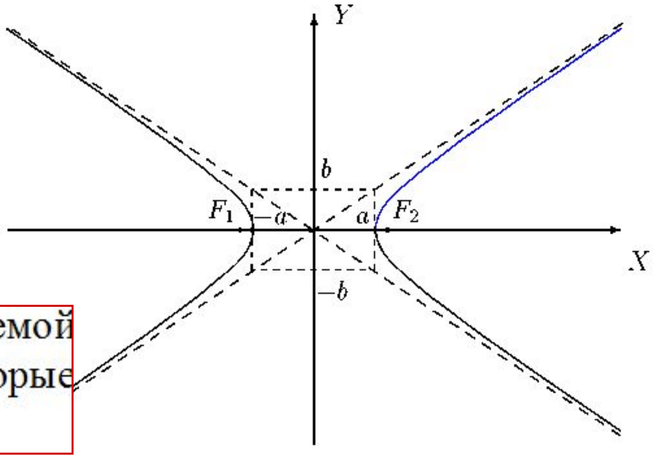
2) x>0 $r_1=-\left(a+\frac{cx}{a}\right)=-a-\frac{cx}{a},\quad r_2=a-\frac{cx}{a},\quad \boxed{r_1-r_2=-2a}\quad \boxed{|r_1-r_2|=2a}$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$$

- каноническое уравнение гиперболы

Определение 20. Число $\dfrac{c}{a}$ называется *эксцентриситетом гиперболы*

Обозначения: $e=\dfrac{c}{a}$, $\varepsilon=\dfrac{c}{a}$. $\boxed{b^2=c^2-a^2,}$ $\boxed{c>a>0}$



обе оси гиперболы являются её осями симметрии;

центр гиперболы является её центром симметрии;

гипербола пересекается только с одной из осей координат, называемой *действительной осью,* в точках $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, которые *называются вершинами гиперболы*;

не содержит точек в полосе $-a<x<a$ и распадается на две ветви: «правую» (точки которой удовлетворяют условию $x\geq a$) и «левую» (точки которой удовлетворяют условию $x\leq a$), являющимися симметричными относительно второй оси гиперболы, называемой *мнимой осью*;

$$\boxed{\varepsilon>1,}$$

$$\boxed{\varepsilon=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a},}$$

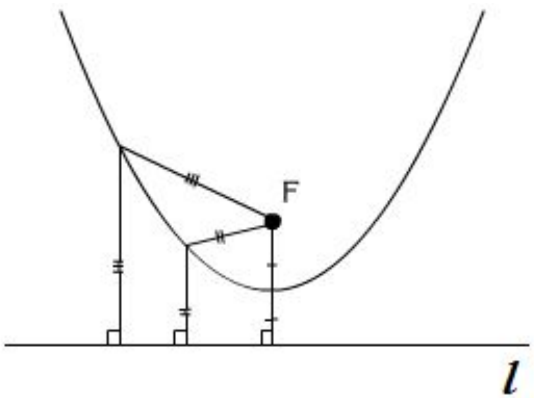
при неограниченном удалении от начала координат ветви гиперболы приближаются к прямым $y=\dfrac{b}{a}x$ и $y=-\dfrac{b}{a}x$, которые называются *первая и вторая асимптоты* соответственно;

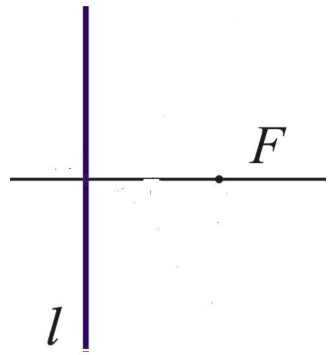
$$\boxed{\frac{b}{a}=\sqrt{\varepsilon^2-1}.}$$

асимптоты проходят (содержат в себе) диагонали прямоугольника, ограниченного прямыми $x=\pm a, y=\pm b$, который, называется *основным прямоугольником для данной гиперболы.*

Каноническое уравнение параболы

Определение 21. *Параболой* называется геометрическое место точек плоскости, для которых расстояние до некоторой фиксированной точки F этой плоскости равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой l, также расположенной в этой плоскости





Определение 22. Указанная в определении точка F называется *фокусом параболы*, а фиксированная прямая l – *директрисой параболы*

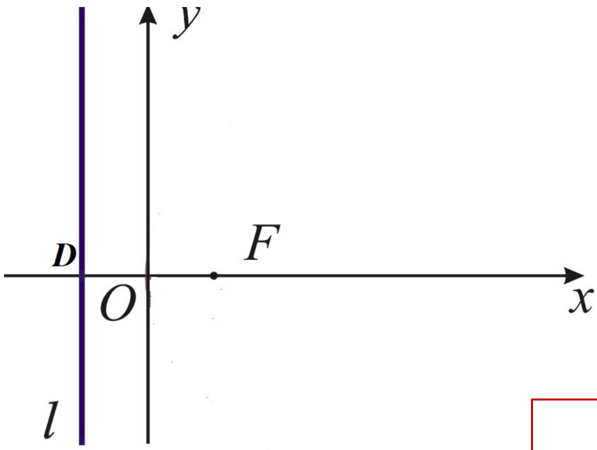
Определение 23. Прямая, проходящая через фокус F параболы, перпендикулярно директрисе l параболы, называется её *фокальной осью* (или просто осью)

Так как в случае, если $F \in l$, точки, для которых выполняются условия определения 21, принадлежат прямой, проходящей через F перпендикулярно l, *т.е. парабола вырождается в прямую*

будем предполагать, что $F \notin l$.

Обозначим точку пересечения фокальной оси и директрисы точкой D

Начало O декартовой системы координат выберем в середине отрезка DF , ось Ox сделаем сонаправленной вектору $\overline{DF}$

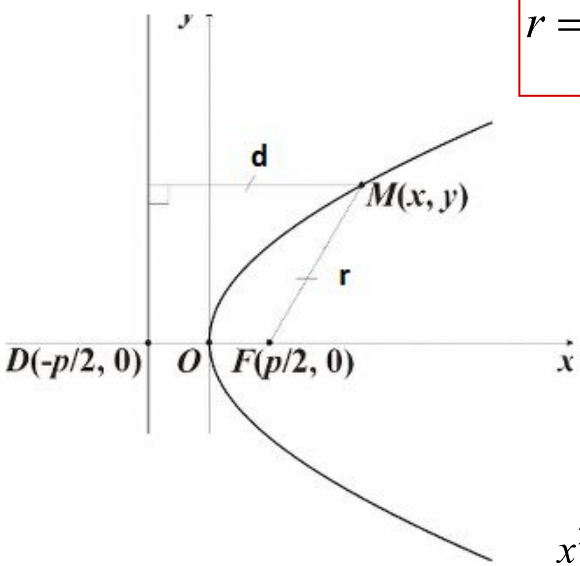


Пусть длина отрезка DF равна p, $p>0$.

$$\boxed{F\left(\frac{p}{2};0\right),} \qquad \boxed{l: \quad x=-\frac{p}{2}.}$$

Пусть $M(x;y)$ - произвольная точка плоскости.

$$\boxed{r=\rho(M,F)=\left|\overrightarrow{FM}\right|=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2},} \qquad \boxed{d=\rho(M,l)=x+\frac{p}{2}.}$$



$$M\in l \Leftrightarrow r=d \Leftrightarrow \quad \boxed{\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2}}$$

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2,$$

$$x^2-2x\cdot\frac{p}{2}+\left(\frac{p}{2}\right)^2+y^2=x^2+2x\cdot\frac{p}{2}+\left(\frac{p}{2}\right)^2, \qquad \boxed{y^2=2px} \qquad (8)$$

$$\boxed{y^2 = 2px} \quad (8)$$ **- следствие** $$\boxed{\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}}$$

Необходимо проверить, все ли точки $M(x;y)$, координаты которых удовлетворяют уравнению (**8**) принадлежат параболе, т.е. для них выполняется свойство **:** $\boldsymbol{r = d}$.

Пусть $M(x;y)$ - точка плоскости, координаты которой удовлетворяют уравнению (**8**),

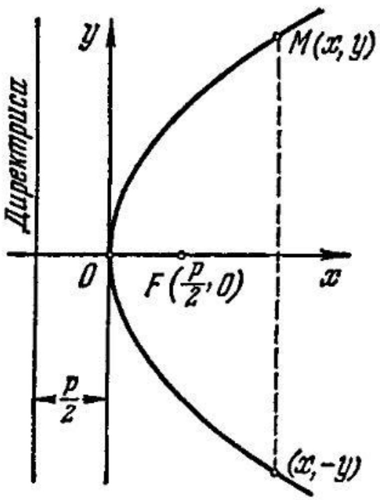
$$\boxed{x \geq 0,} \qquad \boxed{d = \rho(M,l) = x + \frac{p}{2},}$$

$$r = \rho(M,F) = \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + 2px} = \sqrt{x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|,$$

$$\boxed{p > 0,} \qquad \boxed{r = \rho(M,F) = x + \frac{p}{2}} \qquad \boxed{d = r}$$

$$y^2 = 2px$$ - **каноническое уравнение параболы**

Определение 25. Расстояние p между фокусом и директрисой параболы называется *фокальным параметром* или просто *параметром параболы*



Вся парабола расположена в правой полуплоскости;

фокальная ось является осью симметрии параболы;

парабола пересекается осями координат в точке $O(0;\ 0)$, которая называется *вершиной параболы* и совпадает с началом системы координат, являющейся канонической для этой параболы.

В заключение отметим, что для эллипса и гиперболы также можно определить директрисы (отдельно для каждого из фокусов).