

Лекция 5

Контрольный вопрос

Две частицы обладают одинаковыми кинетическими энергиями. Величины их импульсов соотносятся как:

а) $p_1 < p_2$,

б) $p_1 = p_2$,

в) $p_1 > p_2$,

г) невозможно определить.

$$T = \frac{p^2}{2m}$$

Масса тел неизвестна – г).

Содержание предыдущей лекции

Механическая энергия

- Столкновение тел.

Кинематика и динамика вращательного движения

- Кинематика вращательного движения: угловая скорость и угловое ускорение, их связь с линейной скоростью и ускорением.
- Момент силы. Уравнение моментов.

Содержание сегодняшней лекции

Кинематика и динамика вращательного движения

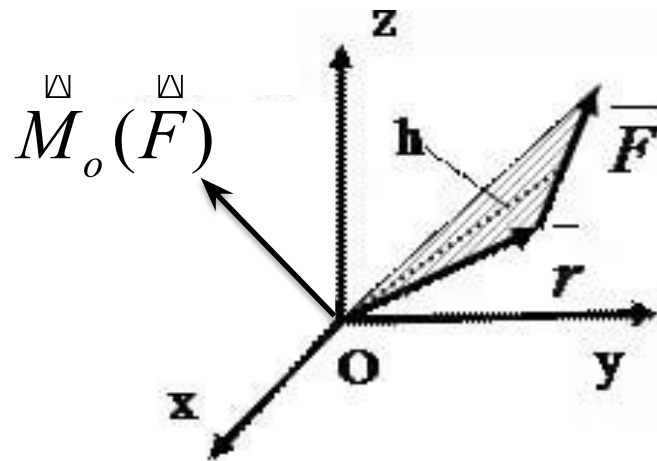
- Момент инерции. Теорема Штейнера. Кинетическая энергия вращательного движения твердого тела.
- Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела с закрепленной осью вращения.
- Момент импульса тела. Закон сохранения момента импульса.
- Гироскопические силы. Гироскопы и их применение в технике.

Релятивистская механика

- Принцип относительности Галилея.

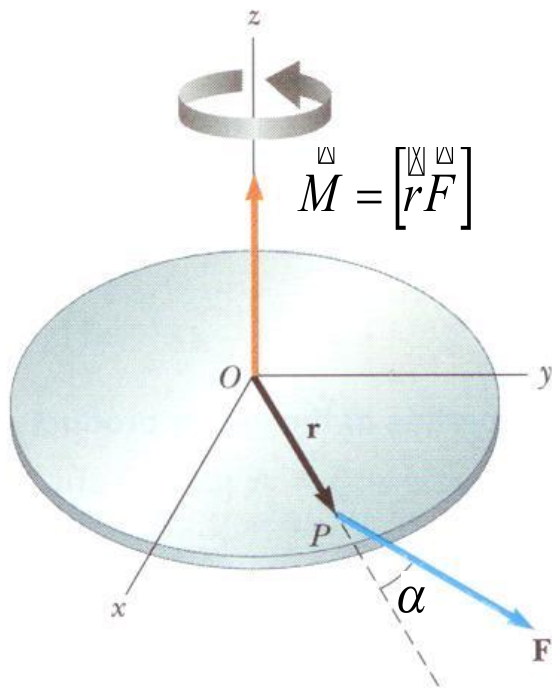
Момент силы относительно точки

Момент силы относительно точки – характеристика способности силы вращать тело вокруг точки, относительно которой он рассчитывается.



Момент силы относительно оси

Возможность произвольного вращения тела относительно точки O .

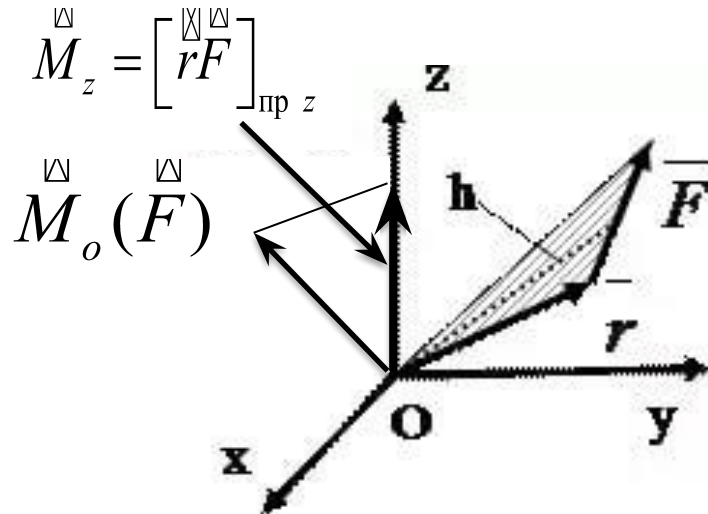


Реальность:
поворот тела под действием силы
вокруг оси,
перпендикулярной к плоскости,
в которой лежат сила F и точка O ,
т.е. вокруг оси, совпадающей с
направлением момента силы
относительно данной точки.

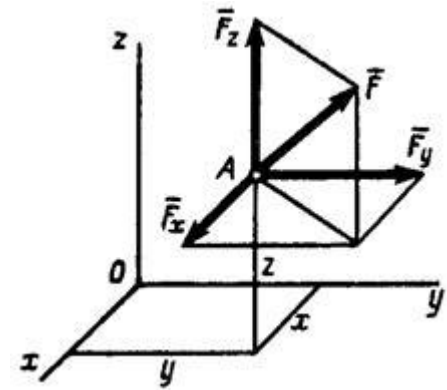
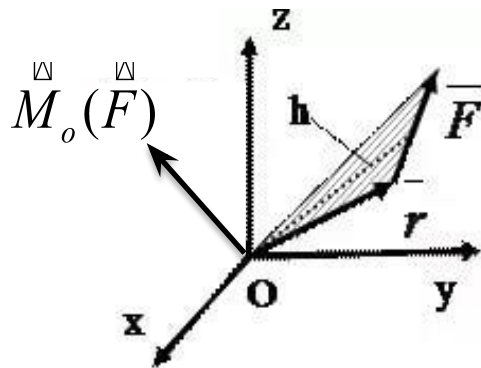
Момент силы относительно оси

Проекция вектора \vec{M} на некоторую ось, проходящую через точку O , относительно которой определен вектор \vec{M} , называется моментом силы относительно этой оси:

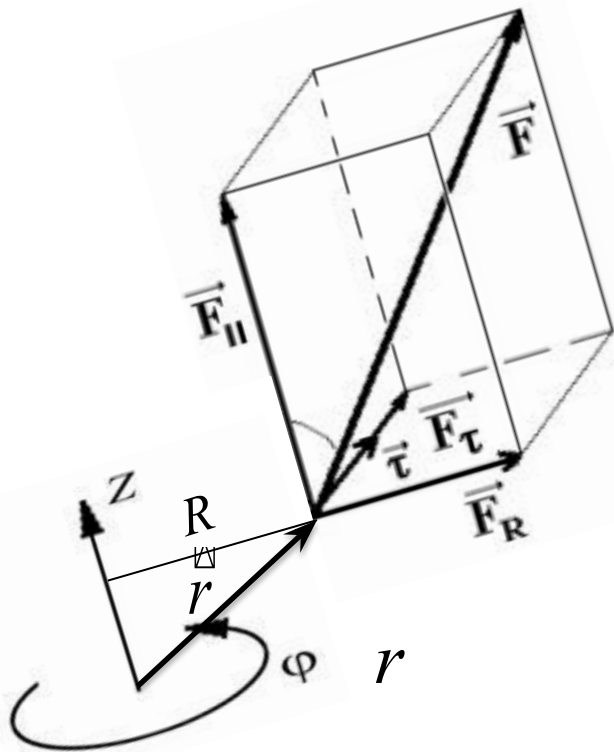
$$M_z = \left[\vec{r} \vec{F} \right]_{\text{пр } z}.$$



$$\vec{M} = [\vec{r} \vec{F}]$$



Момент силы относительно оси



$$\vec{F} = \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_R + \vec{F}_{\tau}$$

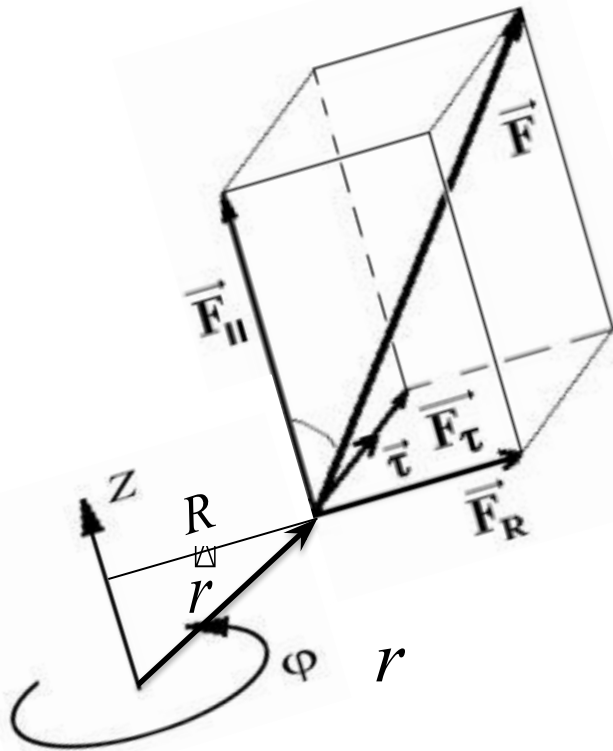
$$\vec{M} = \vec{M}_{\parallel} + \vec{M}_R + \vec{M}_{\tau}$$

$$M_z = M_{z\parallel} + M_{zR} + M_{z\tau}$$

$$M_z = 0 + 0 + M_{z\tau} = RF_{\tau}$$

$$M_z = RF_{\tau}$$

$$M_z = RF_\tau$$

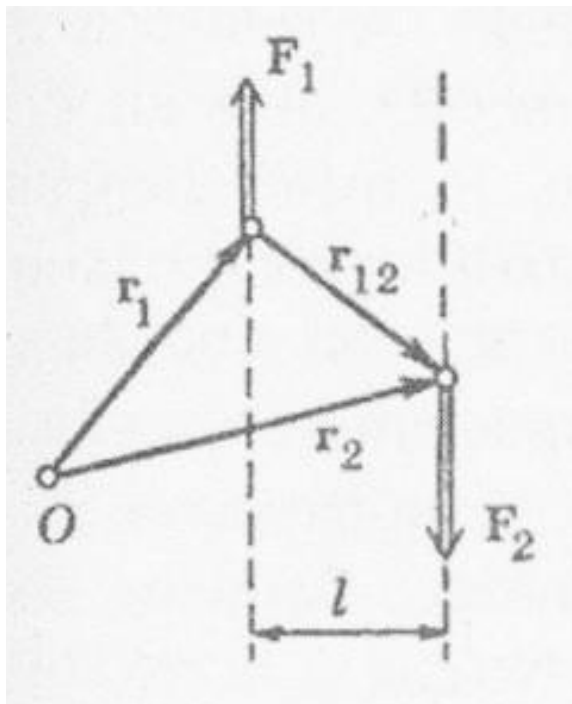


Момент силы относительно оси

Момент силы относительно оси z – характеристика способности силы вращать тело вокруг этой оси.

Поворот тем успешнее, чем больше тангенциальная составляющая силы F_{τ} и плечо R .

Пара сил



Пара сил – две равные по модулю, но противоположно направленные силы, не действующие вдоль одной прямой.

**Плечо пары сил –
расстояние l между прямыми,
вдоль которых действуют силы.**

Уравнение моментов

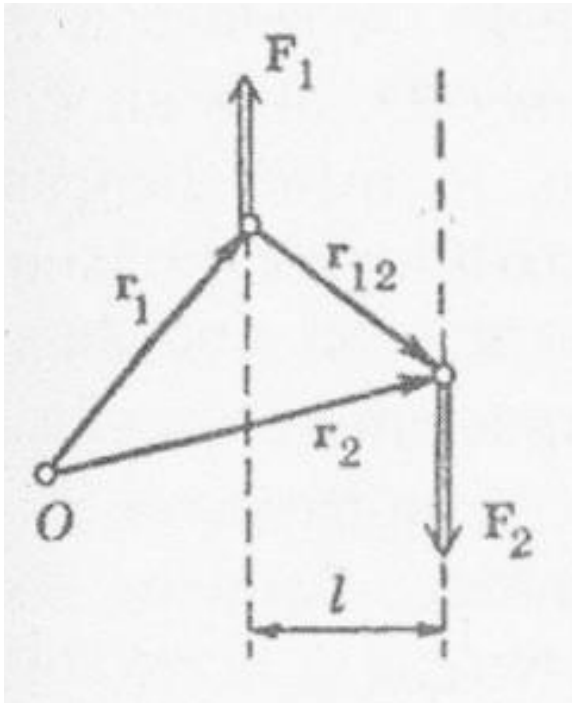
Суммарный момент образующих пару сил $\overset{\curvearrowright}{M} = \left[\overset{\curvearrowright}{r_1} \overset{\curvearrowright}{F_1} + \overset{\curvearrowright}{r_2} \overset{\curvearrowright}{F_2} \right]$

$$\overset{\curvearrowright}{F_1} = -\overset{\curvearrowright}{F_2}.$$

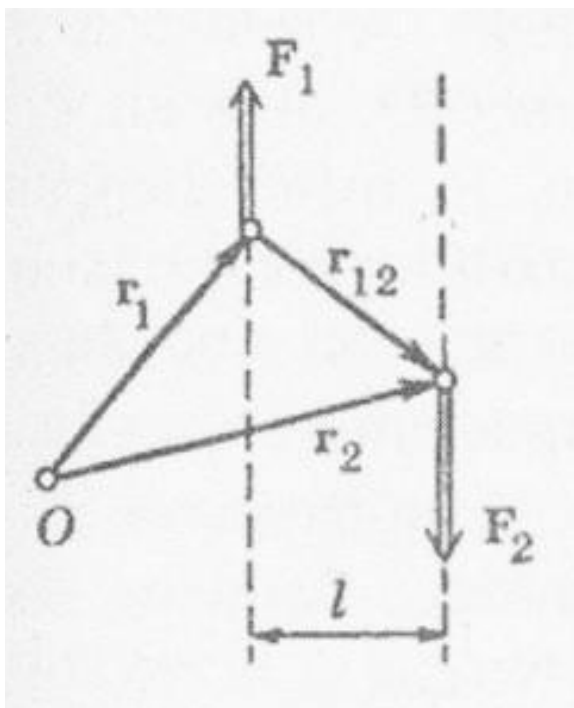
$$\overset{\curvearrowright}{M} = -\left[\overset{\curvearrowright}{r_1} \overset{\curvearrowright}{F_2} \right] + \left[\overset{\curvearrowright}{r_2} \overset{\curvearrowright}{F_2} \right] = \left[(\overset{\curvearrowright}{r_2} - \overset{\curvearrowright}{r_1}) \overset{\curvearrowright}{F_2} \right] = \left[\overset{\curvearrowright}{r_{12}} \overset{\curvearrowright}{F_2} \right]$$

$$\overset{\curvearrowright}{r_{12}} = \overset{\curvearrowright}{r_2} - \overset{\curvearrowright}{r_1}$$

- вектор, проведенный из точки приложения силы $\overset{\curvearrowright}{F_1}$ в точку приложения силы $\overset{\curvearrowright}{F_2}$.



Уравнение моментов



Независимость выражения

$$M = [r_{12} F_2]$$

от выбора точки O .

Следствие:

**момент пары сил относительно
любой точки одинаков.**

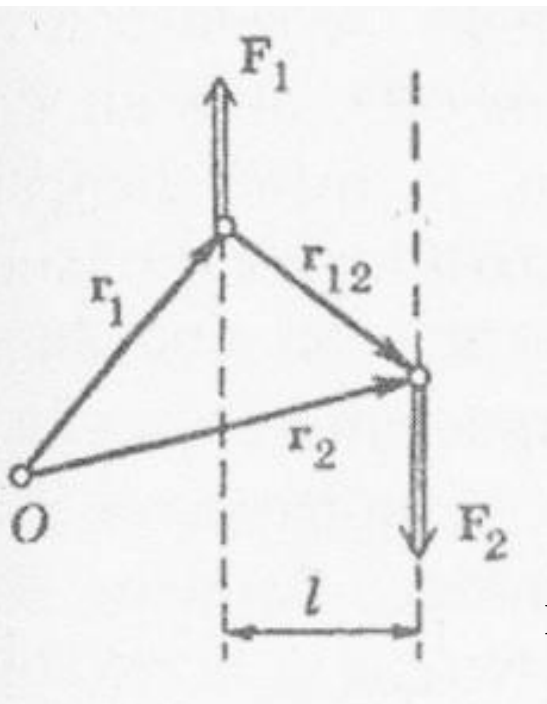
$$\vec{M} = [\vec{r}_{12} \vec{F}_2]$$

Уравнение моментов

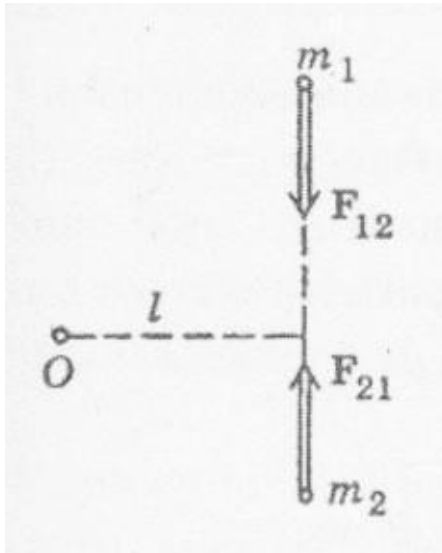
**Направление вектора момента пары сил
- перпендикулярно плоскости,
в которой лежат силы.**

**Равенство численного значения
вектора момента пары сил**

произведению модуля любой из сил на плечо.



Уравнение моментов



Действие сил взаимодействия между частицами вдоль одной и той же прямой.

Равенство по модулю и противоположное направление вдоль одной и той же прямой моментов сил взаимодействия относительно произвольной точки O .

Уравновешивание моментов внутренних сил друг другом, в частности, для твердого тела

$$\sum M_{\text{внутр}} = 0.$$

Момент инерции

Абсолютно твердое тело – система частиц (материальных точек) с неизменным расстоянием между ними.

Момент инерции тела относительно некоторой оси – величина, равная сумме произведений элементарных масс, из которых состоит данное тело, на квадраты их расстояний от некоторой оси,

$$I = \sum \Delta m_i R_i^2.$$

Равенство момента инерции тела сумме моментов инерции его частей.

Момент инерции

**Плотность однородного тела –
характеристика распределения массы m в его объеме V ,**

$$\rho = m / V.$$

Плотность неоднородного тела

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}.$$

$$I = \sum \Delta m_i R_i^2.$$

Момент инерции

$$\Delta m_i = \rho_i \Delta V_i.$$

$$I = \sum \rho_i R_i^2 \Delta V_i.$$

Если $\rho = \text{const}$, то $I = \rho \sum R_i^2 \Delta V_i$.

Наиболее точное решение - $I = \int R^2 dm = \int \rho R^2 dV$.

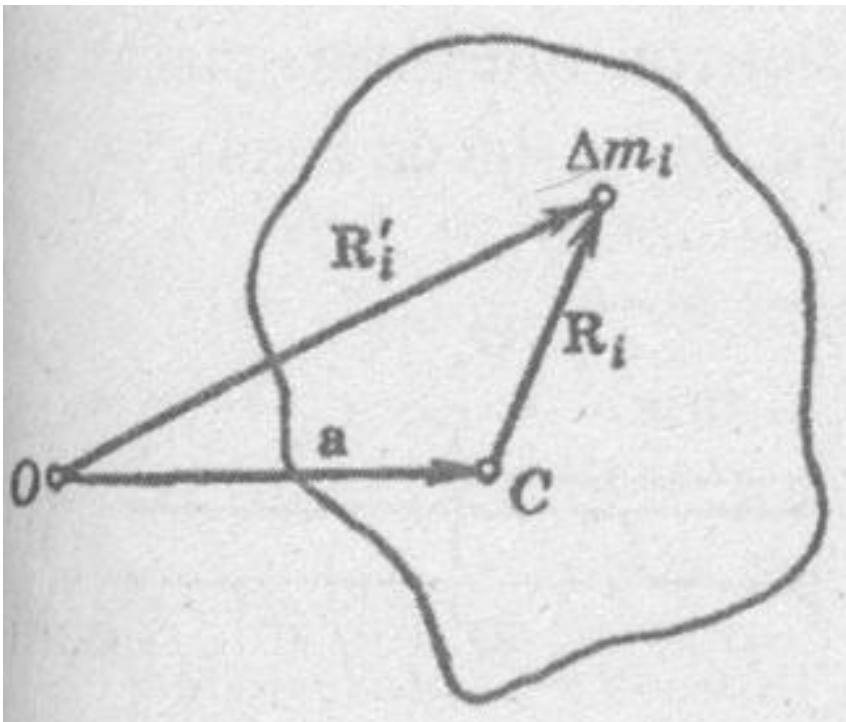
Теорема Штейнера

Момент инерции I тела относительно произвольной оси равен сумме моментов инерции I_C данного тела относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела m на квадрат расстояния a между осями:

$$I = I_C + ma^2.$$

Теорема Штейнера

Доказательство



Предположение:

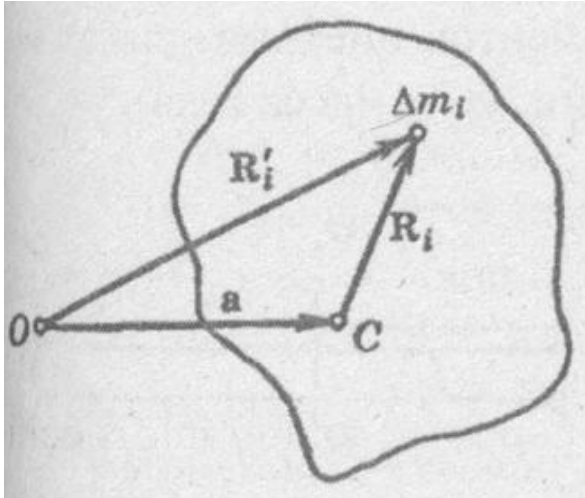
Ось C проходит через центр масс тела.

Ось O параллельна оси C .

Оси перпендикулярны к плоскости экрана.

a – расстояние между осями.

Теорема Штейнера



$$\overset{\Delta}{R}'_i = \overset{\Delta}{a} + \overset{\Delta}{R}_i$$

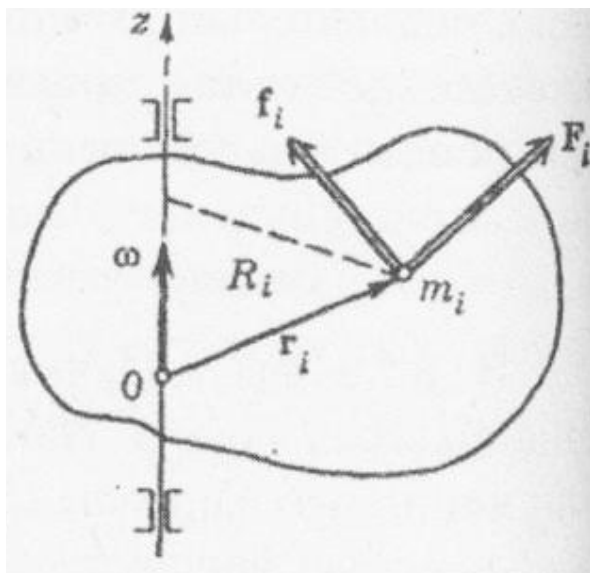
$$R_i'^2 = \left(\overset{\Delta}{a} + \overset{\Delta}{R}_i \right)^2 = a^2 + 2a\overset{\Delta}{R}_i + R_i^2$$

$$I = \sum \Delta m_i R_i'^2 = a^2 \sum \Delta m_i + 2a \overset{\Delta}{\sum} \Delta m_i \overset{\Delta}{R}_i + \sum \Delta m_i R_i^2$$

$$2a \overset{\Delta}{\sum} \Delta m_i \overset{\Delta}{R}_i = 0 \text{ - ось } C \text{ проходит через центр масс.}$$

$$I = ma^2 + I_C$$

Кинетическая энергия вращательного движения твердого тела



Вращение тела вокруг
неподвижной оси z .

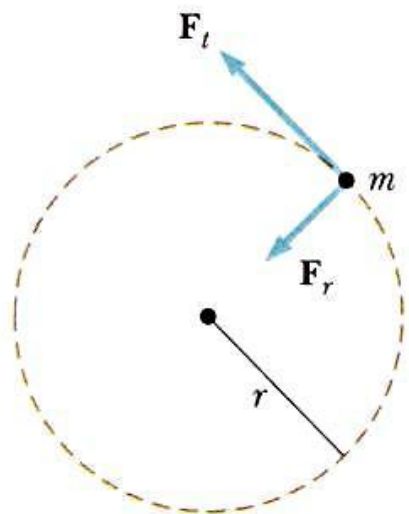
Кинетическая энергия i -й
элементарной массы

$$T_i = \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{1}{2} m_i \omega^2 R_i^2.$$

Кинетическая энергия тела
вращающегося вокруг неподвижной оси

$$T = \sum T_i = \frac{1}{2} \omega^2 \sum m_i R_i^2 = I \omega^2 / 2.$$

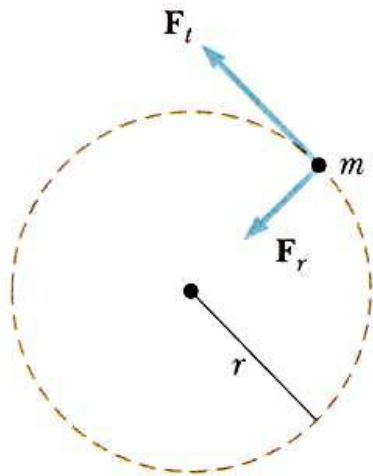
Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела с закрепленной осью вращения



Аналогия со вторым законом Ньютона
для поступательного движения частицы.

Частица массы m движется по
окружности радиуса r под действием
касательной силы F_t и радиальной силы F_r .

Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела с закрепленной осью вращения



Связь между модулями касательного ускорения a_t частицы и вызвавшей это ускорение касательной силой F_t

$$F_t = ma_t.$$

Момент действующей на частицу касательной силы относительно центра окружности

$$M = F_t r = (ma_t)r.$$

$$M = F_t r = (ma_t)r.$$

Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела с закрепленной осью вращения

**Связь между модулями касательного
ускорения и углового ускорения** $a_t = r\varepsilon.$

**Момент действующей на частицу касательной силы
относительно центра окружности**

$$M = F_t r = ma_t r = (mr\varepsilon)r = (mr^2)\varepsilon = I\varepsilon.$$

$I = mr^2$ - **момент инерции частицы относительно
оси z , проходящей через центр окружности.**

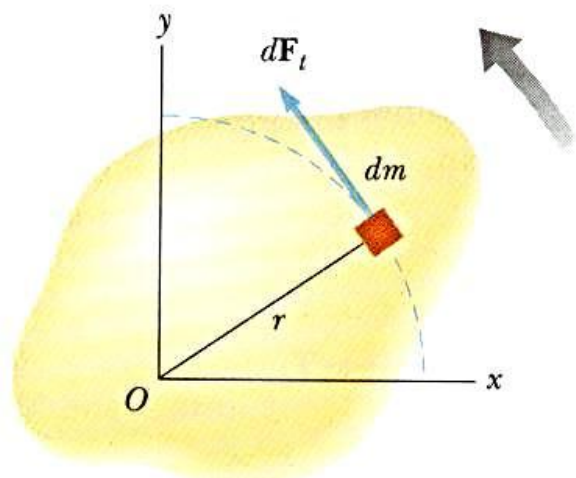
**Основное уравнение
динамики вращательного движения твердого тела
с закрепленной осью вращения**

**Момент действующей на частицу касательной силы
относительно центра окружности
прямо пропорционален ее угловому ускорению**

$$M = I\varepsilon.$$

Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела с закрепленной осью вращения

Бесконечно большое количество материальных точек
(частиц) массы dm и бесконечно малого размера –
аналог твердого тела произвольной формы.



Действие на частицу тела,
вращающегося относительно
фиксированной оси, касательной силы

$$dF_t = (dm)a_t.$$

Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела с закрепленной осью вращения

**Момент касательной силы, действующий относительно оси
вращения и связанный с касательной силой dF_t ,**

$$dM = r dF_t = a_t r dm.$$

$$a_t = r\varepsilon$$

Равенство углового ускорения ε для всех частиц.

$$dM = \varepsilon r^2 dm.$$

**Основное уравнение
динамики вращательного движения твердого тела
с закрепленной осью вращения**

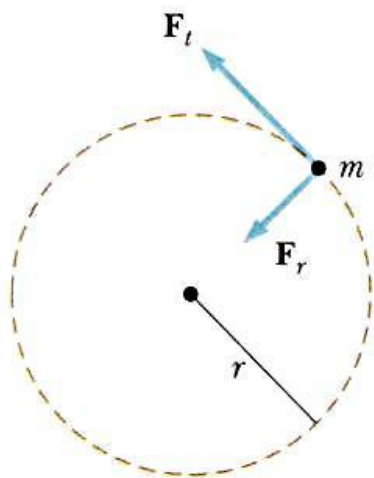
**Момент касательной силы,
действующий относительно оси вращения на тело в целом,**

$$M = \int \varepsilon r^2 dm = \varepsilon \int r^2 dm.$$

**Момент инерции тела относительно оси вращения,
проходящей через точку O ,**

$$I = \int r^2 dm.$$

Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела с закрепленной осью вращения



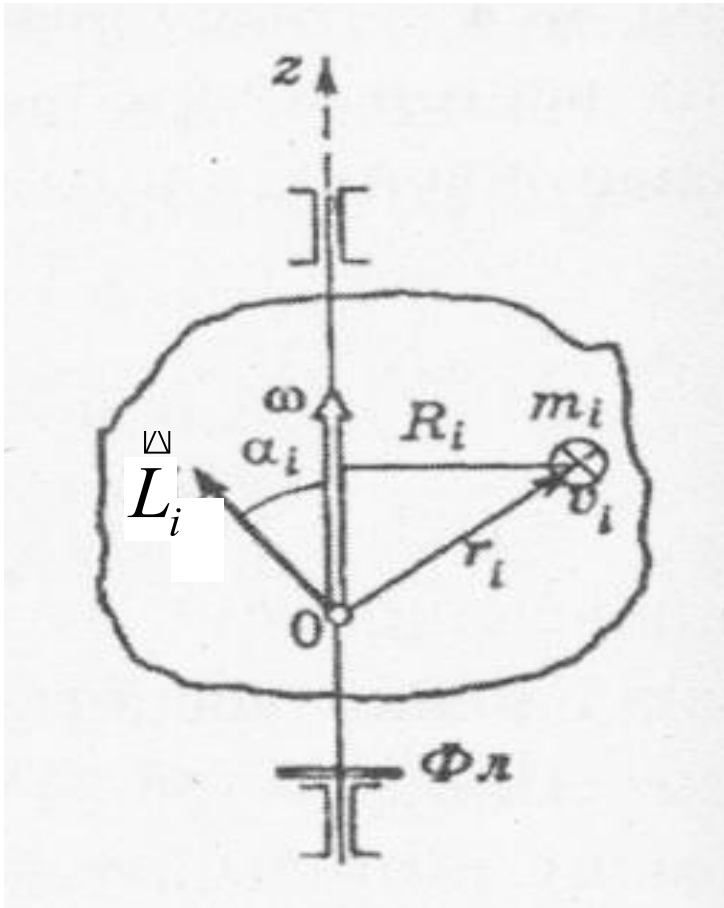
Прохождение линии действия
радиальной силы
через ось вращения тела.

Равенство нулю плеча и момента
радиальной силы.

Справедливость выражения $M = I\varepsilon$.

с учетом как касательных, так и радиальных компонент силы.

Момент импульса тела



Момент импульса отдельно взятой i -ой частицы относительно точки O , лежащей на оси вращения,

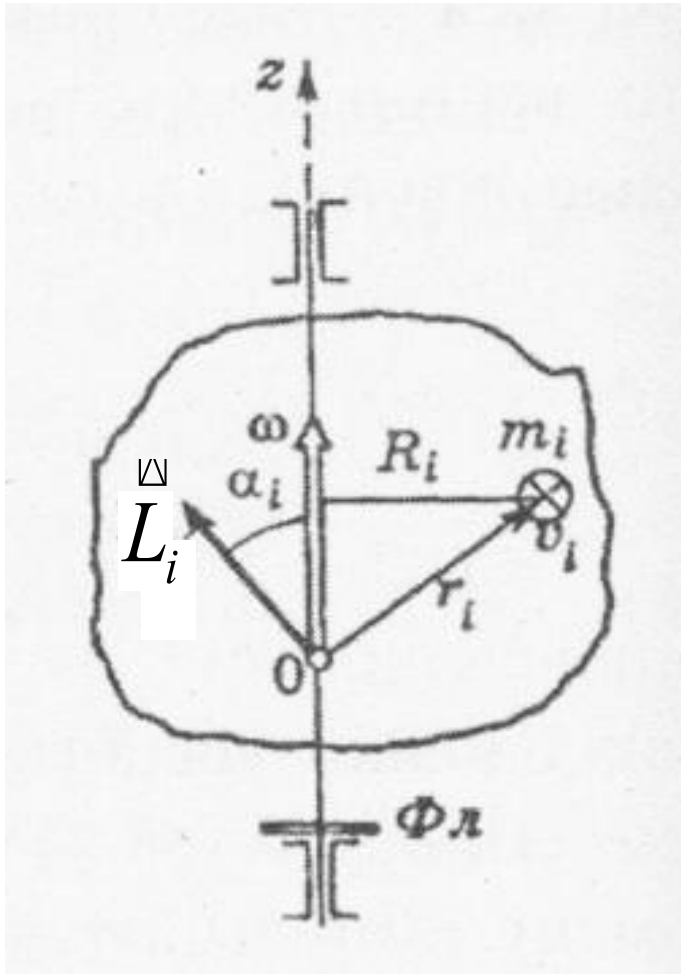
$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i \vec{p}_i] = [\vec{r}_i m_i \vec{v}_i].$$

$$\vec{r}_i \perp \vec{v}_i$$

$$L_i = m_i r_i v_i = m_i r_i \omega R_i.$$

$$L_i = m_i r_i v_i = m_i r_i \omega R_i$$

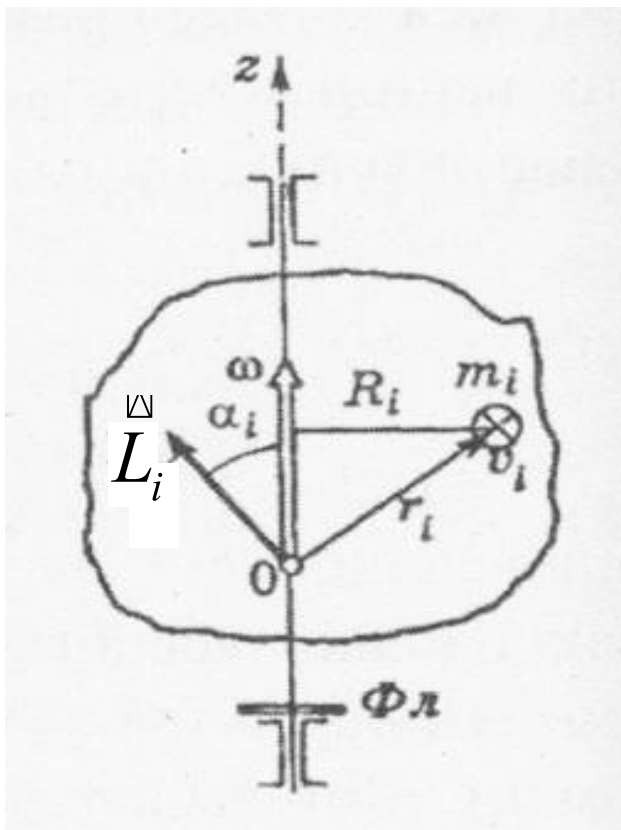
Момент импульса тела



Угол α_i –
острый для любой частицы тела.

$$\begin{aligned} L_{zi} &= L_i \cdot \cos \alpha_i = m_i r_i \omega R_i \cos \alpha_i = \\ &= m_i (r_i \cos \alpha_i) R_i \omega = m_i R_i^2 \omega_i. \end{aligned}$$

Момент импульса тела



Для всего тела

$$L_z = \sum L_{zi} = \sum m_i R_i^2 \omega_z = \omega_z \sum m_i R_i^2.$$

$$I = \sum \Delta m_i R_i^2.$$

$$L_z = I \omega_z.$$

Аналогия: $p_z = m v_z$.

Закон сохранения момента импульса

$$\overset{\square}{M} = \sum_i \overset{\square}{M}_i = \sum_i [\overset{\square}{r}_i \overset{\square}{F}_i]$$

$$\overset{\square}{L} = \sum_i \overset{\square}{L}_i = \sum_i [\overset{\square}{r}_i \overset{\square}{p}_i]$$

$$\sum \overset{\square}{M}_{\text{внутр}} = 0$$

Для всякой системы частиц (тела) $\frac{d}{dt} \overset{\square}{L} = \sum \overset{\square}{M}_{\text{внешн}}$.

$$\frac{d}{dt} L = \sum M_{\text{внешн}}.$$

$$L_z = I\omega_z.$$

Закон сохранения момента импульса

$$\frac{d}{dt} L_z = \sum M_{z \text{ внешн}}$$

$$I\varepsilon_z = \sum M_{z \text{ внешн}}$$

ε_z - проекция углового ускорения на ось z.

Аналогия: $m\omega_z = \sum F_z.$

Закон сохранения момента импульса

Однородное тело, симметричное относительно оси вращения,
- совпадение по направлению момента импульса
относительно точки O , лежащей на оси вращения,
и вектора ω .

$$\vec{L} = I\vec{\omega}.$$

Общий случай несимметричного тела -
невыполнение данного уравнения.

Закон сохранения момента импульса

$$\frac{d}{dt} \overset{\boxtimes}{L} = \sum \overset{\boxtimes}{M}_{\text{внешн}}.$$

Если $\sum \overset{\boxtimes}{M}_{\text{внешн}} = 0$, то $\frac{d}{dt} \overset{\boxtimes}{L} = 0$ и $\overset{\boxtimes}{L}$ постоянен.

Постоянство во времени момента импульса замкнутой системы материальных точек.

Закон сохранения момента импульса

$$\frac{d}{dt} L_z = \sum M_{z \text{ ВНЕШН}}$$

Если $\sum M_{z \text{ ВНЕШН}} = 0$, то $\frac{d}{dt} L_z = 0$ и L_z постоянна.

Постоянство во времени проекции момента импульса замкнутой системы материальных точек на некоторую ось.



Контрольный вопрос



Труба и цилиндр, обладающие одинаковыми радиусами, массой и длиной (высотой), вращаются относительно их продольных центральных осей с одинаковой угловой скоростью.

Большей вращательной кинетической энергией обладает:

- а) полая труба,**
- б) сплошной цилиндр,**
- в) они обладают одинаковыми значениями вращательной кинетической энергии,**
- г) невозможно определить.**