Лекция 3.13. **Интегралы, зависящие от параметра**

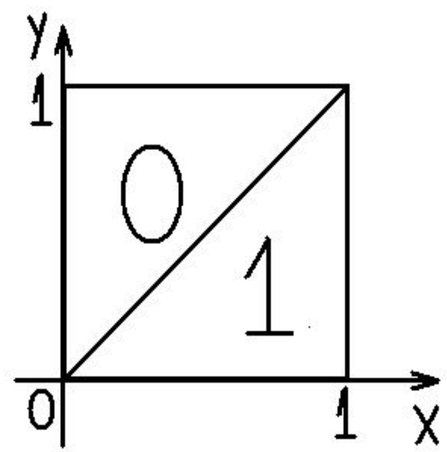
1. Собственные интегралы, зависящие от параметра

$$F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$$

Теорема 1. Если f непрерывна на

$D = \{a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$, то $F(y)$ непрерывна на $[c,d]$.

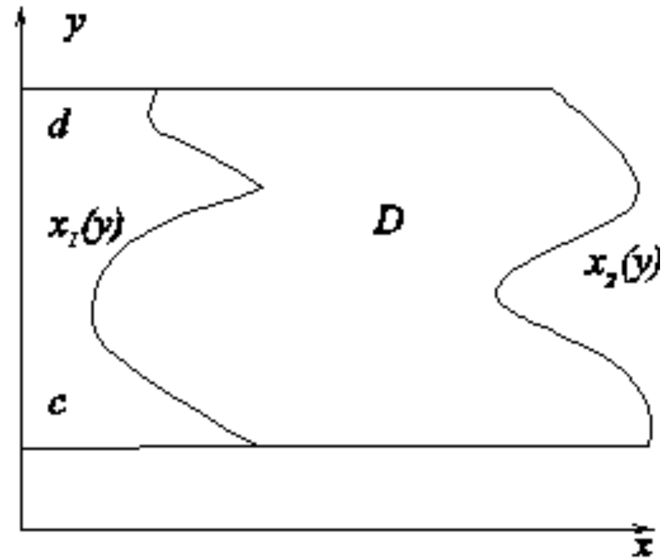
$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \le x \le y \le 1 \\ 1, & \text{если } 0 \le y < x \le 1 \end{cases}$$

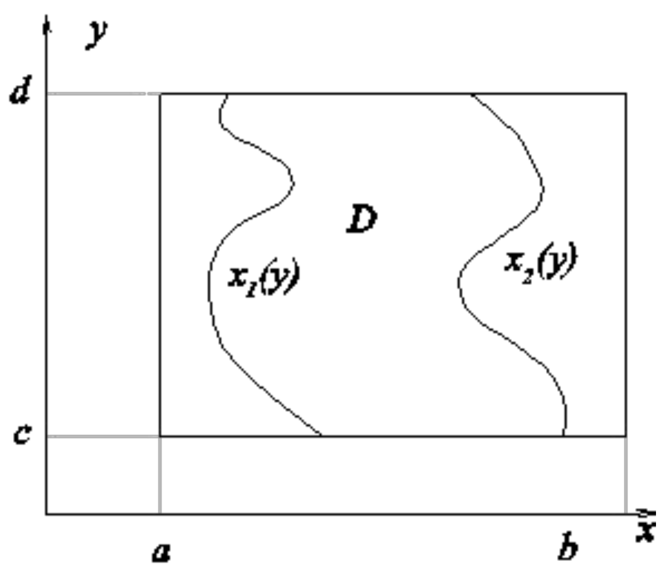


$$F(y) = \int_0^1 f(x,y)dx = \int_y^1 dx = 1 - y$$

$$F(y) = \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$$

Теорема 2. Если f непрерывна на D , $x_1(y), x_2(y)$ непрерывны на $[c,d]$, то $F(y)$ непрерывна на $[c,d]$.





Определение. Пусть функция *f(x,y) определена на [a,b] для любого* $y \in Y$ *. Говорят, что f(x,y) равномерно сходится к g(x) на [a,b] при* $y \to y_0$ *если*

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in [a,b] \, \forall y \in U_\delta(y_0): \; |f(x,y) - g(x)| < \varepsilon .$$

Лемма. Если *f(x,y)* непрерывна и равномерно сходится к *g(x)* на *[a,b]* при $y \to y_0$, то функция *g(x)* непрерывна на *[a,b]*.

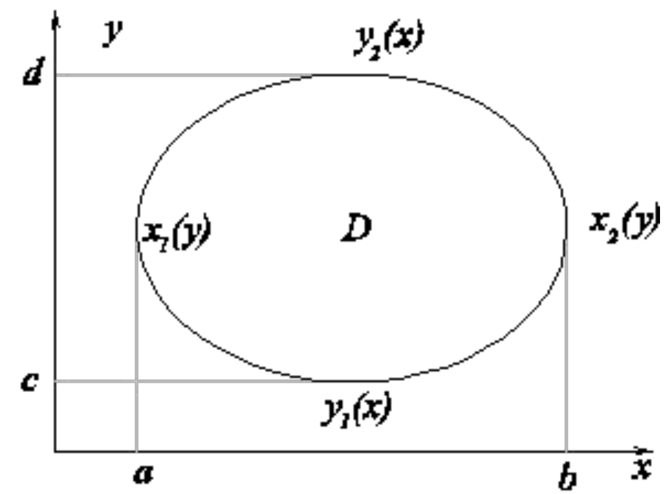
Теорема 4. *Если f(x,y) непрерывна и равномерно сходится к g(x) на [a,b] при* $y \to y_0$ *, то*

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b g(x)dx$$

2. Интегрирование интегралов зависящих от параметра

$$F(y) = \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$$

$$\int_c^d F(y)dy = \iint_D f(x,y)dxdy$$



3. Дифференцирование интегралов, зависящих от параметра

Теорема (Лейбниц) 5. Если f и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны в $[a,b]\times[c,d]$, то

$$F(y)=\int_a^b f(x,y)dx$$

дифференцируема на $[c,d]$ u

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx$$

Теорема 6. Если f и ее производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны на $[a,b]\times[c,d]$, $x_1(y), x_2(y)$ имеют непрерывные на $[c,d]$ производные, то

$$F(y)=\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$$

также имеет производную

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx+f(x_2(y),y)x_2{}'(y)-f(x_1(y),y)x_1{}'(y)$$

4. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x,y)dx\,,\ -\infty < a < b \le +\infty,\ y \in Y.$$

Определение. Сходящийся на Y интеграл называется равномерно сходящимся на Y, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists M\ \forall \eta \in (M, +\infty) \forall y \in Y\colon \left|\int_\eta^{+\infty} f(x,y)dx\right| < \varepsilon$$

(для интеграла 1-го рода)

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \eta \in (b-\delta, b) \forall y \in Y\colon \left|\int_\eta^{b} f(x,y)dx\right| < \varepsilon$$

(для интеграла 2-го рода)

Теорема (критерий Коши):

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)dx \rightrightarrows F(y) \text{ на } Y \quad \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists b_\varepsilon > a \ \ \forall a_1, a_2 > b_\varepsilon$$

$$\left| \int_{a_1}^{a_2} f(x,y)dx \right| < \varepsilon \ \ \forall y \in Y.$$

Пример:

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^y} = \frac{x^{1-y}}{1-y}\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{y-1}$ при $y > 1$ (то есть при $y > 1$ сходится)

Признак Вейерштрасса равномерной сходимости
(для интеграла 2-го рода)(верен и для интегралов 1-го рода)

Если $\exists g(x)$ на $[a, b)$, интегрируемая на любом $[a, \eta)$, $\eta \in (b-\delta, b)$ *такая, что*

1) $|f(x,y)| \leq g(x), a \leq x < b, \forall y \in Y$

2) $\int_a^b g(x)dx$ сходится ,

то интеграл

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x,y)dx$$

сходится равномерно на Y.

Теорема. Пусть $f(x,y)$ определена и непрерывна на $[a,b)$ по x для всех $y \in Y$. Если для любых η функция $f(x,y)$ равномерно сходится к $g(x)$ на $[a, b-\eta]$ при $y \to y_0$, интеграл

$$\int_a^b f(x,y)dx$$

равномерно сходится на Y,

$$\int_a^b g(x)dx$$

сходится. Тогда

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b g(x)dx$$