

# 14.3. РЯД МАКЛОРЕНА

Предположим, что функция  $y=f(x)$  определена и  $n$  раз дифференцируема в окрестности точки  $x=0$ , и может быть представлена в виде суммы степенного ряда, т.е. может быть разложена в степенной ряд:

$$f(x) = C_0 + C_1 \cdot x + C_2 \cdot x^2 + \dots + C_n \cdot x^n + \dots$$

Выразим коэффициенты ряда через  $f(x)$ . Найдем производные функции  $f(x)$ , почленно дифференцируя  $n$  раз:

$$f'(x) = C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + 4C_4x^3 + \dots + nC_nx^{n-1} + \dots$$

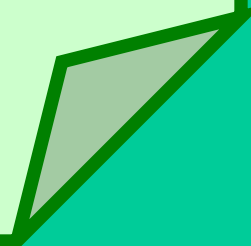
$$f''(x) = 2C_2 + 2 \cdot 3C_3x + 4 \cdot 3C_4x^2 + \dots + n(n-1)C_nx^{n-2} + \dots$$

$$f'''(x) = 2 \cdot 3C_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2C_4x + \dots + n(n-1)(n-2)C_nx^{n-3} + \dots$$

.....

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot C_n + \dots$$

**Если в полученных выражениях положить  $x=0$ , то получим:**



$$f(0) = C_0$$

$$f'(0) = C_1$$

$$f''(0) = 2C_2 = 2 \cdot 1 \cdot C_2 = 2!C_2$$

$$f'''(0) = 2 \cdot 3C_3 = 3!C_3$$

.....

$$f^{(n)}(0) = n!C_n$$

**Отсюда находим коэффициенты ряда:**

$$C_0 = f(0)$$

$$C_1 = f'(0)$$

$$C_2 = \frac{f''(0)}{2!}$$

$$C_3 = \frac{f'''(0)}{3!}$$

.....

$$C_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

**Подставляем найденные коэффициенты в разложение функции в ряд:**

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 +$$
$$+ \frac{f'''(0)}{3!} \cdot x^3 \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + \dots$$

*Ряд Маклорена*

Так же, как и для числовых рядов, сумму  $f(x)$  ряда Маклорена можно представить в виде

$$f(x) = S_n(x) + r_n(x)$$

где  $S_n(x)$  -  $n$ -ая частичная сумма ряда;

$r_n(x)$  -  $n$ -ый остаток ряда.

# Теорема

Для того, чтобы ряд Маклорена сходиллся к функции  $f(x)$ , необходимо и достаточно, чтобы при  $n \rightarrow \infty$  остаток ряда стремился к нулю, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$$

для всех  $x$  из области сходимости ряда.

Можно доказать, что если функция  $f(x)$  разложима в ряд Маклорена, то это разложение единственно.

## Замечание

*Ряд Маклорена является частным случаем ряда Тейлора при  $x_0=0$*



$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \\ + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot (x - x_0)^3 \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n + \dots$$

*Ряд Тейлора*

Ряд Тейлора связан с формулой Тейлора:

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \\ + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot (x - x_0)^3 \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n + R_n(x)$$

*Формула  
Тейлора*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

*остаточный член  
формулы Тейлора*

**Если**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$$

**То остаток ряда Тейлора равен остаточному члену формулы Тейлора:**

$$r_n(x) = R_n(x)$$