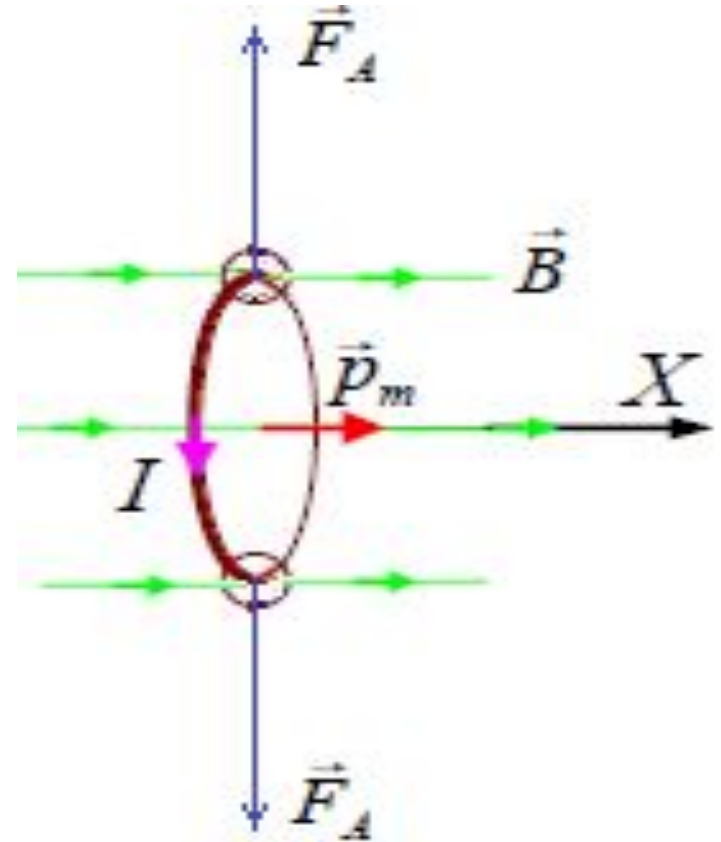


ЛК. 12. Электромагнитные колебания

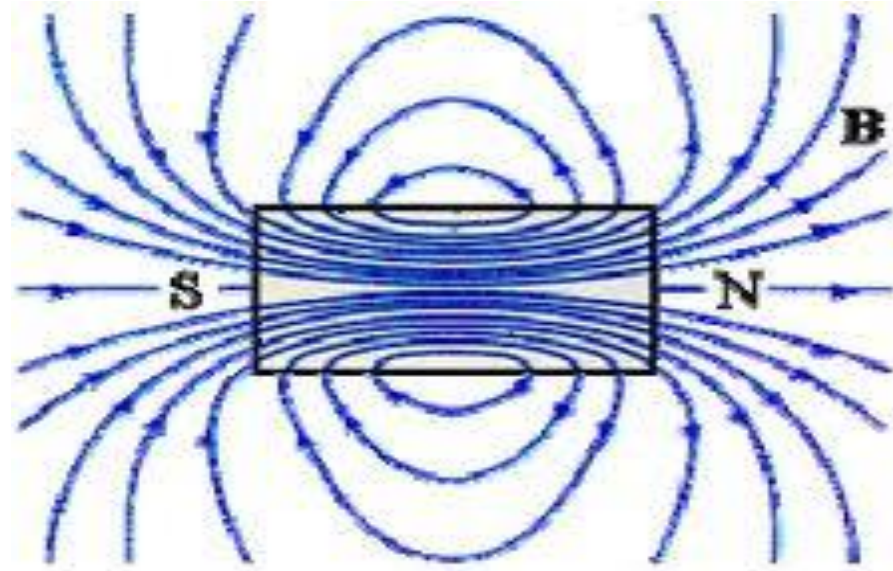
*Действие магнитных сил на контур с током
в неоднородном поле*

- Однородное магнитное поле оказывает на виток с током только вращающее действие. После поворота витка в положение, при котором его магнитный момент совпадет по направлению с вектором

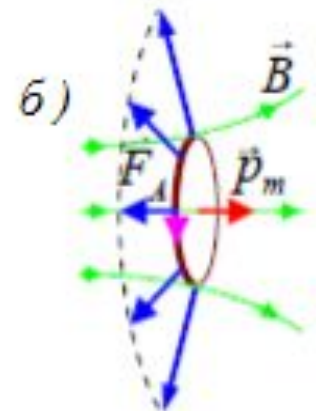
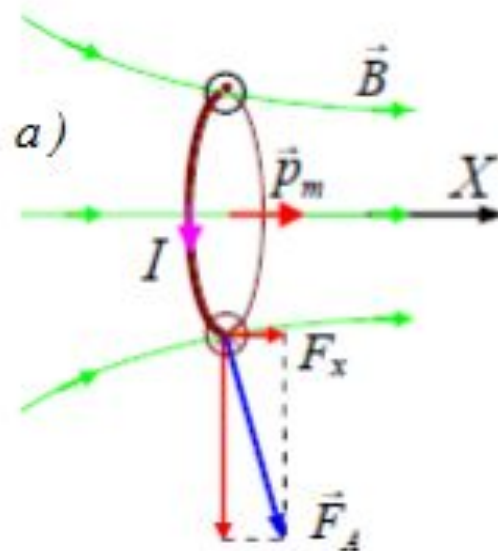
- индукции повернувшего
- его магнитного поля, силы
- ампера только растягивают
- виток в разные стороны и
- не стремятся переместить
- или повернуть его.



- В случае неоднородного поля его силовые линии не являются параллельными. Они расходятся в направлении убывания индукции поля и сходятся в направлении возрастания. На рисунке для примера показаны силовые линии поля цилиндрической катушки

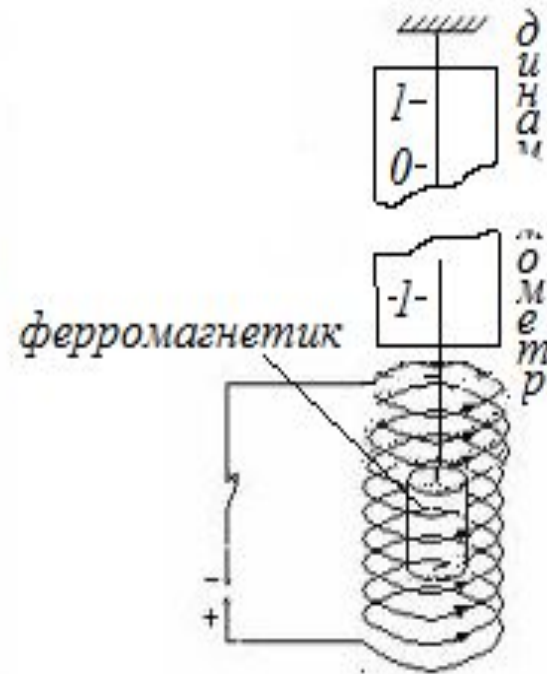
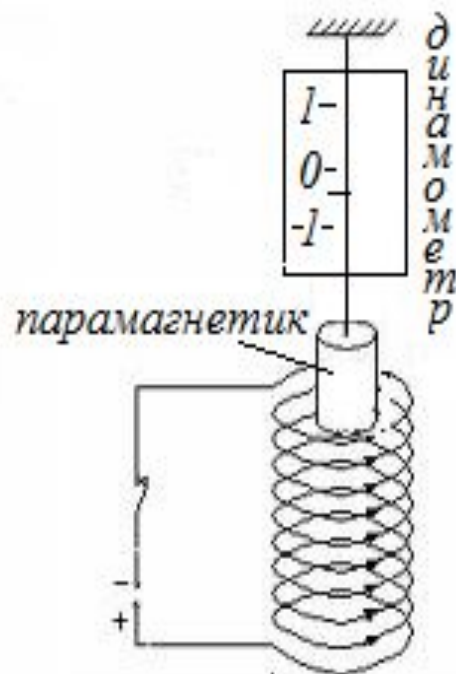
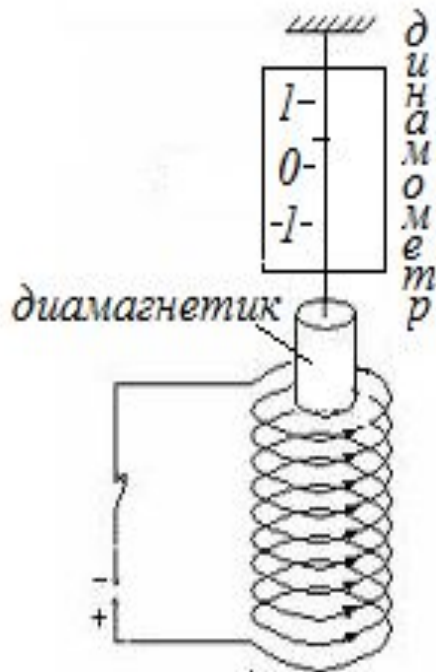


- Если контур с током помещен в неоднородное поле, то силы ампера, наряду с вращающим, будут оказывать на него и перемещающее действие. Определить направление перемещающего действия можно изображением сил Ампера, которые перпендикулярны вектору индукции магнитного поля. Для случая возрастания поля в направлении оси X изображаем сходящиеся в этом направлении силовые линии и перпендикулярные им силы ампера, которые действуют на контур с током. Как видно из рисунка, в этом случае появляется составляющая силы ампера в направлении оси X , т.е. в направлении увеличения поля. Если поле убывает в направлении оси X , то его силовые линии становятся расходящимися в этом направлении, как показано на рис.б. Построение сил ампера в этом случае показывает, что они имеют составляющие, направленные против оси X , т.е. вновь в направлении возрастания поля.



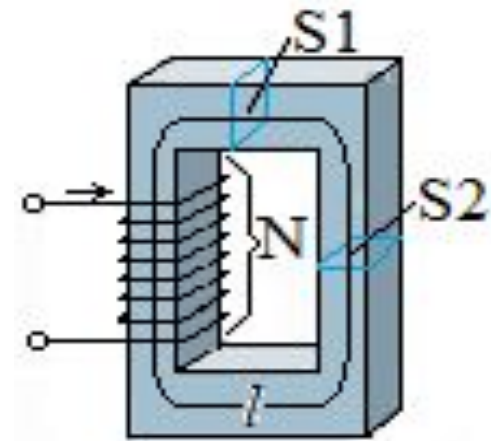
Силовое действие неоднородного магнитного поля на вещество

- Диамagnetик выталкивается из области сильного поля. Парамагнетик втягивается в область сильного поля. Ферромагнетик с большой силой втягивается в область сильного поля

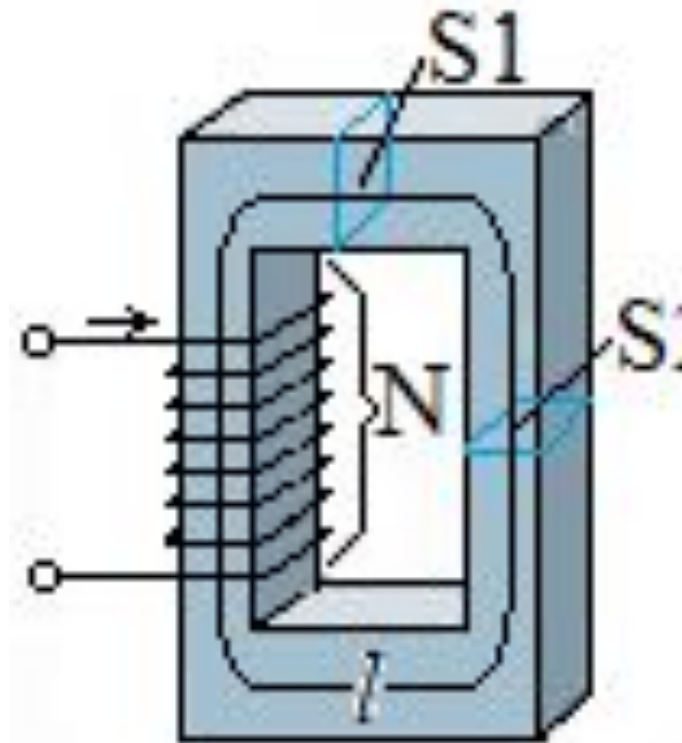


Понятие магнитной цепи

- Электрическая цепь - это совокупность устройств для создания электрического тока. Аналогично определяется магнитная цепь: *это совокупность устройств для создания и управления магнитным потоком.*
- Исходным элементом магнитной цепи выступает источник магнитодвижущей силы (МДС). Обычно – это катушка с током. Если число витков в катушке - N и по ним протекает ток I , то величина магнитодвижущей силы определяется как произведение $M=IN$



- Простейшая электрическая цепь состоит из источника ЭДС и проводника электрического тока, обладающего некоторым сопротивлением. По аналогии, простейшая магнитная цепь состоит из источника МДС и **проводника магнитного потока**. В роли последнего выступает ферромагнитный или ферримагнитный замкнутый сердечник, показанный на рисунке и называемый
- **Магнитопроводом**. Он характеризуется площадью поперечного сечения - S и длиной l



- Будем считать, что индукция магнитного поля B связана с напряженностью H соотношением $B = \mu \mu_0 H$. Вследствие большой магнитной проницаемости ферромагнитного магнитопровода величина индукции магнитного поля в нем будет на несколько порядков превышать индукцию поля в окружающей парамагнитной или диамагнитной среде. Это позволяет пренебречь магнитным потоком через окружающую среду и учитывать только магнитный поток в магнитопроводе. Величина магнитного потока $\Phi = BS$, где S - площадь поперечного сечения магнитопровода. Определим величину магнитного потока в простейшей магнитной цепи.

- Считаем магнитопровод однородным: S , μ одинакова для всех его участков. Индукция поля в магнитопроводе $B = \mu\mu_0 H$, где H - напряженность поля, созданного катушкой одинакова во всем МП.
- Напряженность найдется из закона полного тока

$$\oint H dl = \sum I \Rightarrow Hl = NI \Rightarrow H = NI/l,$$

- где l - длина средней линии - магнитопровода. В результате последовательных подстановок получим:

$$\Phi = \frac{NI}{\frac{l}{\mu\mu_0 S}} = \frac{M}{R_m}$$

- В этой формуле обозначено $M = IN$ – МДС катушки, $R_m = l/\mu\mu_0 S$ - магнитное сопротивление магнитопровода. Формула аналогична по виду закону Ома

• «ВТОРОЕ ПРАВИЛО КИРХГОФА» ДЛЯ МАГНИТНОЙ ЦЕПИ

- Величина магнитного сопротивления, как и электрического сопротивления проводника, пропорциональна его длине и обратно пропорциональна площади поперечного сечения. Размерность магнитного сопротивления $1/\text{Гн}$. Величина $\mu\mu_0$ выступает в роли удельной магнитопроводности материала.
- Имея понятие магнитного сопротивления, можно определить величину магнитного напряжения на участке магнитной цепи как произведение $R_m \Phi$.

- Теперь, в случае неразветвленного неоднородного магнитопровода, у которого отдельные участки имеют разные площади поперечного сечения и магнитную проницаемость, можем записать

$$\bullet \Phi^*(R_{m1} + R_{m2} + \dots) = M,$$

- откуда сразу определится величина магнитного потока. Произведение

$$\bullet \Phi R_{mk} = B_k S_k l_k / S_k \mu_k \mu_0 = (B_k / \mu_k \mu_0) * l_k = H_k l_k$$

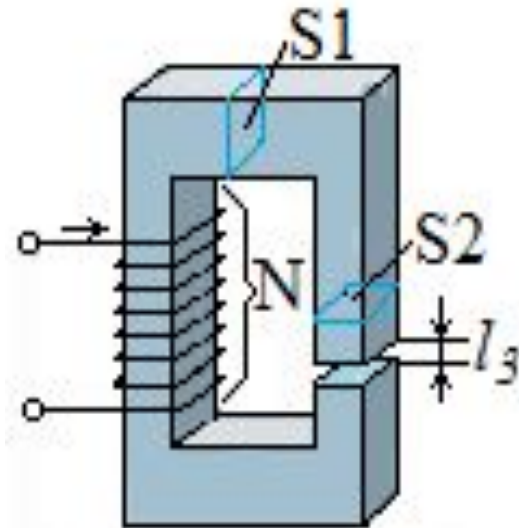
- можно считать падением магнитного напряжения на k-том участке магнитной цепи. При этом закон полного тока

$$\bullet M = NI = H_1 l_1 + H_2 l_2 + \dots$$

- можно сформулировать в виде второго правила Кирхгофа для магнитной цепи: ***Сумма падений магнитного напряжения на элементах замкнутого контура магнитной цепи равна МДС, действующей в этом контуре.***

- Рассмотрим для примера магнитную цепь, показанную на рисунке. Магнитопровод неоднородный по сечению и имеет зазор. Для определения магнитного потока вычислим магнитные сопротивления всех его участков:

$$R_{m1} = \frac{l_1}{\mu\mu_0 S_1}; \quad R_{m2} = \frac{l_2}{\mu\mu_0 S_2}; \quad R_{m3} = \frac{l_3}{\mu_0 S_2}$$



- После этого определится величина
- магнитного потока, который одинаков по всему магнитопроводу и зазору:

$$\Phi = \frac{IN}{\frac{l_1}{\mu\mu_0 S_1} + \frac{l_2}{\mu\mu_0 S_2} + \frac{l_3}{\mu_0 S_2}}$$

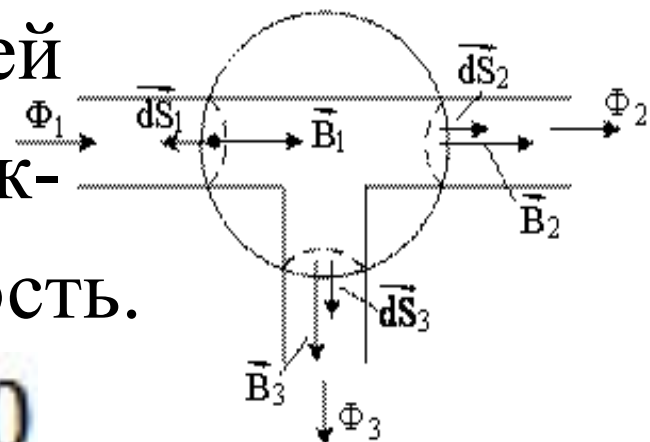
«ПЕРВОЕ ПРАВИЛО КИРХГОФА» ДЛЯ МАГНИТНОЙ ЦЕПИ

- *Алгебраическая сумма магнитных потоков в разветвлении магнитной цепи равна нулю*
- Магнитные потоки, втекающие в разветвление считаются положительными, а вытекающие - отрицательными. Это правило является следствием замкнутости силовых линий магнитного поля или теоремы о потоке вектора магнитной индукции через замкнутую поверхность

$$\oint \vec{B} d\vec{S} = 0$$

- Рассмотрим трех плечное разветвление (узел магнитной цепи). Ограничим его замкнутой поверхностью и применим к ней

- теорему о потоке вектора индукции через замкнутую поверхность.

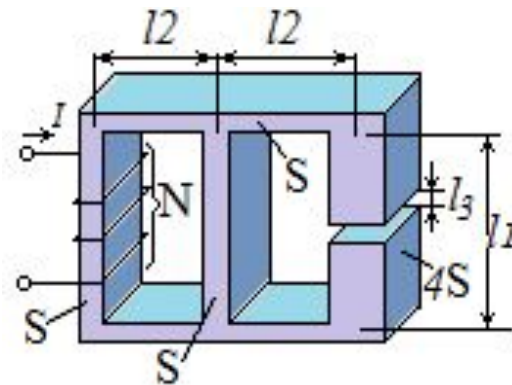


- $B_1 S_1 - B_2 S_2 - B_3 S_3 = 0$

- Общая формула записи первого правила Кирхгофа для магнитной цепи:

$$\sum \Phi_k = 0$$

- Рассмотрим в качестве примера расчет индукции поля в зазоре магнитной цепи, показанной на рисунке, при следующих исходных данных: $I=1\text{ А}$, $N=100$, $S=2\text{ см}^2$, $l_1=4\text{ см}$, $l_2=2\text{ см}$, $l_3=1\text{ мм}$, $\mu=1000$.



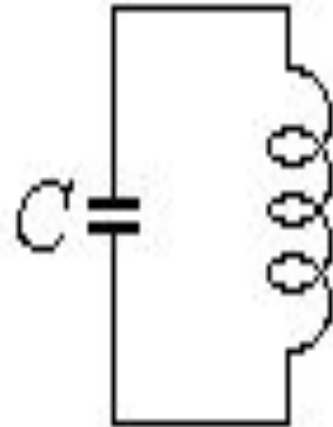
- Решение:* Обозначим магнитные потоки в вертикальных стержнях магнитопровода как, Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 . Магнитные сопротивления участков, по которым проходят эти потоки, - R_{m1} , R_{m2} , R_{m3} . И составим систему уравнений для данной магнитной цепи по правилам Кирхгофа м "закону Ома" для магнитных цепей.

- $\Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3 = 0$
- $NI = \Phi_1 R_{m1} + \Phi_2 R_{m2}$
- $\Phi_2 R_{m2} - \Phi_3 R_{m3} = 0$

- Решим эту систему относительно Φ_3 .
- $\Phi_3 = NI / (R_{m1} + R_{m3} + R_{m1} R_{m3} / R_{m2})$. Для вычисления потока необходимо определить величины магнитных сопротивлений:
 - $R_{m1} = (l_1 + 2l_2) / (\mu \mu_0 S) = 3.184 * 10^5 * 1 / \text{Гн}$,
 - $R_{m2} = l_1 / (\mu \mu_0 S) = 1.59 * 10^5 * 1 / \text{Гн}$,
 - $R_{m3} = (l_1 + 2l_2) / (\mu \mu_0 4S) + l_3 / (4S \mu_0) = 1.075 * 10^6 * 1 / \text{Гн}$
- Величина магнитного потока в третьем стержне $\Phi_3 = NI / (R_{m1} + R_{m3} + R_{m1} R_{m3} / R_{m2}) = 3.22 * 10^{-4} \text{ Вб}$.
- Индукция поля в зазоре вычислится очень просто $B = \Phi / (4S) = 0.4 \text{ Тл}$

Электромагнитные колебания.

•Существование электроэнергии в виде энергии магнитного и электрического полей напоминает существование механической энергии в виде кинетической энергии движения и потенциальной энергии покоя. Как известно, в механике легко реализуются процессы периодической передачи энергии из одного вида в другой. Эти процессы называются механическими колебаниями. Аналогичные процессы реализуются и для электроэнергии. Более того, в этом случае удастся пространственно разделить накопители электрической и магнитной энергии. Накопителем электрической энергии является конденсатор, а накопителем магнитной - катушка индуктивности. Соединив их вместе, получим цепь, в которой возможны электрические колебания. Данная цепь получила название колебательный контур



- Пусть в какой-то момент времени ток в контуре равен нулю, а конденсатор заряжен до некоторой величины напряжения - U_m . Ясно, что это напряжение создаст в цепи ток, для которого, следуя второму правилу Кирхгофа, можно составить уравнение: $u_c + u_L = 0$. Напряжение между обкладками конденсатора - u_c определяется его зарядом $u_c = q/C$. Напряжение на катушке индуктивности - это ЭДС самоиндукции, взятая с противоположным знаком: $u_L = L di/dt$. Наконец, ток разрядки конденсатора, который является током во всей цепи равен $i = dq/dt$. Подставив все это в исходное уравнение, получим:

$$\frac{q}{C} + L \frac{d^2 q}{dt^2} = 0 \quad (24.1)$$

- Это типичное уравнение колебательного процесса, аналогичное уравнению механических колебаний тела с массой m , удерживаемого пружиной с жесткостью k : $kx + md^2x/dt^2 = 0$, где x - координата тела. Продолжая эту аналогию можно сказать, что величина $1/C$ ассоциируется с жесткостью пружины, а индуктивность L - с массой колеблющегося тела. Более того, потенциальная энергия заряженного конденсатора и сжатой пружины выражаются одинаковыми по виду формулами: $W_C = (1/C) * (q^2/2)$, $U = k * (x^2/2)$. Точно такая же аналогия имеется в формулах кинетической энергии движущейся массы и энергии магнитного поля катушки индуктивности: $T = mv^2/2$, $W_L = Li^2/2$.

- Решение колебательного уравнения хорошо известно - это функция синуса или косинуса времени. Для колебательного контура мы имеем:

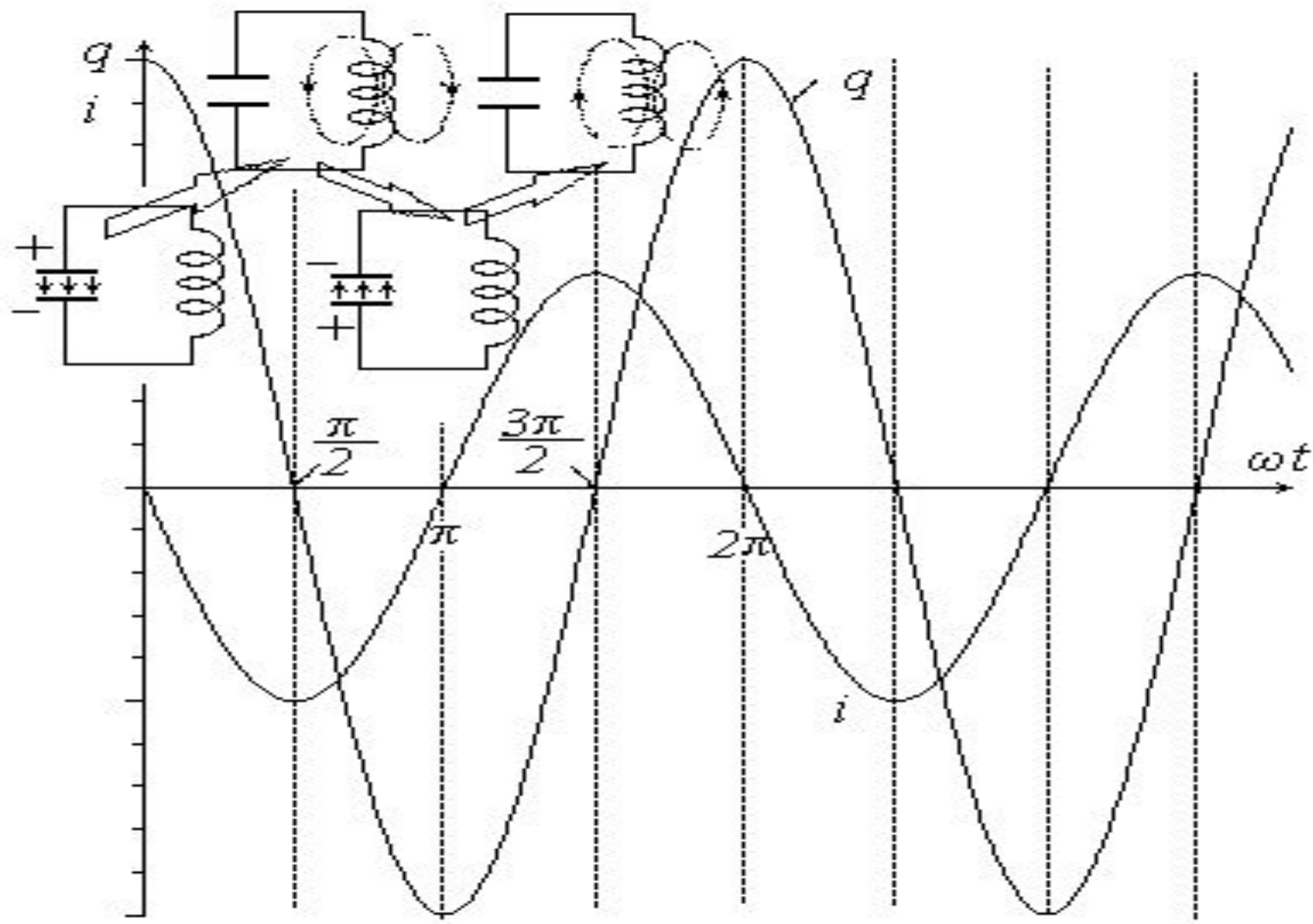
$$\bullet \quad q = Q_m \cos(\omega t + \theta) \quad (24.2)$$

- Подставим это выражение в (24.1) и получим формулу для параметра ω :

$$\bullet \quad \frac{1}{C} Q_m \cos(\omega t + \vartheta) - L\omega^2 Q_m \cos(\omega t + \vartheta) = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

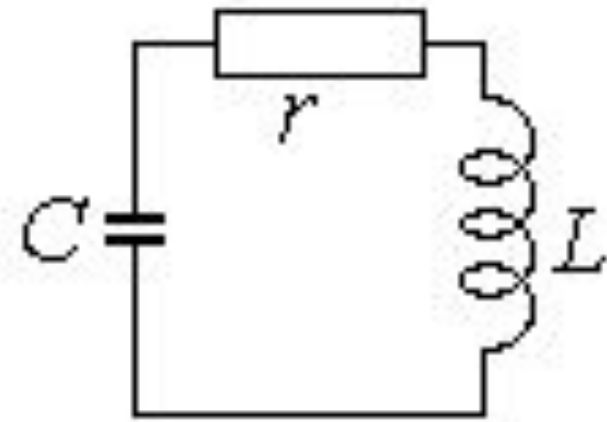
- Названия параметров формулы колебательного движения, в применении к (24.2) следующие:
- $\omega t + \theta$ - фаза колебания *размерность* - рад
- ω - круговая частота колебания *размерность* - рад/с
- θ - начальная фаза колебания *размерность* - рад
- Q_m - амплитуда колебания *размерность* - Кл

- Имея формулу для заряда конденсатора в колебательном контуре, легко получить выражение для тока в нем:
- $i = dq/dt = -Q\omega \sin(\omega t + \theta) = I_m \cos(\omega t + \theta + \pi/2)$ (24.3)
- Ток в контуре изменяется во времени также по косинусоидальному закону, но его фаза на $\pi/2$ превышает фазу изменения заряда конденсатора.
- На рисунке 24.1 показан график изменения во времени заряда и тока



• В начальный момент времени ($t=0$) заряд конденсатора максимален, а ток в цепи равен нулю. Вся энергия сосредоточена в конденсаторе в виде электрического поля между обкладками. Магнитное поле катушки равно нулю. По мере разрядки конденсатора ток в цепи увеличивается (по модулю), что ведет к возрастанию индукции поля в катушке и увеличению энергии магнитного поля. При $\omega t = \pi/2$ конденсатор полностью разряжен, а ток в цепи (по модулю) и энергия магнитного поля катушки достигают максимальной величины. Вся энергия оказалась передана из конденсатора в катушку. Далее ток в катушке уменьшается (по модулю) и возникающая при этом ЭДС самоиндукции поддерживает неизменным направление тока в контуре. Этот ток заряжает конденсатор но в полярности, противоположной начальной. К моменту времени $\omega t = \pi$ ток в катушке уменьшился до 0, а конденсатор оказался заряженным до первоначальной величины заряда, но в противоположной полярности. Энергия из катушки вновь вернулась в конденсатор. Далее весь процесс колебания повторяется для противоположных начальным полярности заряда конденсатора и направления тока в катушке

- Помимо круговой частоты колебаний - ω используются эквивалентные величины: частота $\nu = \omega / 2\pi$ и период колебаний $T = 1/\nu = 2\pi/\omega$.
- При отсутствии в колебательном контуре потерь энергии на сопротивлении проводов. Колебания будут продолжаться вечно без потери амплитуды. На практике такая ситуация невозможна. Добавив в цепь сопротивление r , получим колебательный контур с потерями энергии.
- Уравнение для напряжений на его элементах будет иметь следующий вид: $u_c + u_r + u_L = 0$. Величина u_r определится законом Ома и вместо (24.1) мы получим следующее уравнение



$$\frac{q}{C} + r \frac{dq}{dt} + L \frac{d^2q}{dt^2} = 0 \quad (24.4)$$

Вновь по аналогии с механическими колебаниями при наличии трения мы будем искать решение этого уравнения в виде

$$q = Q_m e^{-\beta t} \cos(\omega t + \theta) \quad (24.5)$$

Подставим это выражение в (24.4) и после группировки синусов и косинусов получим:

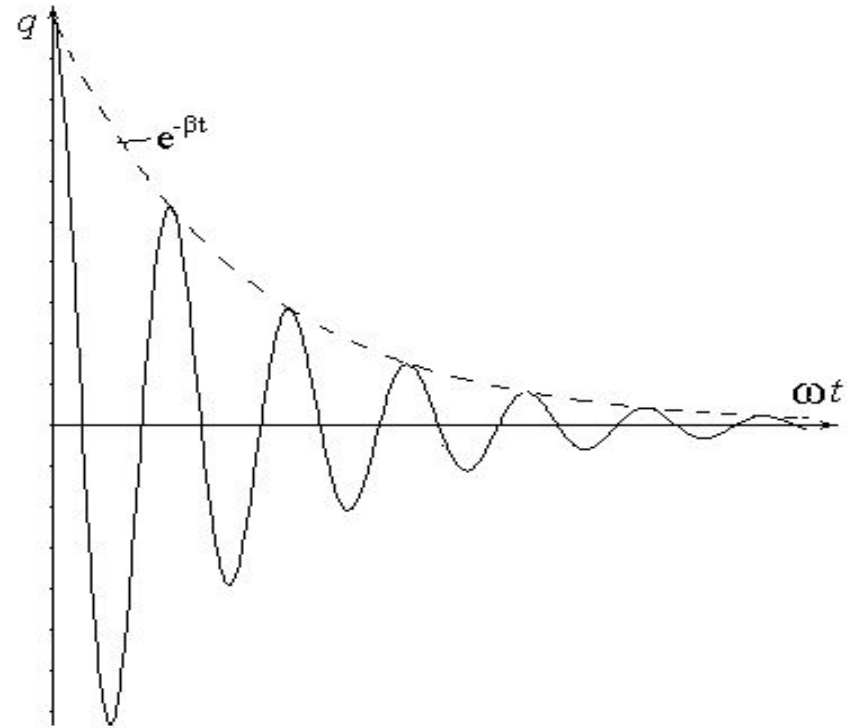
$$Q_m e^{-\beta t} \cos(\omega t + \theta) * \left(\frac{1}{C} - r\beta + L\beta^2 - \omega^2 \right) + \omega Q_m \sin(\omega t + \theta) * (2\beta L - r) = 0$$

Для выполнения этого равенства в любой момент времени необходимо, чтобы коэффициенты при \cos и \sin были равны нулю. Это условие определяет два неизвестных параметра - β и ω :

$$\beta = \frac{r}{2L}; \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{r^2}{4L^2}}$$

• График изменения во времени заряда - q показан на рисунке 24.4 Это график затухающих колебаний. Уменьшение амплитуды колебаний со временем

определяется множителем $e^{-\beta t}$ в формуле для заряда. Величина β носит название постоянной затухания. Более популярной величиной является доброт-



ность колебательного контура - Q , которая выражает отношение энергии, имеющейся в контуре - W , к энергии, теряемой им за один период - ΔW .

- Энергия в контуре

$$W = \frac{q_m^2 e^{-2\beta t}}{2C}$$

- Энергия, теряемая за один период

$$\Delta W = \frac{q_m^2 e^{-2\beta t}}{2C} - \frac{q_m^2 e^{-2\beta(t+T)}}{2C}$$

- Добротность

$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\beta T}} \approx \frac{2\pi}{2\beta T} = \frac{\omega L}{r}$$

- При отсутствии потерь энергии в контуре $r=0$ добротность $Q=\infty$. Колебания не затухают. Чем больше потери, тем меньше Q , тем быстрее затухание колебаний.

Пяитиминутка

- Колебательный контур составлен из катушки индуктивности $L=1$ мГн и конденсатора $C=10000$ пФ. Добротность контура $Q=100$. Определить сопротивление потерь контура, и циклическую частоту собственных колебаний