# Лекция 8

# Контрольный вопрос

**Груз массы $m$, прикрепленный к пружине, отведен в положение $x = A$ и отпущен.**

**За полный цикл колебаний груз преодолеет путь, равный:**

**а)** $A/2$,

**б)** $A$,

**в)** $2A$,

**г)** $4A$.

**г)** $4A$.

# Содержание предыдущей лекции

## Механические колебания

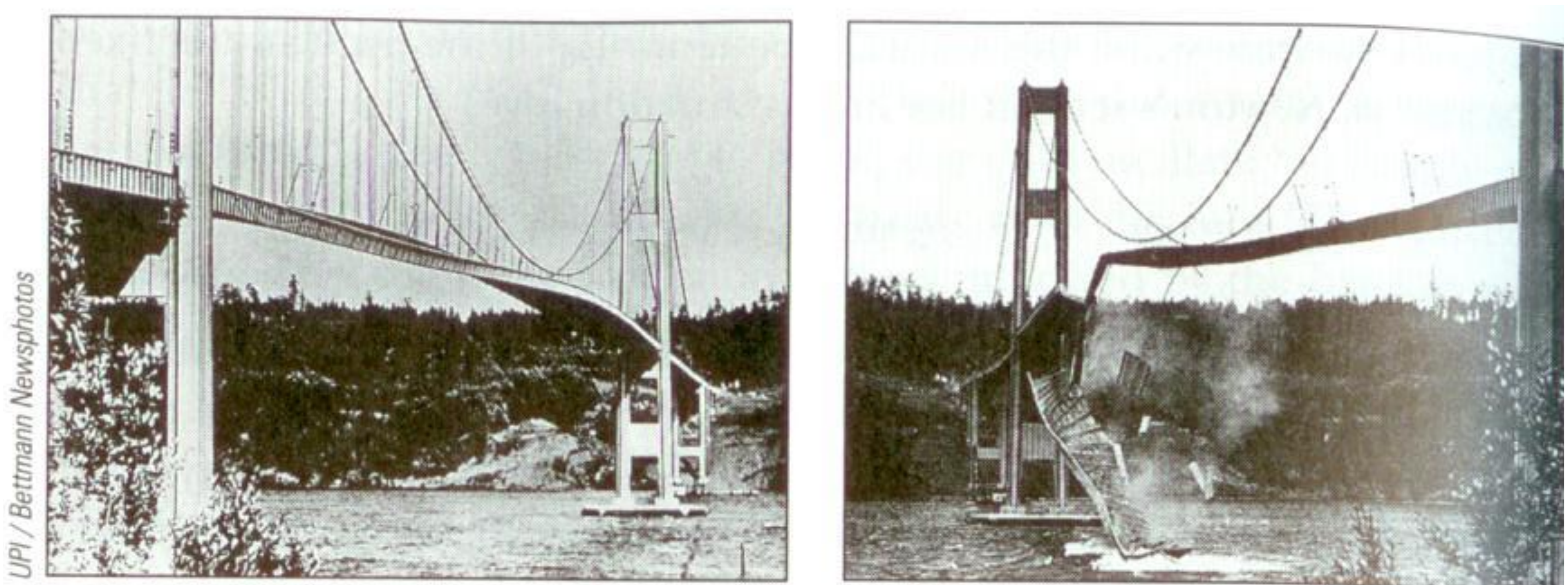
- Гармонические колебания: амплитуда, частота и фаза колебаний.
- Кинематическая и векторная форма представления колебаний.
- Идеальный гармонический осциллятор. Уравнение идеального осциллятора и его решение.
- Свободные затухающие колебания.

# Содержание сегодняшней лекции

## Механические колебания

- **Вынужденные колебания. Время установления вынужденных колебаний и его связь с добротностью.**
- **Сложение колебаний. Векторное описание сложения колебаний. Биения, фигуры Лиссажу.**
- **Разложение и синтез колебаний.**
- **Понятие о спектре колебаний.**
- **Связанные колебания.**
- **Волновое движение.**
- **Уравнение волны в газах, жидкостях и твердых телах.**
- **Плоская механическая волна.**
- **Длина волны, волновое число, фазовая скорость.**
- **Одномерное волновое уравнение.**

# Резонанс




**Разрушение моста в результате резонанса.**

# Время установления вынужденных колебаний и его связь с добротностью

**Процесс установления колебаний – переходный процесс.**

**Зависимость процесса установления колебаний от:**

- **соотношения между частотами собственных колебаний и вынуждающей силы,**
- **сдвига по фазе между ними.**

# Время установления вынужденных колебаний и его связь с добротностью

**Частный случай:** $\omega = \omega_0$, **сдвиг по фазе на π.**

**График изменения вынуждающей силы**

$x = A \sin \omega t$

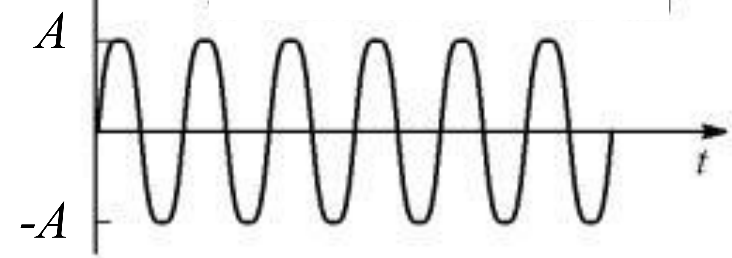



**График собственных затухающих колебаний**

$x = -A \exp(-\beta t) \sin \omega t$

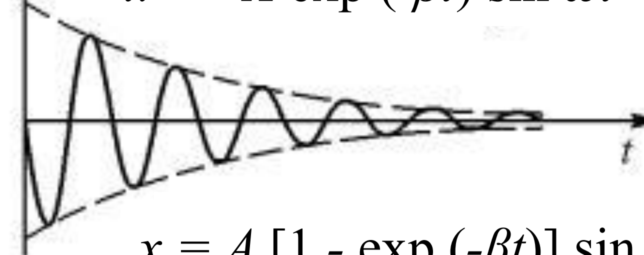
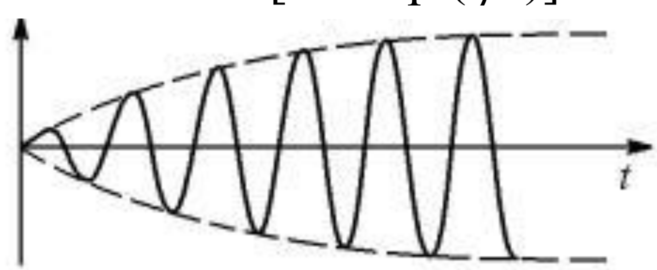


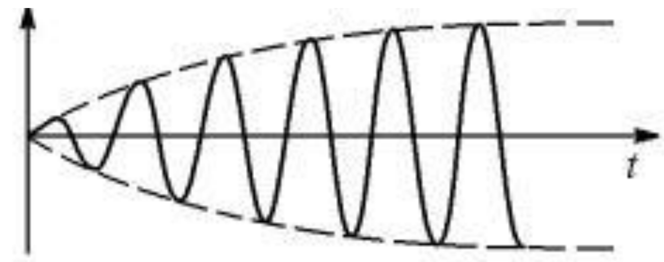

**График результирующих колебаний**

$x = A\,[1 - \exp(-\beta t)] \sin \omega t$



# Время установления вынужденных колебаний и его связь с добротностью

**Частный случай:** $\omega = \omega_0$, **сдвиг по фазе на $\pi$.**




**Завершение процесса:**

**только вынужденные колебания.**

**Случай малого затухания собственных колебаний: результирующее колебание - синусоидальное колебание, амплитуда которого медленно нарастает со временем.**

**Совпадение характерного времени установления колебаний с временем жизни собственных затухающих колебаний в той же системе.**

# Время установления вынужденных колебаний и его связь с добротностью

**Частный случай:** $\omega < \omega_0$**, сдвиг по фазе на π.**

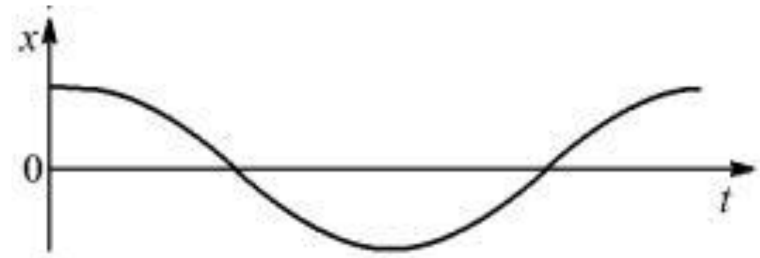



**График изменения вынуждающей силы**

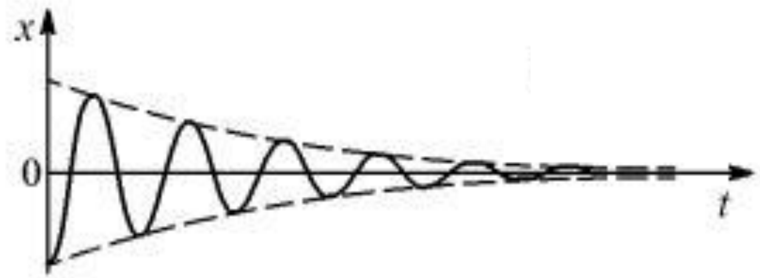



**График собственных затухающих колебаний**

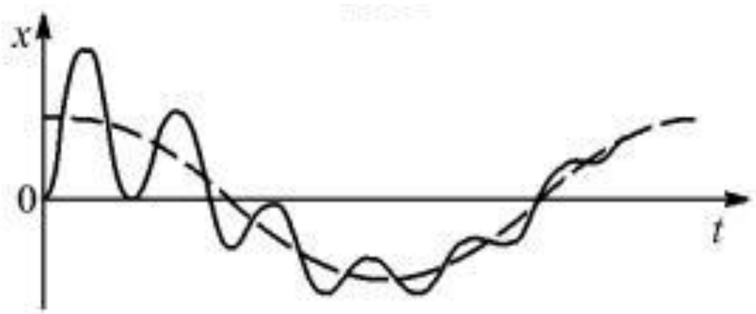



**График результирующих колебаний**

# Время установления вынужденных колебаний и его связь с добротностью

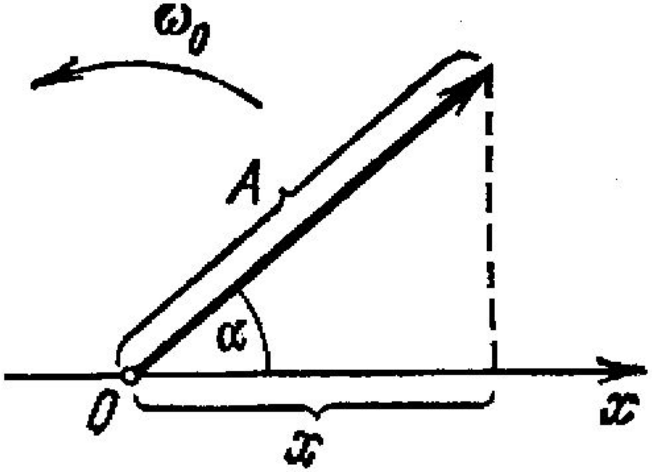
**Случай медленного затухания собственных колебаний:**

- **выше добротность,**
- **острее резонанс,**
- **больше запасаемая системой энергия.**

**Больше времени для сообщения энергии этой системе – медленное установление колебаний.**

**Выше добротность - длительнее переходные процессы.**

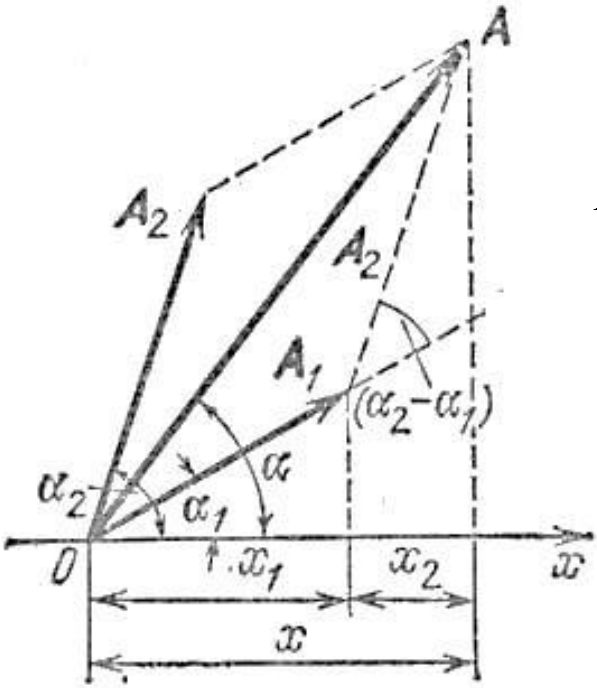
# Векторное представление колебательного движения




$$x = A\cos(\omega t + \alpha)$$

# Сложение колебаний одного направления и одинаковой частоты

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \alpha_1) \qquad x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \alpha_2) \qquad x = x_1 + x_2$$

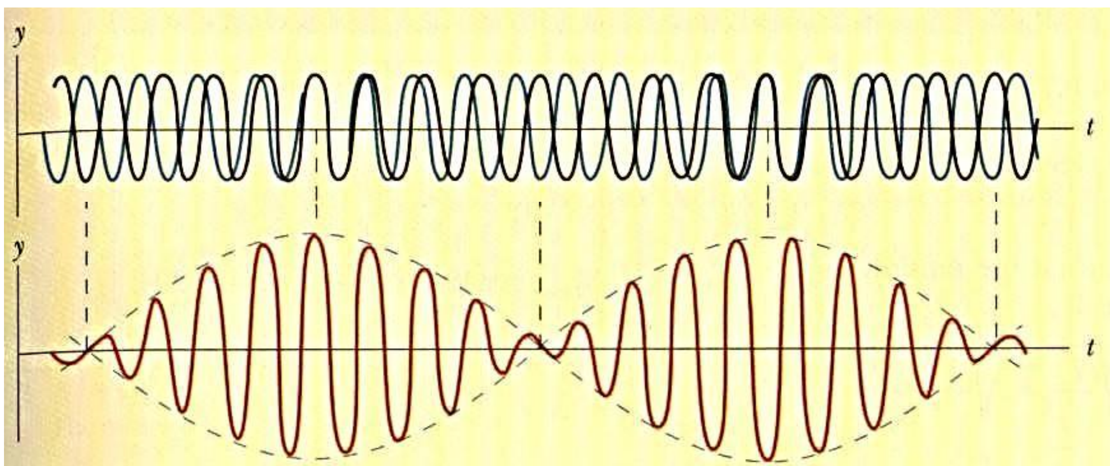



$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos[\pi - (\alpha_2 - \alpha_1)] =$$
$$= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1),$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2}{A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2}.$$

# Сложение колебаний одного направления с близкими частотами

**Биения – гармоническое колебание с пульсирующей амплитудой – результат сложения двух гармонических колебаний одного направления, мало отличающихся по частоте.**




**Складываемые колебания**

**Результирующее колебание**

# Сложение колебаний одного направления с близкими частотами

$$\Delta\omega << \omega$$

$$x_1 = A\cos\omega t, \qquad x_2 = A\cos[(\omega + \Delta\omega)t]$$

$$x = x_1 + x_2 = \left(2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cos\omega t$$

**Медленно изменяющаяся во времени амплитуда**

$\Delta\omega$ - **частота биений (пульсаций амплитуды) равна разности частот складываемых колебаний.**

# Сложение взаимно перпендикулярных колебаний с одинаковыми частотами

$$\vec{x} = \vec{e}_x A\cos\omega t \qquad x = A\cos\omega t \qquad \cos\omega t = \frac{x}{A}$$

$$\vec{y} = \vec{e}_y B\cos(\omega t + \alpha) \qquad y = B\cos(\omega t + \alpha) \qquad \sin\omega t = \pm\sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}$$

$$\frac{y}{B} = \cos(\omega t + \alpha) = \cos\omega t\cos\alpha - \sin\alpha\sin\omega t =$$

$$= \frac{x}{A}\cos\alpha \mp \sin\alpha\sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}$$

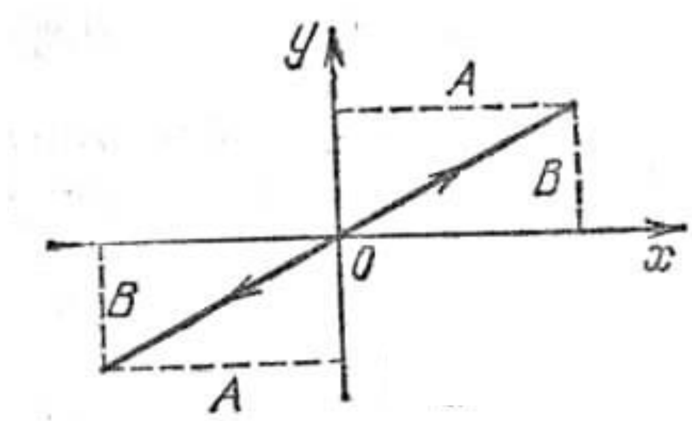
$$\frac{y}{B} - \frac{x}{A}\cos\alpha = \mp\sin\alpha\sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \qquad \left(\frac{y}{B} - \frac{x}{A}\cos\alpha\right)^2 = \sin^2\alpha\left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right)$$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB}\cos\alpha = \sin^2\alpha$$

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}-\frac{2xy}{AB}\cos\alpha=\sin^2\alpha.$$

## Сложение взаимно перпендикулярных колебаний с одинаковыми частотами

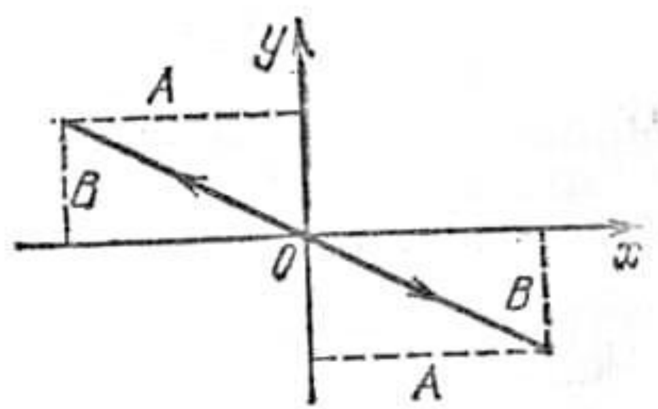
$\alpha=0:$ $$\left(\frac{x}{A}-\frac{y}{B}\right)^2=0. \quad y=\frac{B}{A}x$$ **- уравнение прямой.**



$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}-\frac{2xy}{AB}\cos\alpha=\sin^2\alpha.$$

# Сложение взаимно перпендикулярных колебаний с одинаковыми частотами

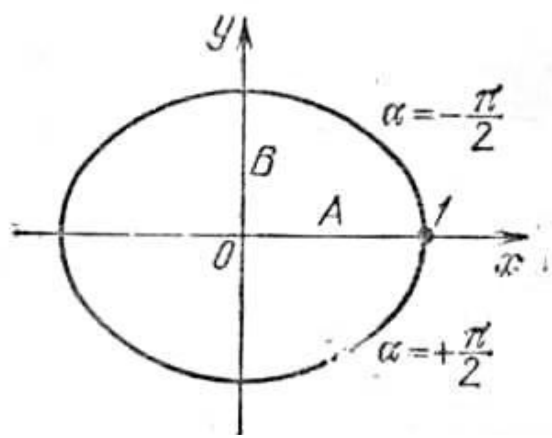
$\alpha=\pm\pi:$ $$\left(\frac{x}{A}+\frac{y}{B}\right)^2=0.\quad y=-\frac{B}{A}x$$ **- уравнение прямой.**



$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}-\frac{2xy}{AB}\cos\alpha=\sin^2\alpha$$

## Сложение взаимно перпендикулярных колебаний с одинаковыми частотами

$\alpha=\pm\frac{\pi}{2}$: $\qquad \frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1$ **- уравнение эллипса.**

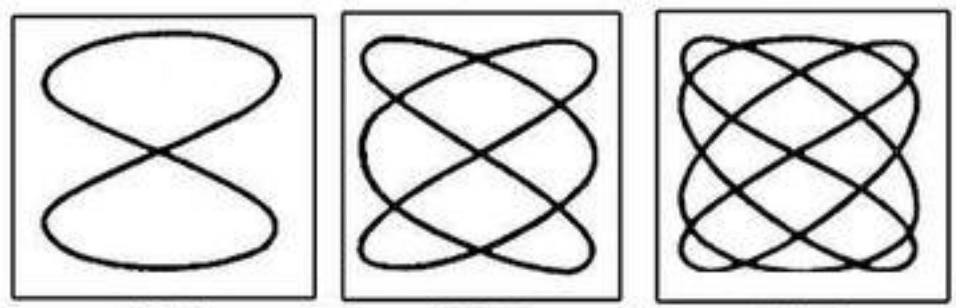


# Сложение взаимно перпендикулярных колебаний с разными частотами

$$x = A\cos\omega t, \qquad y = B\cos[\omega t + (\Delta\omega t + \alpha)].$$

## Фигуры Лиссажу

**Разность фаз -** $\pi/2$ $\pi/2$ $\pi/2$



**Отношение частот** 1:2 2:3 3:4

# Разложение и синтез колебаний

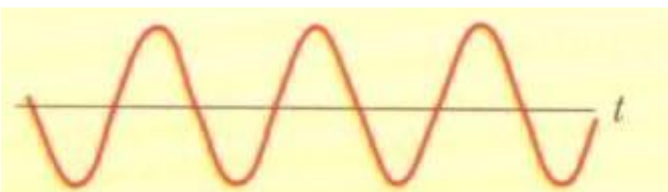
**Фурье-анализ –**
**возможность представления периодических колебаний комбинацией достаточного числа гармонических (синусоидальных) колебаний.**

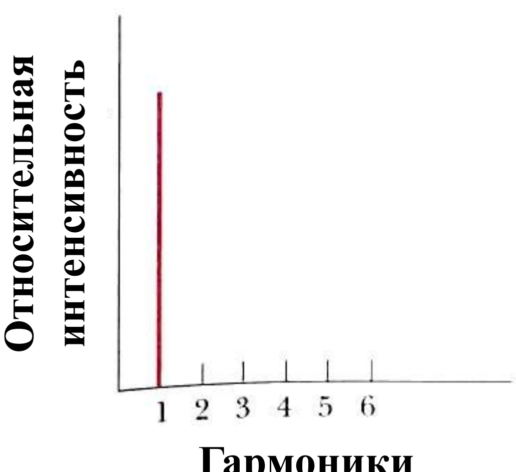
**Ряд Фурье** $y(t) = \sum_n (A_n \sin 2\pi f_n t + B_n \cos 2\pi f_n t),$

$$f_n = n f_1,$$

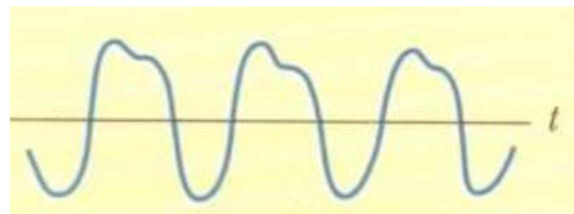
$A_n$ **и** $B_n$ **- амплитуды различных колебаний.**

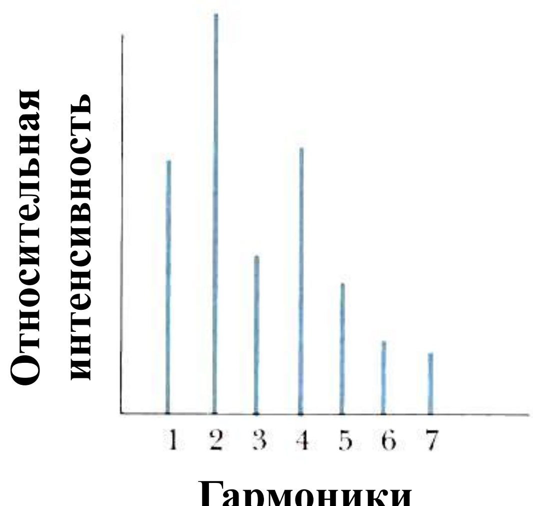
**Камертон**



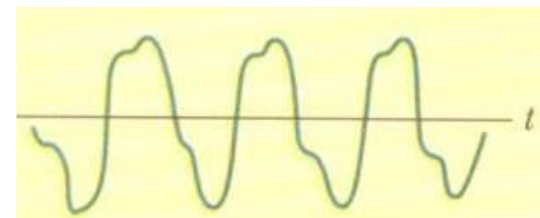



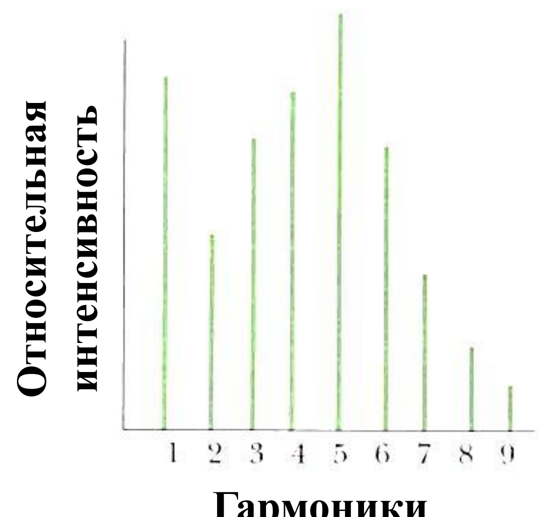

**Флейта**



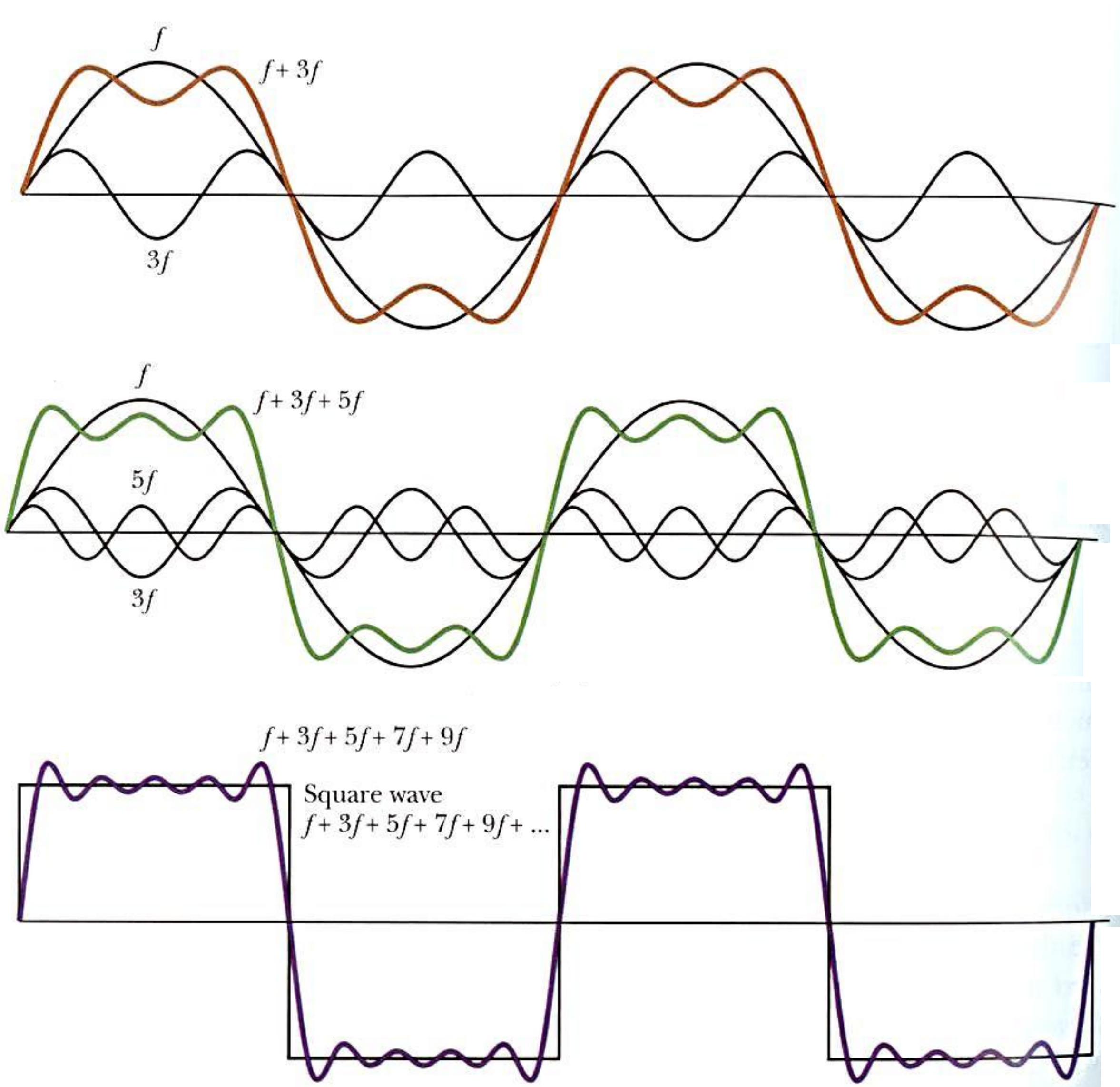




**Кларнет**



# Фурье-синтез квадратного колебания



# Передача сигналов на большие расстояния

**Требование большой энергии сигналов.**

**Пропорциональность энергии сигнала**
**четвертой степени его частоты –**
**чем больше частота, тем больше энергия.**

**Практика: низкая частота колебаний у сигналов,**
**несущих в себе информацию, например, речевых сигналов.**

**Необходимость повышения частоты информационных**
**сигналов для их передачи на большие расстояния.**

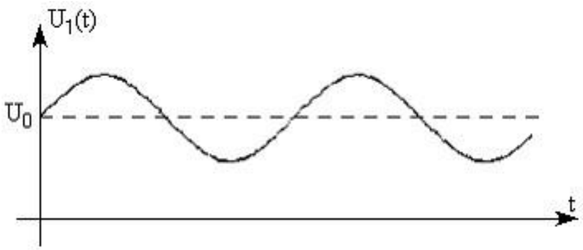
# Передача сигналов на большие расстояния

**Модуляция –**
**накладывание низкочастотного информационного сигнала на высокочастотный опорный сигнал.**

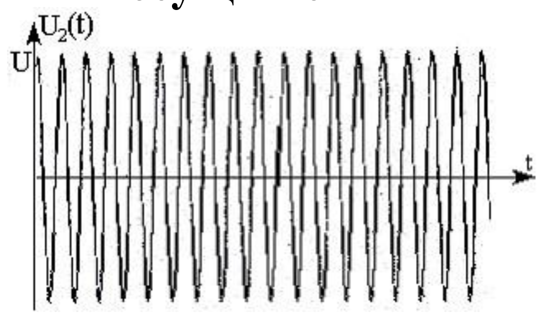
# Передача сигналов на большие расстояния

## Амплитудная модуляция

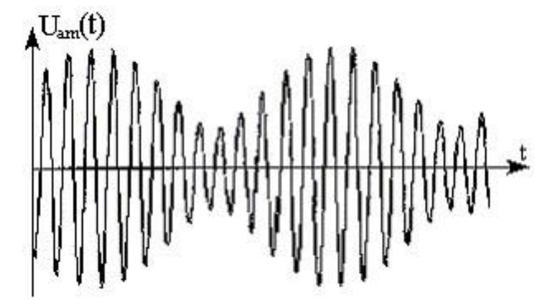
### Информационный сигнал




### Несущий сигнал

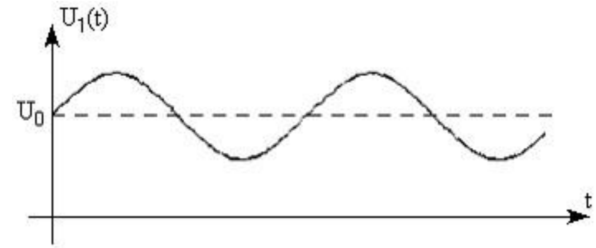



### Амплитудно–модулированный сигнал

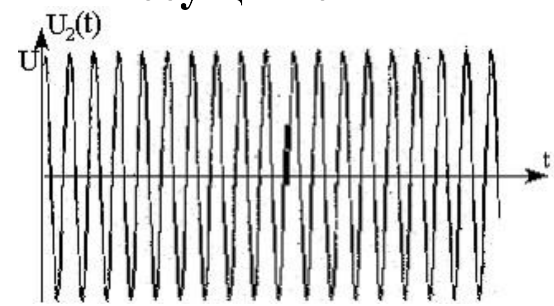



## Частотная модуляция

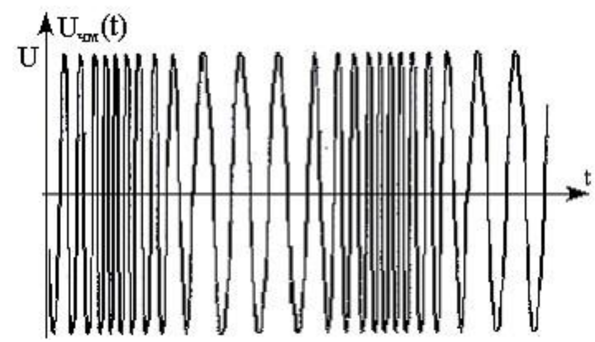
### Информационный сигнал




### Несущий сигнал



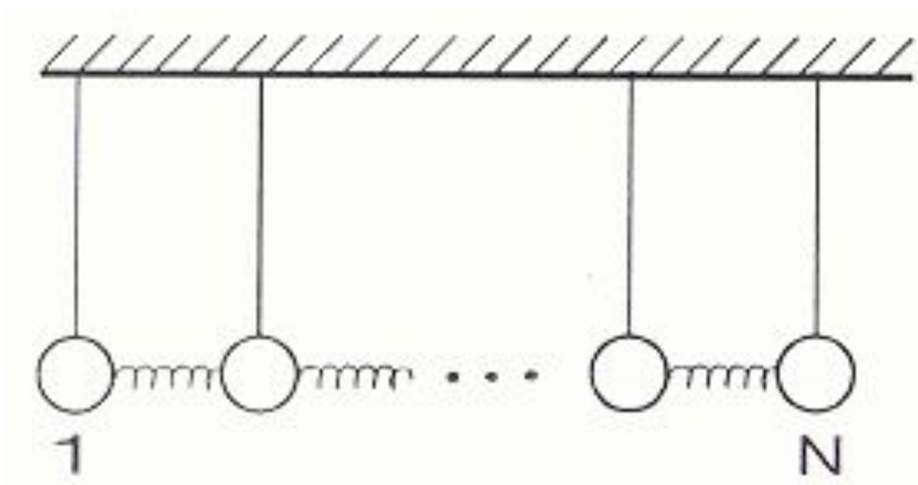

### Частотно–модулированный сигнал

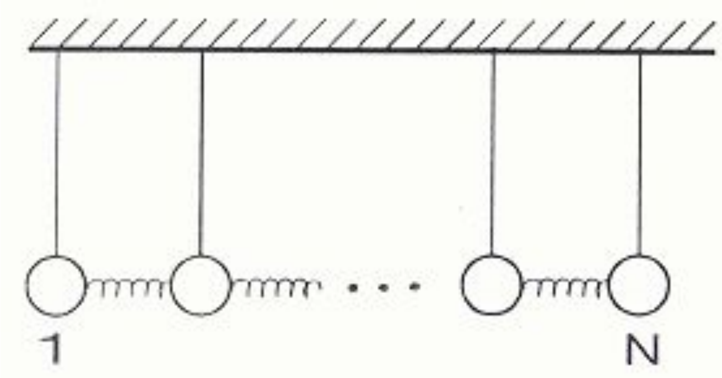


# Связанные колебания

**Связанные системы – колебательные системы, состоящие из нескольких тел, взаимодействующих между собой посредством упругих сил.**

**Связанные системы – несколько связанных между собой простых колебательных систем с одной степенью свободы у каждой.**





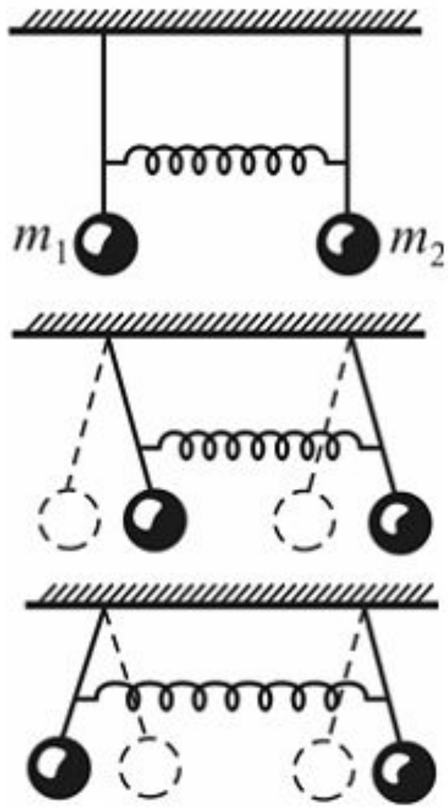

# Связанные колебания

**Парциальная частота –**
**частота, с которой будут совершаться колебания, если закрепить все тела, кроме рассматриваемого.**

**$n$ степеней свободы у системы из $n$ тел с одной степенью свободы у каждого.**

# Связанные колебания

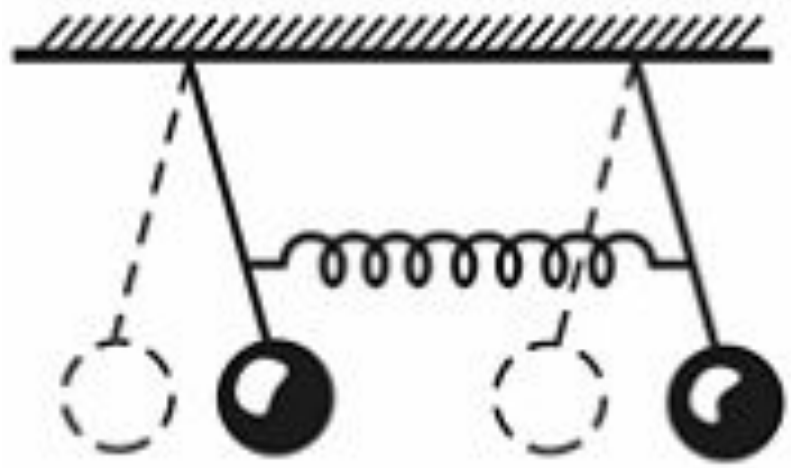
## Зависимость характера колебаний от начальных условий.



# Связанные колебания

**Смещение в одну сторону - синхронные колебания тел с одинаковыми амплитудами, фазами и частотой $\omega_1$, равной частоте собственных колебаний.**

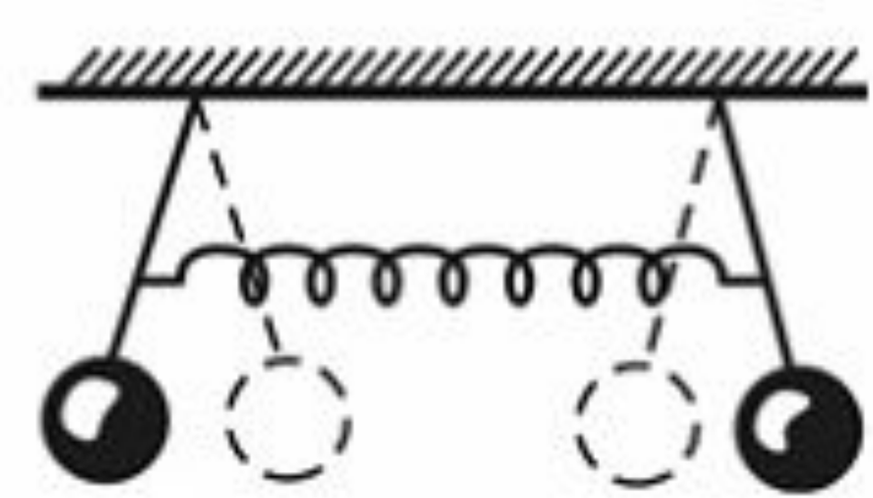
**$\omega_1$ – частота колебаний под действием силы тяжести (пружина не оказывает влияния на колебания).**



$$x_1 = A\cos\omega_1 t \qquad x_2 = A\cos\omega_1 t$$

# Связанные колебания

**Смещение тел в противоположные стороны – гармонические колебания в противофазе с $\omega_2 > \omega_1$.**



$$x_1 = A\cos\omega_2 t \qquad x_2 = -A\cos\omega_2 t$$

# Связанные колебания

$\omega_1$ и $\omega_2$ **– нормальные частоты колебаний тел системы, а соответствующие колебания – нормальные колебания.**

**Соответствие числа степеней свободы системы числу нормальных колебаний.**

# Связанные колебания

**Другие колебания системы –**
**– суперпозиция нормальных колебаний.**

**Пример: суперпозиция нормальных колебаний**
**с одинаковыми амплитудами.**

$$x_1 = A(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t) = 2A\cos\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\cos\omega t,$$

$$x_2 = A(\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t) = 2A\sin\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\sin\omega t,$$

$$\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2.$$

**Зависимость амплитуды колебаний от времени –**
**негармонические колебания.**

# Связанные колебания

**Жесткость пружины небольшая –
слабое воздействие на маятники:** $\omega_2 \approx \omega_1.$

$$\omega_2 - \omega_1 << \omega$$

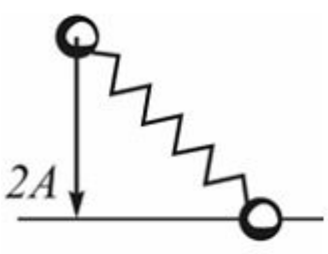
**- возможность рассмотрения результирующих колебаний
как гармонических колебаний
с медленно меняющейся во времени амплитудой.**

$$x_1 = A(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t) = 2A\cos\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\cos\omega t,$$

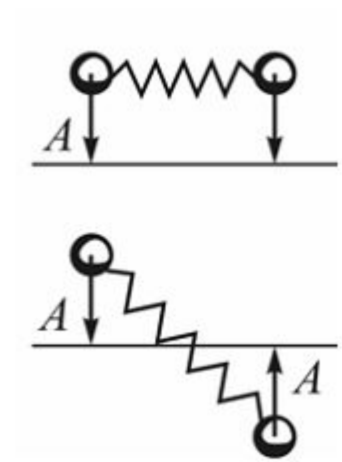
$$x_2 = A(\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t) = 2A\sin\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\sin\omega t.$$

# Суперпозиция нормальных колебаний с одинаковыми амплитудами

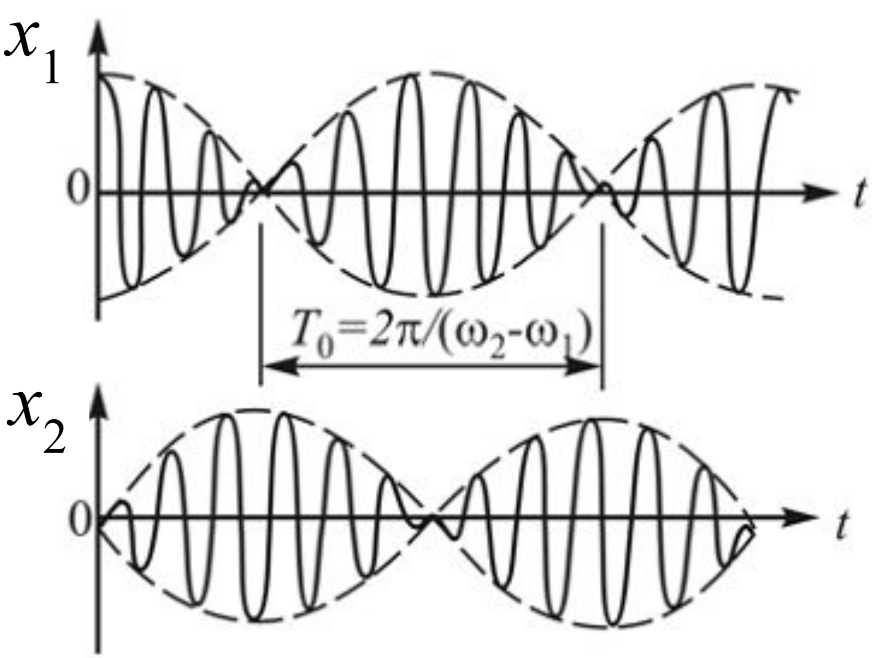
**Начальные условия** $(t=0)$: $x_1 = 2A, \quad x_2 = 0.$




**Суперпозиция начальных условий для нормальных колебаний:**



# Суперпозиция нормальных колебаний с одинаковыми амплитудами




**Постепенный расход энергии, сообщенной 1-ому маятнику при его начальном отклонении, на возбуждение колебаний 2-ого маятника.**

**Концентрация энергии во 2-м маятнике через промежуток времени $T_0/2 = \pi / (\omega_2 - \omega_1)$, равный половине периода биений.**

**Далее: обратный переход энергии к 1-ому маятнику и повторение связанных колебаний.**

$$T_0/2 = \pi/(\omega_2 - \omega_1)$$

## Суперпозиция нормальных колебаний с одинаковыми амплитудами

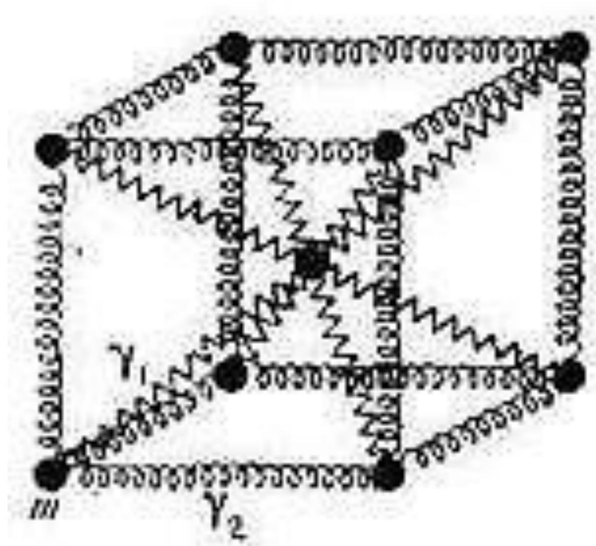
**Равенство частоты биений (частоты передачи энергии) разности нормальных частот колебаний системы.**

**Зависимость частоты биений в системе от степени связи между колеблющимися телами.**

**Обусловленность процесса передачи энергии между колеблющимися телами в системе наличием связывающей их упругой пружины.**

# Связанные колебания

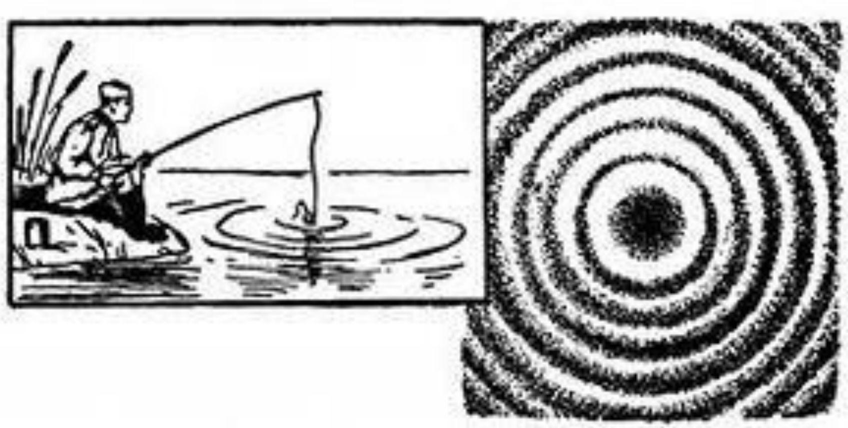
**Колебания атомов (ионов) в узлах кристаллической решетки – пример связанной системы.**

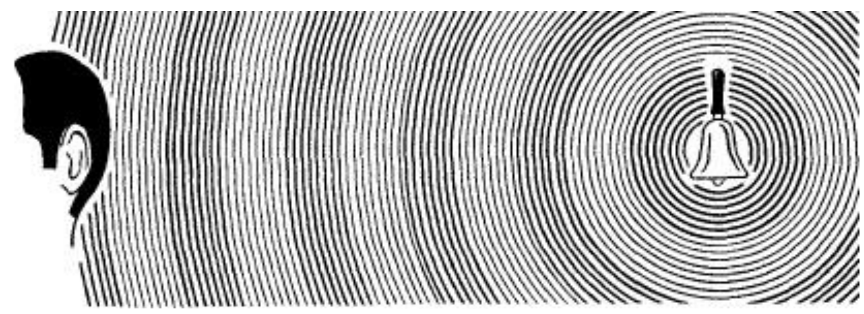


# Волновое движение

# Волновое движение

**Волновое движение - результат колебательного процесса.**





# Волновое движение

**Две разновидности волн –**
**механические и электромагнитные волны.**

**Распространение механических волн в какой-либо среде (звуковые волны в воздухе, волны на поверхности воды, упругие волны в твердом теле).**

**Распространение электромагнитных волн (видимый свет, радиоволны, телевизионный сигнал, рентгеновские лучи) даже в вакууме.**

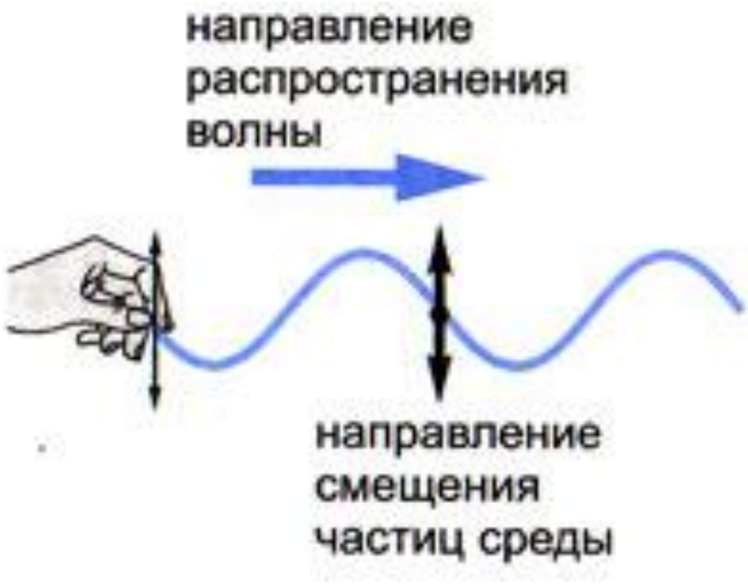
# Волновое движение

**Предмет рассмотрения - механические волны.**

**Характеристики механических волн – амплитуда, длина, частота, направление и скорость распространения волны.**


# Волновое движение

## Механические волны – продольные и поперечные.

# Уравнение волны в газах, жидкостях и твердых телах

**Простейший случай – распространение синусоидальных волн.**

**Синусоидальные волны – результат гармонических колебаний.**

**Возможность описать распространение
продольной или поперечной волны
с использованием одинаковых аналитических выражений.**

# Уравнение волны в газах, жидкостях и твердых телах

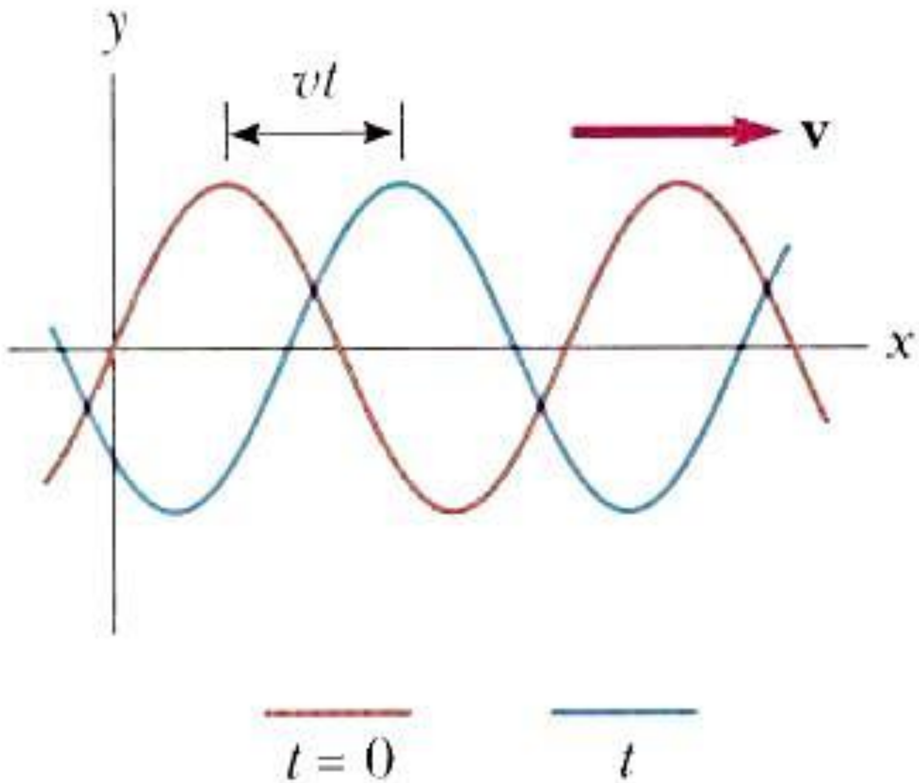
**Пример: распространение поперечной волны в упругой среде.**

$y$ **- положение точки упругой среды (смещение из положения равновесия) в момент времени** $t$**.**

$y\,(x,\,0) = f\,(x)$ **– волновая функция, описывающая профиль волны (смещение точек упругой среды из положений равновесия) в точке с координатой** $x$ **в момент времени** $t = 0$**.**

$v$ **– скорость распространения волны в упругой среде.**

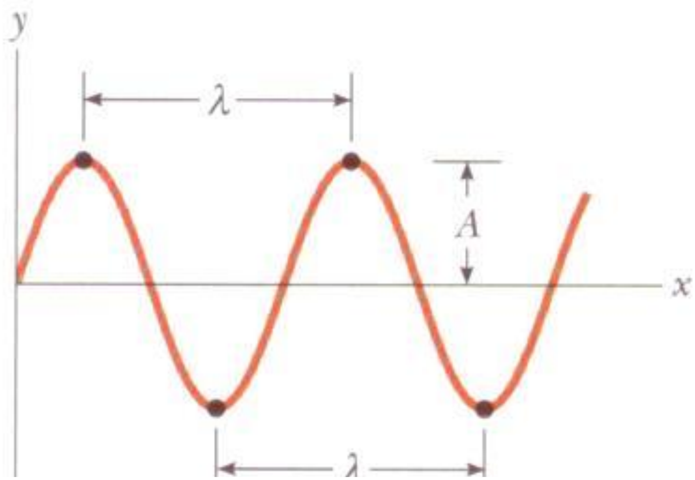
# Уравнение волны в газах, жидкостях и твердых телах

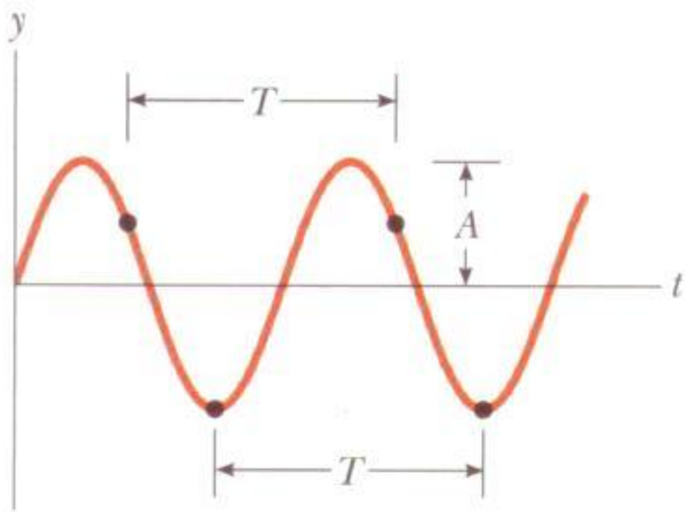



**Совпадение профилей волны**

$$y\ (x,\ t) = y\ (x - vt,\ 0) = f\ (x - vt).$$

# Длина волны, волновое число, фазовая скорость




**Длина волны $\lambda$ – расстояние между двумя соседними гребнями волны.**

**Длина волны $\lambda$ – минимальное расстояние между двумя любыми идентичными точками волны.**

**Период волны $T$ – временной интервал между моментами прохождения данной точки пространства двумя соседними гребнями волны.**

# Длина волны, волновое число, фазовая скорость

**Частота периодической волны $f$ –**
**число гребней (или любых других идентичных точек) волны, проходящих через данную точку пространства за единичный интервал времени,**

$$f = \frac{1}{T}.$$

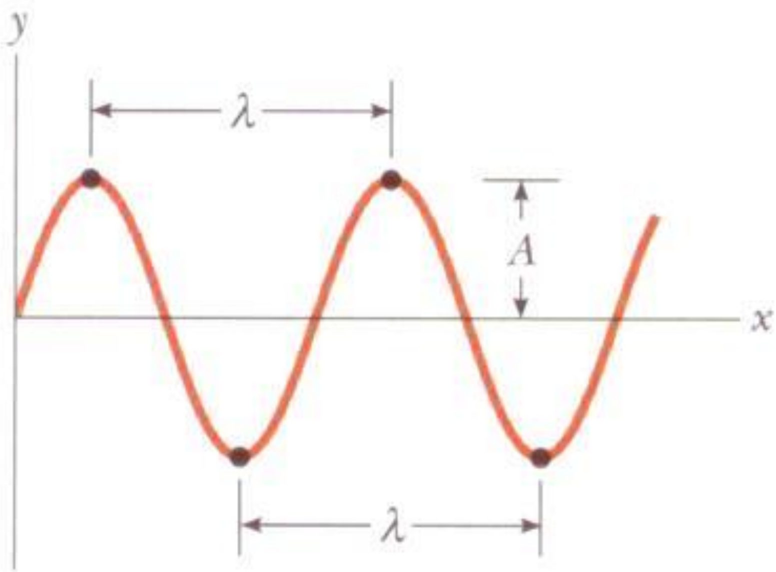
**Амплитуда $A$ волны - максимальное смещение точки среды из положения равновесия под воздействием волны.**

$y\ (x,\ t) = y\ (x - vt,\ 0)$

# Длина волны, волновое число, фазовая скорость

$$y(x,0) = A\sin ax.$$

$$y(0,0) = A\sin a(0) = 0.$$




$$y\left(\frac{\lambda}{2},0\right) = A\sin a\left(\frac{\lambda}{2}\right) = 0.$$

$$a = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

$$y(x,0) = A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right).$$

$$y(x,t) = A\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right] = A\sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right]. \qquad v = \frac{\lambda}{T}.$$

$$y(x,t) = A\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right] = A\sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right]$$

# Длина волны, волновое число, фазовая скорость

**Волновое число** $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}.$ $\qquad \omega = \dfrac{2\pi}{T}.$

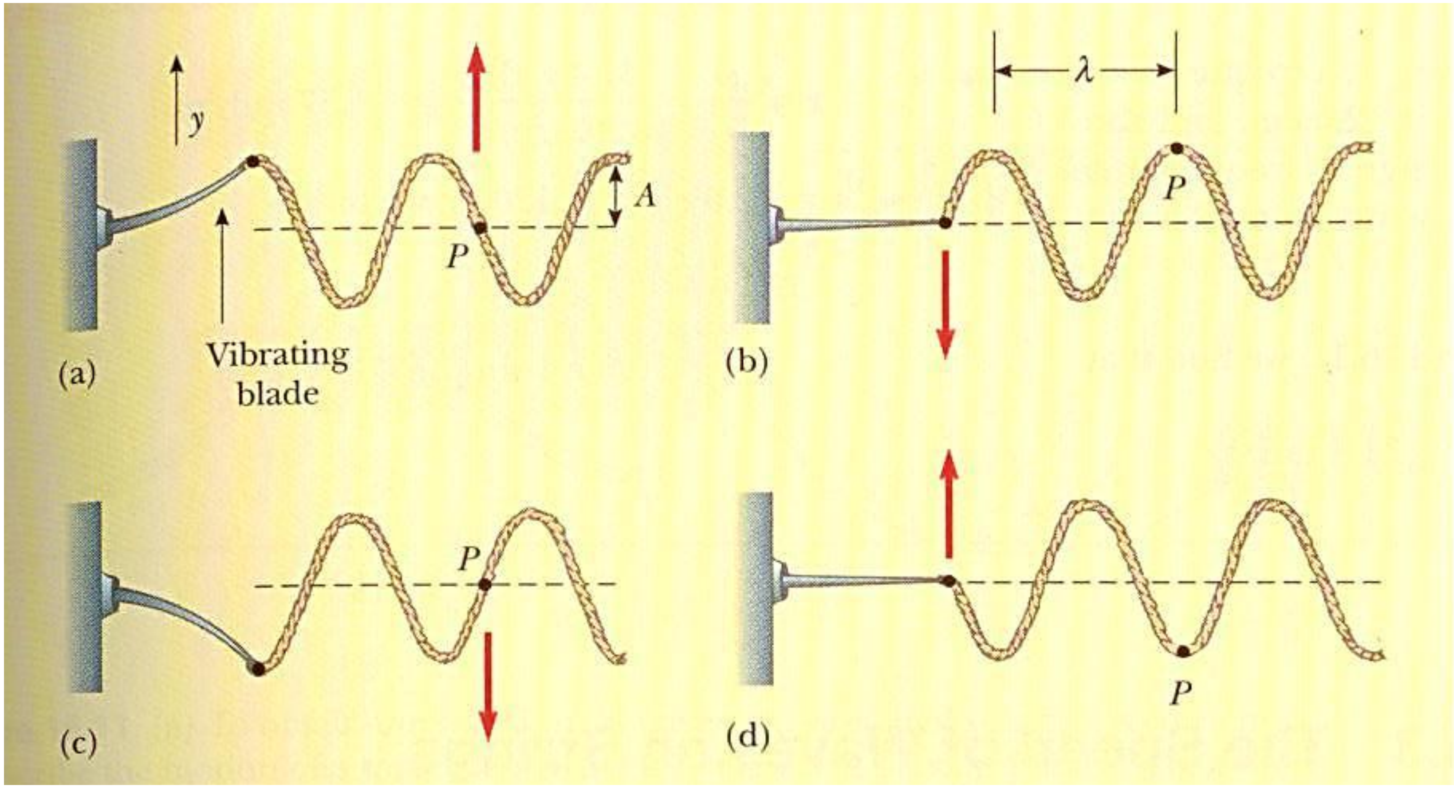
$$y = A\sin(kx - \omega t). \qquad v = \frac{\omega}{k}.$$

**Общий случай:** $y = A\sin(kx - \omega t + \phi).$

**Постоянная $\varphi$ - фаза волны, определяемая из начальных условий.**

# Длина волны, волновое число, фазовая скорость

**Вертикальные колебания каждой точки упругой струны при прохождении волны слева направо.**



# Длина волны, волновое число, фазовая скорость

**Уравнение волны** $y = A\sin(kx - \omega t)$

$$v_y = \left(\frac{dy}{dt}\right)_{x=const} = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A\cos(kx - \omega t)$$

$$a_y = \left(\frac{dv_y}{dt}\right)_{x=const} = \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\omega^2 A\sin(kx - \omega t)$$

$$y = 0: \qquad v_{y,\max} = \omega A.$$

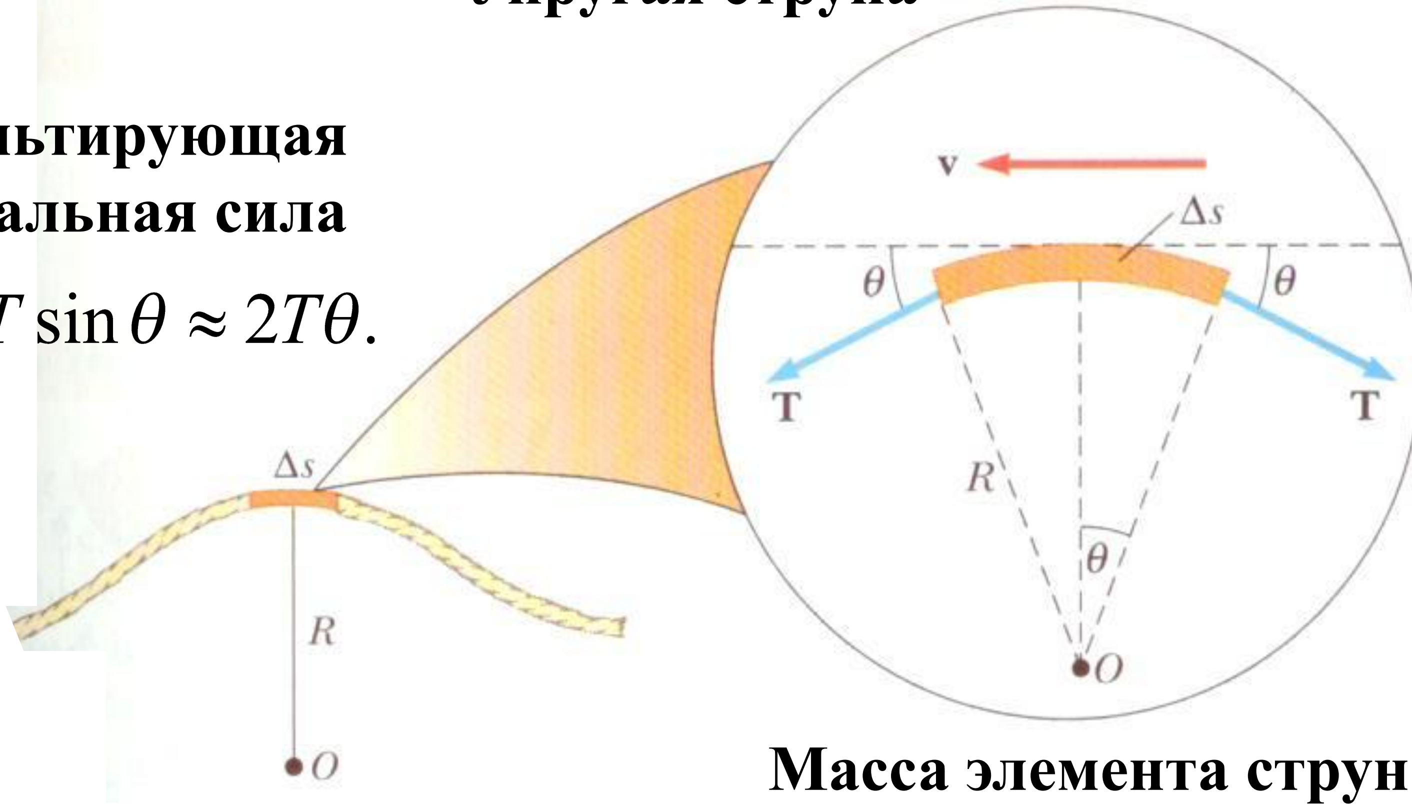
$$y = \pm A: \qquad a_{y,\max} = \omega^2 A.$$

# Длина волны, волновое число, фазовая скорость

**Упругая струна**

**Результирующая радиальная сила**

$$F_r = 2T\sin\theta \approx 2T\theta.$$




**Масса элемента струны**

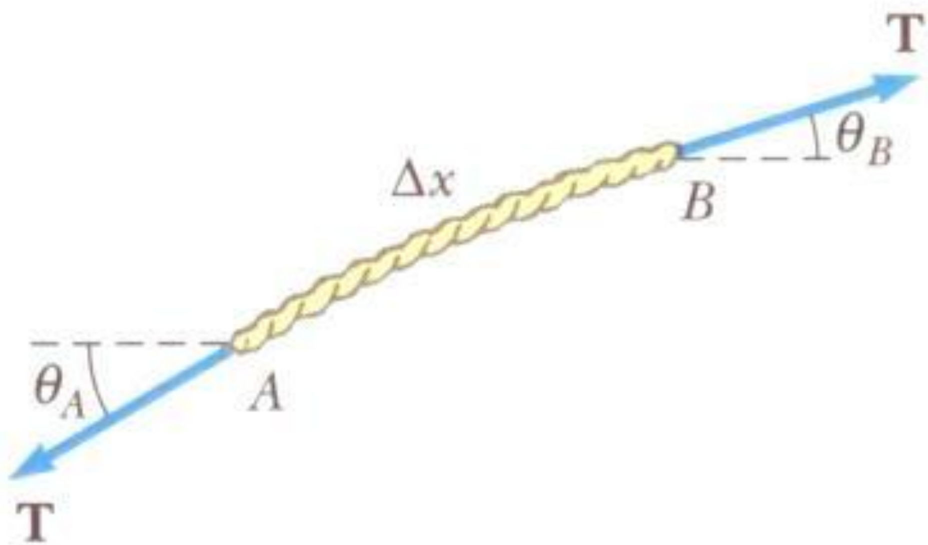
$$m = \mu\Delta s = 2\mu R\theta.$$

$$F_r = ma = \frac{mv^2}{R}.$$

$$2T\theta = \frac{2\mu R\theta v^2}{R} \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}.$$

# Одномерное волновое уравнение

**Все уравнения волны - решения волнового уравнения.**




**Элемент струны под действием растягивающих сил** $T$.

$$\sum F_y = T\sin\theta_B - T\sin\theta_A = T(\sin\theta_B - \sin\theta_A).$$

$$\sum F_y \approx T(\tan\theta_B - \tan\theta_A).$$

$$\sum F_y \approx T(\tan\theta_B - \tan\theta_A).$$

## Одномерное волновое уравнение

**2-й закон Ньютона:**

$$\sum F_y \approx T\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_B - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_A\right]. \qquad \sum F_y = ma_y = \mu\Delta x\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right).$$

$$\mu\Delta x\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) = T\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_B - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_A\right].$$

$$\frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{(\partial y/\partial x)_B - (\partial y/\partial x)_A}{\Delta x}.$$

$$\frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\left(\partial y / \partial x\right)_B - \left(\partial y / \partial x\right)_A}{\Delta x}$$

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

# Одномерное волновое уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x + \Delta x\right) - f\left(x\right)}{\Delta x} \quad \to \quad \frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

**- общий вид одномерного волнового уравнения, применимого для различных типов бегущих волн.**

## Контрольный вопрос

**Скорость поперечной волны в упругой среде при увеличении амплитуды волны:**

**а) возрастает,**
**б) убывает,**
**в) не меняется,**
**г) нельзя однозначно ответить.**