

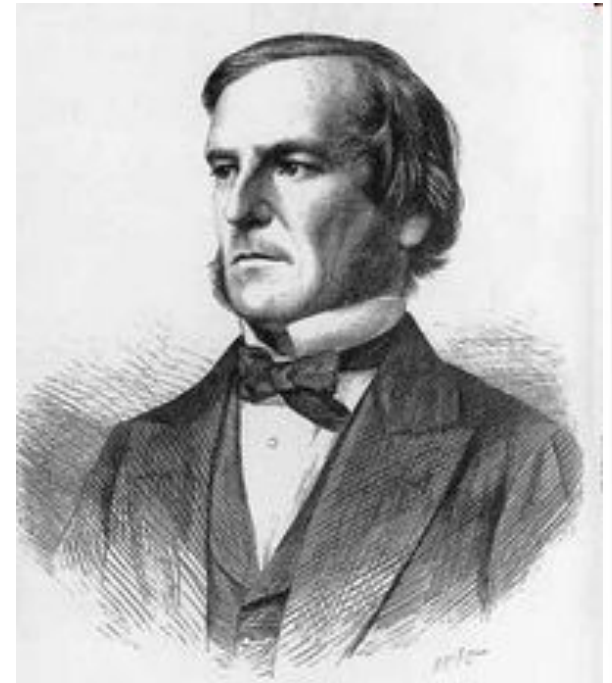
§2. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ БУЛЕВОЙ АЛГЕБРЫ

2.1. БУЛЕВА АЛГЕБРА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

2.1.1. Определение булевой алгебры

Название этого раздела математики связано с именем его основателя – **Джорджа Буля**.

БУЛЬ (Boole) Джон английский математик и логик, один из основоположников математической логики. Разработал алгебру логики (булеву алгебру) («Исследование законов мышления», 1854), основу функционирования цифровых компьютеров.



Используя классическое понятие алгебры, **булеву алгебру** можно определить как систему

$A=(B, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$, в которой несущим множеством является двухэлементное множество двоичных чисел $B=\{0, 1\}$, а $\Omega=\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ – заданные на этом множестве логические операции, сущность которых рассмотрим позднее.



Основные логические операции, - **дизъюнкция**, **конъюнкция** и **отрицание**, - можно интерпретировать как операции, введенные в теории множеств: свойства указанных операций аналогичны свойствам операций объединения, пересечения и дополнения множеств соответственно.

Однако логические операции имеют несколько иной смысл; они позволяют формировать простые и сложные высказывания. Все множество логических операций обозначается E_2 .

Как правило, существует логическая интерпретация элементов множества B :

1 – истинно; 0 – ложно.

В ряде случаев такой смысл не придается, и в качестве элемента множества рассматривается двоичная переменная (ее называют также **логическая** или **булева переменная**) x , которая принимает значения

$x = 0$ или $x = 1$.

2.1.2. Области применения булевой алгебры

Булева алгебра применяется:

- 1) как средство алгоритмического описания в языках программирования для определения логических условий;**
- 2) как средство формирования логических высказываний в математической логике, лингвистике, теории искусственного интеллекта;**
- 3) как средство разработки и описания дискретных технических систем;**
- 4) как формальная модель лежащая в основе языков программирования.**



Алгебра логики позволяет производить анализ и синтез логических устройств.

Анализ – это поиск аналитического выражения, которое описывает работу системы. ***Синтез*** – обратная задача: создание технического устройства на основе математического описания средствами булевой алгебры.

2.1.3. Высказывания

Одним из базовых понятий в булевой алгебре является понятие **высказывания**.

Высказывание – это любое повествовательное предложение, в отношении которого имеет смысл утверждение о его истинности или ложности.

Обычно высказывания обозначаются буквами латинского алфавита:

Для каждого высказывания a, b, c, A, B, C значение **истинности**, которое может принимать одно из двух возможных: значений 1 – истина, 0 – ложь.



Пример. Рассмотрим справедливость утверждений:

a) число 4 – четное;

b) снег – красный;

c) $2*2=5$.

Значения истинности данных высказываний следующие: $a=1$, $b=0$, $c=0$.



Два высказывания A и B называются **эквивалентными**, если их значения истинности совпадают.

Значение истинности может быть постоянным либо изменяется в зависимости от обстоятельств.

Изменяемое высказывание может рассматриваться как переменный параметр – двоичная переменная, принимающая одно из двух значений (обозначается x, y, z).

2.2. ФУНКЦИИ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

2.2.1. Понятие функции и способы ее задания

Пусть имеется n двоичных переменных

X_1, X_2, \dots, X_n . Каждая из них в некотором конкретном случае может принимать значение 0 или 1 .

Полученный набор элементов есть двоичный вектор длины n . Каждому конкретному набору можно поставить в соответствии одно из значений 0 или 1 .

Функция f , задающая однозначное отображение множества всевозможных наборов значений двоичных переменных x_1, x_2, \dots, x_n во множество $\{0, 1\}$ называется **функцией алгебры логики** (или логической функцией, булевой функцией, переключательной функцией):

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = y; (y = 0 \text{ или } y = 1)$$

Таким образом, **логическая функция** – это зависимость, которая устанавливает связь между сочетанием значений входных двоичных переменных и двоичным значением этой функции.



Способы задания функции. Логическая функция может быть задана:

- 1) математическим выражением (формулой);
- 2) таблицей.

Таблица является наиболее общим и универсальным способом задания функции. В её левой части перечисляют всевозможные наборы значений двоичных переменных, а в правой — значения функции на этих наборах.

Такие таблицы, описывающие функции, называют **таблицами истинности**. В *таблицах 2.1 и 2.2* приведены примеры таблиц истинности.

Таблица 2.1

x_1	x_2	...	x_n	$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
0	0		0	$f(0, 0, \dots, 0)$
1	0		1	$f(1, 0, \dots, 1)$
...
1	1		1	$f(1, 1, \dots, 1)$

Таблица 2.2

x_1	x_2	x_3	$y = f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Оценим число возможных наборов (число строк входных переменных).

Конкретный набор – это вектор значений

$$(b_1, b_2, \dots, b_n)$$

Количество наборов – это мощность прямого произведения n двухэлементных множеств B :

$$a = |B^n| = |B|^n = 2^n$$

где n – число входных элементов.

Оценим возможное количество вариантов логических функций от n переменных. Множество вариантов логической функции можно представить как прямое произведение:

$$M = B_1 \times B_2 \times \dots \times B_i \times \dots \times B_a = B^a$$

где B_i – значение функции на наборе i .

Таким образом, общее количество функций от n переменных

$$m = |B^a| = |B|^a = 2^a$$

где $a = 2^n$.



Наборы, на которых функция равна единице, называют **единичными** наборами, а наборы, на которых функция равна нулю, называют **нулевыми**.

Если функция при любых значениях аргументов принимает значение 0 , то такую функцию называют **нулевой** или **константой 0** (тождественно ложная функция).

Функция, которая на всех наборах равна 1 , называется **единичной** или **константой 1** (тождественно истинная функция).

Если функция определена не на всех наборах аргументов, то она называется **не полностью определенной** или **частично определенной**.

Две булевы функции

$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называют **равными**, если для всех возможных наборов значений аргументов они принимают одинаковые значения и таким образом имеют одну и ту же таблицу истинности, и записывают:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Говорят, что булева функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
Существенно зависит от аргумента x_i , если

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) \neq f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n) ,$$

хотя бы для одного набора остальных аргументов.
В противном случае x_i называется **несущественной**
или **фиктивной переменной** (ее можно исключить).

2.2.2. Элементарные логические операции

Из множества логических функций выделяется ряд наиболее простых операций, которые имеют ясную логическую интерпретацию:

1) **отрицание** (инверсия)

$$f_1(x) = \bar{x}$$

(читается: не).

Отрицание – это функция, выражающая высказывание, которое истинно, если высказывание ложно, и ложно, если истинно.

x	\bar{x}
0	1
1	0

2) Дизъюнкция (логическое сложение)

$$f_2(x, y) = x \vee y \quad (\text{читается: " } x \text{ или } y \text{ "}).$$

Дизъюнкция — это функция, выражающая высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда, по крайней мере, одно из высказываний x или y является истинным.

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

3) **конъюнкция** (логическое умножение)

$$f_3(x, y) = x \wedge y \quad (\text{читается: " } x \text{ и } y \text{").}$$

Для этой операции применяются также следующие формы записи: $f_3(x, y) = xy = x \& y$.

Конъюнкция — это функция, выражающая высказывание, которое истинно только в том случае, если истинны оба высказывания x и y

x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

4) импликация

$$f_4(x, y) = x \rightarrow y$$

(читается : “если x , то y ”).

Функция f_4 принимает значение ложно только тогда, когда x истинно, а y ложно.

x_1	x_2	$x_1 \rightarrow x_2$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

5) эквивалентность (равнозначность)

$$f_5(x, y) = x \sim y \quad (\text{читается: "x равно y"}).$$

Функция $f_5=1$ тогда и только тогда, когда значения обоих аргументов x и y совпадают

x_1	x_2	$x_1 \sim x_2$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

6) сложение по модулю два (неравнозначность)

$$f_6(x, y) = x \oplus y$$

Функция f_6 истинна тогда и только тогда, когда значения аргументов различны, функция является обратной к f_5

x_1	x_2	$x_1 \oplus x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

7) штрих Шеффера

$$f_7(x, y) = x | y$$

Операция обратная по отношению к конъюнкции (функция ложна, только если оба аргумента истинны)

x_1	x_2	$x_1 x_2$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

8) стрелка Пирса

$$f_8(x, y) = x \downarrow y$$

Функция f_8 обратная к
дизъюнкции (f_8 истинно,
только когда x и y ложны)

x_1	x_2	$x_1 \downarrow x_2$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Наиболее важными функциями являются первые три. Остальные могут быть выражены через эти три функции. С использованием трех основных функций (**дизъюнкции**, **конъюнкции** и **отрицания**) могут образовываться более сложные функции. Поэтому можно дать еще одно определение булевой алгебры.

Булевой алгеброй называется алгебра типа, $(B, \vee, \wedge, \bar{})$ несущим множеством которой является множество двоичных чисел, а операциями - конъюнкция, дизъюнкция и отрицание.

2.2.3. Свойства основных логических функций

Основные логические функции обладают следующими свойствами:

1) коммутативность: $a \vee b = b \vee a$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

2) ассоциативность: $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

3) идемпотентность конъюнкции и дизъюнкции:

$$a \vee a = a$$

$$a \cdot a = a$$

4) дистрибутивность:

а) конъюнкции относительно дизъюнкции:

$$a \cdot (b \vee c) = (a \cdot b) \vee (a \cdot c)$$

б) дизъюнкции относительно конъюнкции:

$$a \vee (b \cdot c) = (a \vee b) \cdot (a \vee c)$$

5) двойное отрицание:

$$\overline{\overline{a}} = a$$

6) правило де Моргана:

$$\overline{a \cdot b} = \bar{a} \vee \bar{b}$$

$$\overline{a \vee b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$$

7) правило склеивания:

$$a \cdot b \vee a \cdot \bar{b} = a$$

$$(a \vee b) \cdot (a \vee \bar{b}) = a$$

8) правило поглощения:

$$a \vee ab = a$$

$$a \cdot (a \vee b) = a$$

$$a \vee \bar{a} b = a \vee b$$

$$a \cdot (\bar{a} \vee b) = a \cdot b$$

9) действия с константами:

$$a \vee 0 = a$$

$$a \cdot 0 = 0$$

$$a \vee 1 = 1$$

$$a \cdot 1 = a$$

$$a \vee \bar{a} = 1$$

$$a \cdot \bar{a} = 0$$

Свойства основных булевых функций
доказываются либо путем преобразования
выражений, либо на основе сопоставления таблиц
истинности правой и левой части равенства.

Пример. Доказать, что $\overline{a \vee b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$

С учетом таблиц истинности элементарных логических операций определяем последовательно значения функций, указанных в верхней строке для всех возможных значений аргументов a и b , т.е. построим для них соответствующие им таблицы истинности

$$\overline{a \vee b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$$

a	b	$a \vee b$	$\overline{a \vee b}$	\bar{a}	\bar{b}	$\bar{a} \cdot \bar{b}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

Так как значения функций $\overline{a \vee b}$ и $\bar{a} \cdot \bar{b}$ на всех наборах совпадают, то эти функции равны.

2.2.4. Задание функции формулой. Эквивалентные преобразования логических выражений



Понятие формулы вводится для формализации представления и записи простого или сложного высказывания.

Формула рассматривается как некоторый способ реализации функции и вводится индуктивно в соответствии со следующим правилом: если A и B – высказывания (простые или сложные, постоянные или переменные), то запись значения истинности каждого из этих высказываний – есть формула; если A и B – формулы, то выражения

« $A * B$ » и « \bar{A} » (где символ $*$ обозначает знак одной из рассмотренных выше элементарных логических операций) – тоже формулы.



Таким образом, рассмотренные выше выражения, которыми описывались элементарные логические операции и свойства основных логических операций, - **суть формулы**. Применение по отношению к ним указанного правила позволяет получить новые формулы, соответствующие более сложным высказываниям.

Новые формулы могут быть получены на основе использования понятия суперпозиции функций.

Суперпозицией функций f_1, f_2, \dots, f_n называется функция f , полученная путем подстановки функций f_1, f_2, \dots, f_n друг в друга и переименования переменных.

Пусть имеется множество логических функций, заданных формулами $E = \{ f_1, f_2, \dots, f_m \}$; при этом говорят, что имеет место множество формул над E . Тогда новую формулу можно получить используя следующее правило:

Пусть $f_0(x_1, x_2, \dots, x_n)$ некоторая формула над E . Если A_1, A_2, \dots, A_n – либо символы переменных, либо другие формулы над E , то $f_0(A_1, A_2, \dots, A_n)$ – тоже формула над E .

Пример. Пусть функция задана формулой

$f_0(z_1, z_2) = z_1 \rightarrow z_2$, и при этом имеет место равенство

$$z_1 = A_1 = x_1 \vee x_2, \quad z_2 = A_2 = x_3$$

Тогда новую формулу E над можно получить путем подстановки A_1 и A_2 в исходную формулу:

$$f_0(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2) \rightarrow x_3$$

Полученную формулу вновь представим как исходную, и, полагая далее

$$A_1 = f_0(x_1, x_2, x_3), \quad A_2 = x_3, \quad A_3 = x_1 \cdot x_2$$

делаем вновь подстановку.

Тогда новая формула над E :

$$f_0(x_1, x_2, x_3) = \left(\left((x_1 \vee x_2) \rightarrow x_3 \right) \vee x_3 \right) \rightarrow x_1 \cdot x_2$$



Логические операции обладают различным приоритетом, с точки зрения порядка выполнения их в выражении. Принят следующий порядок выполнения операций в булевой алгебре: в первую очередь вычисляются выражения, над которыми стоит знак отрицания, далее выполняются операции конъюнкции, а затем дизъюнкции.

Если выражение, заключенное в скобках, представляет конъюнкцию или имеет общий знак отрицания, то скобки опускаются.



Сопоставляя введенные выше понятия логической функции и формулы, следует иметь в виду, что

логическая функция - это зависимость между логическими переменными, однозначно определяемая таблицей истинности, а

формула это выражение, которое используется для описания логической функции, причем одна и та же логическая функция может описываться несколькими формулами.

Пример. Рассмотрим две формулы:

$$f(x_1, x_2) = x_1 \mid x_2 \quad \mathbf{и} \quad f(x_1, x_2) = \overline{x_1 \cdot x_2}$$

Несложно показать, что обе формулы представляют одну и ту же функцию, так как таблицы истинности у них одинаковы.

Формулы, соответствующие одной и той же функции, называются **эквивалентными или **равносильными**.**

Две формулы U и V называются **эквивалентными** (**равносильными**), если они реализуют одну и ту же функцию. При этом записывают: $U=B$.

Эквивалентные преобразования логических выражений. **Эквивалентные преобразования** – это такие преобразования формул, при которых сохраняется их эквивалентность. Преобразование называется **эквивалентным**, если исходная формула

$U = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и полученная в результате преобразования формула $B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ принимают одинаковые значения на каждом наборе значений аргументов.

Эквивалентное преобразование осуществляется на основе сопоставления таблиц истинности, либо на основе применения свойств основных логических операций.

Покажем примеры эквивалентных преобразований, которые позволяют получить новые формулы для описания функций $f_4 - f_8$ (см. п. 1.2.2), используя только знаки операций конъюнкции, дизъюнкции и отрицания.

1. Преобразование формулы, описывающей функцию $f_4 : a \rightarrow b = \bar{a} \vee b$.

Справедливость преобразования доказывается соответствующей таблицей истинности.

a	b	\bar{a}	$a \rightarrow b$	$\bar{a} \vee b$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

2.Преобразование формулы, описывающей функцию $f_5 : a \sim b = ab \vee \bar{a}\bar{b} = (a \rightarrow b)(b \rightarrow a)$.

Справедливость преобразования доказывается соответствующей таблицей истинности.

a	b	$a \sim b$	ab	$\bar{a}\bar{b}$	$ab \vee \bar{a}\bar{b}$
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1

3. Функция f_6

$$a \oplus b = \overline{a \sim b} = \overline{ab \vee \bar{a}\bar{b}} = \overline{ab} \cdot \overline{\bar{a}\bar{b}} = (\bar{a} \vee \bar{b}) \cdot (a \vee b)$$

4. Функция f_7

$$a|b = \overline{a \cdot b}$$

5. Функция f_8

$$a \downarrow b = \overline{a \vee b}$$



Формулы, из которых построена некоторая исходная формула, называются **подформулами**.

Чаще всего эквивалентные преобразования основаны на замене подформул на эквивалентные им подформулы.

Если в формуле U заменить подформулу B на эквивалентную ей под формулу B' , то формула перейдет U в эквивалентную ей формулу U' .

2.2.5. Двойственные функции

Логическая функция $f^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ равная
, называется **двойственной** по отношению к
функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Очевидно свойство взаимности двойственных
функций:

$$f^{**}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Теорема 2.1. Если некоторая формула Φ реализует функцию f , то формула Φ^* , реализующая двойственную функцию f^* , может быть получена из Φ путем замены всех подформул на двойственные им. То есть если

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = f[f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_k(x_1, x_2, \dots, x_n)]$$

ТО

$$\Phi^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = f^*[f_1^*(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2^*(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_k^*(x_1, x_2, \dots, x_n)] .$$

В частном случае из теоремы 2.1 вытекает следующее правило.

Если формула Φ содержит только операции $\wedge, \vee, \bar{}$ и константы $0, 1$, то для получения формулы Φ^* , двойственной к Φ , необходимо, сохраняя порядок выполнения операций, везде заменить 0 на 1 (1 на 0), операцию \vee на $\&$ (операцию $\&$ на \vee).

Можно сформулировать следующие принципы двойственности для формул:

1) если две формулы эквивалентны, то есть

$$\Phi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = \Phi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad ,$$

то эквивалентны и отрицания этих формул

$$\overline{\Phi_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{\Phi_2}(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad ;$$

2) если формулы Φ_1 и Φ_2 эквивалентны, то и двойственные им функции тоже эквивалентны

$$\Phi_1^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \Phi_2^*(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad ;$$

3) если две формулы эквивалентны, то будут эквивалентны и формулы, полученные из исходных путем замены аргументов на их отрицания

$$\Phi_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) = \Phi_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$$

2.3. СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

2.3.1. Конъюнктивная и дизъюнктивная нормальные формы

Любая функция булевой алгебры может быть представлена некоторыми формулами специального вида.

Нормальные формы – это некоторое стандартное представление функции с помощью элементарных конъюнкций и элементарных дизъюнкций.

Элементарной дизъюнкцией (ЭД) называют дизъюнкцию нескольких переменных или их отрицаний.

Например, $d_i = a_1 \vee a_2 \vee \bar{a}_3$

Элементарной конъюнкцией (ЭК) называют конъюнкцию нескольких переменных или их отрицаний.

Например, $k_i = a_1 \cdot \bar{a}_2 \cdot a_3$.

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) некоторой заданной функции называется формула, которая имеет вид дизъюнкции элементарных конъюнкций.

Например, $a_1 \bar{a}_2 a_3 \vee \bar{a}_1 \bar{a}_2 a_3$

Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) некоторой заданной функции называется формула, которая имеет вид конъюнкции элементарных дизъюнкций.



Если заданная функция уже представлена некоторой формулой, то путем эквивалентных преобразований эта формула может быть приведена к равносильной ей формуле в соответствующей нормальной форме (КНФ или ДНФ).

Порядок действий, при приведении исходной формулы к нормальной форме, следующий:

- 1) все функции выражаются через дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание;

2) если в выражении над несколькими элементами имеются знаки отрицания, то следует, используя формулы де Моргана, изменить выражение так, чтобы отрицание относилось только к одной переменной;

3) дальнейшее преобразование производится с использованием свойств элементарных операций.

Пример.

$$\begin{aligned} A \cdot \overline{\overline{B}} \cdot \overline{\overline{C}} \cdot (M \vee \overline{N}) &= A(B \vee \overline{C})(M \vee \overline{N}) = (AB \vee A\overline{C})(M \vee \overline{N}) = \\ &= ABM \vee AB\overline{N} \vee A\overline{C}M \vee A\overline{C}\overline{N}. \end{aligned}$$

Упрощение логических формул на основе применения понятий тождественно истинных и тождественно ложных форм. После приведения к нормальной форме можно существенно упрощать выражения логических функций.

Утверждение 1. Для того чтобы элементарная дизъюнкция была тождественно истинной, необходимо и достаточно, чтобы среди её слагаемых нашлась хотя бы одна переменная и её отрицание ($x_i \vee \bar{x}_i = 1$).

Утверждение 2. Для того чтобы элементарная конъюнкция была тождественно ложной, необходимо и достаточно, чтобы среди её сомножителей оказалась хотя бы одна переменная и её отрицание ($x_i \& \bar{x}_i = 0$).

Указанные два утверждения используются для упрощения выражений следующим образом:

В случае принадлежности логической формулы к КНФ рассматривается каждый ее сомножитель, и если в какой-то из них входят вместе x_i и \bar{x}_i , то он равен единице и его можно исключить. Если все сомножители равны единице, то такая функция тождественно истинна.

В случае принадлежности формулы к ДНФ рассматривается каждое слагаемое. Если в каком-либо слагаемом встречается произведение $x_i \cdot \bar{x}_i$, то это слагаемое равно нулю и его можно исключить.

Пример. Установить характер истинности формулы

$$\begin{aligned}(P \cdot (P \rightarrow Q)) \rightarrow Q &= \overline{P \cdot (\overline{P} \vee Q)} \vee Q = \overline{P} \vee \overline{(\overline{P} \vee Q)} \vee Q = \overline{P} \vee (P \cdot \overline{Q}) \vee Q = \\ &= \overline{P} \vee \overline{Q} \vee Q = 1\end{aligned}$$

2.3.2. Совершенно нормальные конъюнктивная и дизъюнктивная формы

Понятие совершенно нормальных конъюнктивных и дизъюнктивных форм. Пусть имеется n переменных: x_1, x_2, \dots, x_n

Будем формировать из них строки так, чтобы выполнялись три условия:

- 1) в каждую строку входят все n переменных;
- 2) каждая переменная входит в строку только один раз;
- 3) в строку входит либо сама переменная, либо её отрицание, но не одновременно то и другое.

Число таких строк 2^n

Элементарная дизъюнкция, сформированная в соответствии с указанными требованиями, образует логическую конструкцию вида

$$d_i = x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \dots \vee x_n \quad \text{и называется } \mathbf{макстермом} .$$

Элементарная конъюнкция образует логическую конструкцию вида

$$k_i = x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot \dots \cdot x_n \quad \text{и называется } \mathbf{минтермом} .$$

Совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ) логической функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

называют представление её в виде дизъюнкции минтермов, построенных из аргументов : x_1, x_2, \dots, x_n

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \vee \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \vee x_1 \bar{x}_2 \dots x_n \vee \dots \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots x_n$$

Совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ) логической функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

называют представление её в виде конъюнкции макстермов, построенных из аргументов рассматриваемой функции:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n) \cdot (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n) \cdot \dots \cdot (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \dots \vee \bar{x}_n)$$



Каждая логическая функция может быть представлена **единственным образом** в совершенной дизъюнктивной нормальной форме и совершенной конъюнктивной нормальной форме.

В полученной формуле заданной функции могут присутствовать или все термы, которые можно построить из n переменных, или часть из них, но дважды один терм входить в выражение не может.



Приведение функции к совершенно нормальной форме называют ее **разложением по всем переменным или по термам.**

Если имеется формула, описывающая некоторую заданную функцию, то с применением эквивалентных преобразований ее можно привести к совершенной дизъюнктивной нормальной форме, применяя следующую последовательность действий:

1. Логическая формула $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ приводится к дизъюнктивной нормальной форме

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee \dots$$

При этом каждое слагаемое представляет собой конъюнкцию некоторого числа переменных, но не обязательно всех.

2. Пусть слагаемое $\varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$ не содержит ни x_i , ни \bar{x}_i . В этом случае к нему конъюнктивно присоединяют тождественно-истинную форму

$$(x_i \vee \bar{x}_i) \quad \vdots$$

$$\varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot (x_i \vee \bar{x}_i) = \varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_n)x_i \vee \varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_n)\bar{x}_i$$

Если отсутствуют несколько переменных, то операцию нужно повторить для всех отсутствующих сомножителей. По окончании слагаемое будет удовлетворять первому условию.

3. Если в каком-либо слагаемом имеется несколько одинаковых сомножителей, то из них оставляется один.

4. Если слагаемое содержит $x_i \cdot \bar{x}_i$, то это слагаемое можно исключить.

5. Если среди всех слагаемых окажется два или несколько одинаковых, то они заменяются одним.

В результате указанных операций формула будет приведена к СДНФ.



При приведении к совершенной конъюнктивной нормальной форме последовательность действий остается той же, но все действия заменяются на двойственные.

Существует еще один метод приведения функции к совершенной нормальной форме.

Выражение в форме СКНФ включает столько сомножителей, сколько в таблице истинности содержится наборов, на которых функция равна нулю. Каждый сомножитель содержит дизъюнкцию всех входных переменных.

При этом если a_1, a_2, \dots, a_n – набор, где функция равна нулю, то в элементарную дизъюнкцию включают x_i , если $a_i = 0$ и \bar{x}_i , если $a_i = 1$.

Правила для построения совершенной дизъюнктивной нормальной формы аналогичны, только значения заменяются на двойственные.

Пример. Рассмотрим пример приведения заданной логической функции к форме СДНФ, с использованием обоих известных способов.

$$\begin{aligned}
 f(x, y, z) &= (x \oplus y) \rightarrow \bar{y} \& \bar{x} \vee x \& z \& (y \vee \bar{x}) = \overline{(\bar{x} \vee \bar{y}) \& (x \vee y)} \vee \\
 &\vee \bar{x} \& \bar{y} \vee x \& y \& z \vee x \& z \& \bar{x} = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}} \vee \overline{x \vee y} \vee \bar{x} \& \bar{y} \vee x \& y \& z = \\
 &= x \& y \vee \bar{x} \& \bar{y} \vee \bar{x} \& \bar{y} \vee x \& y \& z = x \& y \vee \bar{x} \& \bar{y} \vee x \& y \& z = \\
 &= x \& y \& (z \vee \bar{z}) \vee \bar{x} \& \bar{y} \& (z \vee \bar{z}) \vee x \& y \& z = x \& y \& z \vee x \& y \& \bar{z} \vee \\
 &\vee \bar{x} \& \bar{y} \& z \vee \bar{x} \& \bar{y} \& \bar{z} \vee x \& y \& z = x \& y \& z \vee x \& y \& \bar{z} \vee \\
 &\vee \bar{x} \& \bar{y} \& z \vee \bar{x} \& \bar{y} \& \bar{z}
 \end{aligned}$$

x	y	z	$x \oplus y$	$\bar{x} \& \bar{y}$	$x \& z \& (y \vee \bar{x})$	$f(x, y, z)$
0	0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0
1	0	1	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0	1
1	1	1	0	0	1	1

$$f(x, y, z) = \overline{\overline{x}yz} \vee \overline{\overline{x}y\bar{z}} \vee \overline{xy\bar{z}} \vee xyz.$$

Пример. Рассмотрим пример приведения заданной логической функции к форме СКНФ, с использованием обоих известных способов.

$$\begin{aligned}
 f(x, y, z) &= (z \oplus \bar{x})(\bar{y} \vee \bar{z} \vee x)(\bar{x} \rightarrow zy) = (z \vee \bar{x})(\bar{z} \vee \bar{x})(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee zy) = \\
 &= (z \vee \bar{x})(\bar{z} \vee x)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(x \vee z)(x \vee y) = (z \vee \bar{x} \vee y\bar{y})(\bar{z} \vee x \vee y\bar{y})(x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \& \\
 &\& (x \vee z \vee y\bar{y})(x \vee y \vee z\bar{z}) = (z \vee \bar{x} \vee \bar{y})(z \vee \bar{x} \vee y)(\bar{z} \vee x \vee \bar{y})(\bar{z} \vee x \vee y)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \& \\
 &\& (x \vee z \vee y)(x \vee z \vee \bar{y})(x \vee y \vee z)(x \vee y \vee \bar{z}) = (x \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) \& \\
 &\& (\bar{x} \vee y \vee z)(x \vee z \vee y)(x \vee \bar{y} \vee z).
 \end{aligned}$$

x	y	z	$z \oplus \bar{x}$	$\bar{y} \vee \bar{z} \vee x$	$\bar{x} \rightarrow zy$	$f(x, y, z)$
0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1	0
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1

$$f(x, y, z) = (x \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee z)(x \vee z \vee y)(x \vee \bar{y} \vee z)$$

2.4. МИНИМИЗАЦИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

2.4.1. Понятие минимизации



Задача минимизации булевой функции состоит в построении такой ДНФ (или КНФ) для некоторой заданной функции, которая реализует эту функцию и имеет наименьшее суммарное число операций и символов в формуле, т.е. имеет минимальную сложность.

Решение этой задачи важно, когда логические функции реализуются техническими устройствами.

Одной из основных целей минимизации является упрощение логических устройств и достижение максимальной экономичности разрабатываемых систем.



Для минимизации булевых функций в целях получения самых простых выражений используется ряд методов, среди которых наибольшее применение находят:

- 1) метод неопределенных коэффициентов;**
- 2) метод Квайна-Мак Класки;**
- 3) метод карт Карно.**

2.4.2. Метод неопределенных коэффициентов

Сущность метода заключается в представлении функции в самом общем виде в ДНФ и введении коэффициентов a_i , значения которых (0 или 1) подбираются таким образом, чтобы формула была минимальной. Пусть дана функция трех переменных. Представим формулу этой функции в виде ДНФ самого общего вида:

$$\begin{aligned}
 f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & a_1x_1 \vee a_2\bar{x}_1 \vee a_3x_2 \vee a_4\bar{x}_2 \vee a_5x_3 \vee a_6\bar{x}_3 \vee a_7x_1x_2 \vee \\
 & \vee a_8\bar{x}_1x_2 \vee a_9x_1\bar{x}_2 \vee a_{10}\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee a_{11}x_1x_3 \vee a_{12}\bar{x}_1x_3 \vee a_{13}x_1\bar{x}_3 \vee a_{14}\bar{x}_1\bar{x}_3 \vee \\
 & \vee a_{15}x_2x_3 \vee a_{16}\bar{x}_2x_3 \vee a_{17}x_2\bar{x}_3 \vee a_{18}\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee a_{19}\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee a_{20}x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \\
 & \vee a_{21}\bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee a_{22}\bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee a_{23}\bar{x}_1x_2x_3 \vee a_{24}x_1\bar{x}_2x_3 \vee a_{25}x_1x_2\bar{x}_3 \vee a_{26}x_1x_2x_3.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Термы, содержащие k переменных, будем называть термами ранга k . В выражении (2.1) представлены все возможные формы термов.

Если записать уравнение (2.1) для всех возможных значений аргументов x_1, x_2, x_3 , то получим систему 2^n уравнений (в нашем случае $n=3$):

- 1) $f(1,1,1) = a_1 \vee a_3 \vee a_5 \vee a_7 \vee a_{11} \vee a_{15} \vee a_{26};$
- 2) $f(1,1,0) = a_1 \vee a_3 \vee a_6 \vee a_7 \vee a_{13} \vee a_{17} \vee a_{25};$
- 3) $f(1,0,1) = a_1 \vee a_4 \vee a_5 \vee a_9 \vee a_{11} \vee a_{16} \vee a_{24};$
- 4) $f(0,1,1) = a_2 \vee a_3 \vee a_5 \vee a_8 \vee a_{12} \vee a_{15} \vee a_{23};$ (2.2)
- 5) $f(1,0,0) = a_1 \vee a_4 \vee a_6 \vee a_9 \vee a_{13} \vee a_{18} \vee a_{20};$
- 6) $f(0,1,0) = a_2 \vee a_3 \vee a_6 \vee a_8 \vee a_{14} \vee a_{17} \vee a_{21};$
- 7) $f(0,0,1) = a_2 \vee a_4 \vee a_5 \vee a_{10} \vee a_{12} \vee a_{16} \vee a_{22};$
- 8) $f(0,0,0) = a_2 \vee a_4 \vee a_6 \vee a_{10} \vee a_{14} \vee a_{18} \vee a_{19}.$

Для заданной конкретной функции конкретные значения левой части (2.2) нам известны. Если набор x_1, x_2, x_3 такой, что функция на нем принимает значение 0, то все коэффициенты в правой части равны 0. Эти нулевые коэффициенты вычеркиваются и в остальных уравнениях. В каждом оставшемся уравнении приравниваем единице коэффициент, определяющий конъюнкцию наименьшего ранга (ранг – число переменных), а остальные коэффициенты в правой части уравнения приравниваем нулю с учетом ранее сделанных подстановок. После подстановки коэффициентов в уравнение (2.1) получаем результирующее выражение булевой функции.

Пример. Минимизировать заданное выражение

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3.$$

После вычисления значений функции на всех наборах и подстановки в

(2.2) получим:

$$1) a_1 \vee a_3 \vee a_5 \vee a_7 \vee a_{11} \vee a_{15} \vee a_{26} = 1;$$

$$2) a_1 \vee a_3 \vee a_6 \vee a_7 \vee a_{13} \vee a_{17} \vee a_{25} = 1;$$

$$3) a_1 \vee a_4 \vee a_5 \vee a_9 \vee a_{11} \vee a_{16} \vee a_{24} = 1;$$

$$4) \cancel{a_2 \vee a_3 \vee a_5 \vee a_8 \vee a_{12} \vee a_{15} \vee a_{23}} = 0;$$

$$5) a_1 \vee a_4 \vee a_6 \vee a_9 \vee a_{13} \vee a_{18} \vee a_{20} = 1;$$

$$6) \cancel{a_2 \vee a_3 \vee a_8 \vee a_8 \vee a_{14} \vee a_{17} \vee a_{21}} = 0;$$

$$7) \cancel{a_2 \vee a_4 \vee a_5 \vee a_{10} \vee a_{12} \vee a_{16} \vee a_{22}} = 0;$$

$$8) a_2 \vee a_4 \vee a_6 \vee a_{10} \vee a_{14} \vee a_{18} \vee a_{19} = 1.$$

Все коэффициенты, входящие в нулевые наборы, должны быть равны нулю, т.е.

$$a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = a_8 = a_{10} = a_{12} = a_{14} = a_{15} = a_{16} = a_{17} = a_{21} = a_{22} = a_{23} = 0.$$

Остается рассмотреть единичные наборы:

$$1) a_1 \vee a_7 \vee a_{11} \vee a_{26} = 1;$$

$$5) a_1 \vee a_9 \vee a_{13} \vee a_{18} \vee a_{20} = 1;$$

$$2) a_1 \vee a_7 \vee a_{13} \vee a_{25} = 1;$$

$$8) a_{18} \vee a_{19} = 1.$$

$$3) a_1 \vee a_9 \vee a_{11} \vee a_{24} = 1;$$

В первых четырех уравнениях конъюнкция наименьшего ранга – a_1 , а в последнем – a_{18} . Таким образом, принимаем $a_1 = 1$, $a_{18} = 1$. Остальные коэффициенты принимаем равными нулю.

Подставляя коэффициенты в выражение (2.1), получаем минимальную ДНФ заданной функции:

$$f(x, y, z) = x_1 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3.$$

2.4.3. Метод Квайна – Мак Класки



Метод Квайна. При минимизации методом Квайна исходная функция задается в СДНФ. Сущность метода состоит в поэтапном упрощении выражений на основе операций склеивания.



Шаг 1. Нахождение первичных импликант. Все термы сравниваются между собой попарно. Если два терма имеют вид $m_i = ax_i$, а $m_j = a\bar{x}_i$ (где a – конъюнкция нескольких переменных), тогда вместо m_i и m_j выписываются a , которые являются термом $(n-1)$ порядка. Исключаемые термы помечаются. Далее сравниваются все полученные термы $(n-1)$ ранга. В результате склеивания выписываются термы $(n-2)$ ранга. Процесс продолжается до тех пор, пока дальнейшее склеивание становится невозможным. Не исключенные в процессе выполнения указанной процедуры термы исходной функции, а также термы, которые были получены в результате склеивания, будем называть **первичными** или **простыми импликантами**.

Пример. Пусть задано следующее выражение в форме СДНФ

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4.$$

Пронумеруем все входящие в него минтермы

$$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4 - 1, \bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 - 2, \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4 - 3, \bar{x}_1x_2x_3x_4 - 4, x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 - 5, \\ x_1\bar{x}_2x_3x_4 - 6, x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 - 7, x_1x_2\bar{x}_3x_4 - 8.$$

Производим склеивания следующим образом:

склеиваемые полученный
термы 4-го ранга: терм 3-го ранга:

$$\begin{array}{ll} 1 - 4 \rightarrow (x_2) & \bar{x}_1x_3x_4 \quad (1); \\ 1 - 6 \rightarrow (x_1) & \bar{x}_2x_3x_4 \quad (2); \\ 2 - 3 \rightarrow (x_4) & \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \quad (3); \\ 2 - 7 \rightarrow (x_1) & x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \quad (4); \\ 3 - 4 \rightarrow (x_3) & \bar{x}_1x_2x_4 \quad (5); \end{array} \quad \begin{array}{ll} 3 - 8 \rightarrow (x_2) & x_2\bar{x}_3x_4 \quad (6); \\ 5 - 6 \rightarrow (x_2) & x_1\bar{x}_2x_4 \quad (7); \\ 5 - 8 \rightarrow (x_2) & x_1\bar{x}_3x_4 \quad (8); \\ 7 - 8 \rightarrow (x_2) & x_1x_2\bar{x}_3 \quad (9). \end{array}$$

склеиваемые термы 2-го ранга:

$$\begin{array}{ll} 3 - 9 \rightarrow (x_1) & x_2\bar{x}_3; \\ 4 - 6 \rightarrow (x_4) & x_2\bar{x}_3. \end{array}$$

Дальнейшее склеивание невозможно, выписываем простые импликанты:

$$\bar{x}_1x_3x_4, \bar{x}_2x_3x_4, \bar{x}_1x_2x_4, x_1\bar{x}_2x_4, x_1\bar{x}_3x_4, x_2\bar{x}_3$$

Шаг 2. Составление таблицы. В колонках записываем термы исходного выражения (они обозначены порядковыми номерами), а в строках - простые импликанты.

	1	2	3	4	5	6	7	8
$\bar{x}_1 x_3 x_4$	v			v				
$\bar{x}_2 x_3 x_4$	v					v		
$\bar{x}_1 x_2 x_4$			v	v				
$x_1 \bar{x}_2 x_4$					v	v		
$x_1 \bar{x}_3 x_4$					v			v
$x_2 \bar{x}_3$		v	v				v	v

Шаг 2. Составление таблицы. В колонках записываем термы исходного выражения (они обозначены порядковыми номерами), а в строках - простые импликанты. Если в исходный терм входит какой-либо импликант, то на пересечении соответствующего столбца и строки ставится метка.

	1	2	3	4	5	6	7	8
$\bar{x}_1 x_3 x_4$	v			v				
$\bar{x}_2 x_3 x_4$	v					v		
$\bar{x}_1 x_2 x_4$			v	v				
$x_1 \bar{x}_2 x_4$					v	v		
$x_1 \bar{x}_3 x_4$					v			v
$x_2 \bar{x}_3$		v	v				v	v

Шаг 3. Нахождение существенных импликант.

Если в каком-либо из столбцов таблицы имеется одна метка, то импликанта, соответствующая этой строке, является существенной. Она обязательно входит в конечный результат. Из таблицы для дальнейшего анализа исключаются строки, соответствующие существенным импликантам, и покрываемые ими столбцы.

Шаг 4. Вычеркивание лишних столбцов. Из двух столбцов, имеющих метки в одинаковых строках, один вычеркивается (в нашем примере таких нет).

	1	2	3	4	5	6	7	8
$\bar{x}_1 x_3 x_4$	v			v				
$\bar{x}_2 x_3 x_4$	v					v		
$\bar{x}_1 x_2 x_4$			v	v				
$x_1 \bar{x}_2 x_4$					v	v		
$x_1 \bar{x}_3 x_4$					v			v
$x_2 \bar{x}_3$		v	v				v	v

Шаг 5. Вычеркивание лишних импликант. Если после шага 4 в таблице появятся строки, в которых нет ни одной метки, то импликанты, соответствующие этим строкам, из рассмотрения исключаются (в нашем примере нет). Результате выполнения описанных выше действий приведены в таблице

		1	4	5	6
1	$\bar{x}_1 x_3 x_4$	v	v		
2	$\bar{x}_2 x_3 x_4$	v			v
3	$\bar{x}_1 x_2 x_4$		v		
4	$x_1 \bar{x}_2 x_4$			v	v
5	$x_1 \bar{x}_3 x_4$			v	

Шаг 6. Выбор конечного результата. В результирующее выражение включается совокупность импликант, которые имеют метки во всех столбцах. Предпочтение отдается тому варианту, в котором минимально суммарное число литер (букв), входящих в конечный результат.

Выбирая **1-ю** и **4-ю** импликанты, которые в совокупности покрывают все столбцы, окончательно получаем:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_4$$

Метод Мак Класки. Мак Класки предложил модернизировать метод Квайна следующим образом:

1) все термы кодируются в виде двоичных последовательностей: переменной соответствует 1; ее отрицанию – 0, например, $x_1\bar{x}_2x_3 = 101$;

2) все последовательности разбиваются на группы по числу единиц в последовательности (в i -ю группу попадает терм, который имеет i единиц);

3) при сравнении сопоставляются только соседние группы, т.к. только они имеют отличие в одном разряде;



4) при исключении переменной вместо нее записывается прочерк.

Порядок формирования минимизированного выражения логической функции такой же, как в методе Квайна.

2.4.4. Метод карт Карно

Карта Карно – это графическое представление таблицы истинности. Она представляет собой совокупность ячеек, определяемых системой вертикальных и горизонтальных координат; каждой ячейке соответствует набор значений входных переменных.

Запись в ячейке – это значение функции на соответствующем наборе.

Таким образом, имеется взаимно однозначное соответствие между ячейками Карно и строками таблицы истинности.

Пример.

Функции $f(x, y, z) = \bar{x}(\bar{y} \vee \bar{z}) \vee xz$

соответствуют представленные ниже таблица истинности и карта Карно.

Карта Карно

Таблица истинности

	yz					x	y	z	$f(x, y, z)$
x		00	01	11	10	0	0	0	1
	0	1	1	0	1	0	0	1	1
	1	0	1	1	0	0	1	0	1
						1	0	0	0
						1	0	1	1
						0	1	1	0
						1	1	0	0
						1	1	1	1

Сущность метода заключается в выделении в карте Карно прямоугольных ячеек (блоков), содержащих одно и то же значение функции. Любой блок может иметь размер $2^a \times 2^b$, где a, b – целые.

Правила формирования выражения минимальной булевой функции. Основные правила заключаются в следующем:

- 1) каждая ячейка, содержащая единицу, должна войти в какой-то из блоков;
- 2) результат записывается в виде логической суммы термов, соответствующих сформированным блокам;

3) терм, описывающий блок, записывается в форме произведения тех переменных, которые на координатной сетке не изменяют свое значение в пределах блока; если координата равна нулю, то соответствующая ей переменная входит в терм с отрицанием, а если - единице, то без отрицания.

Степень сложности булевой функции оценивается числом слагаемых и числом букв (литер). Выражение, которое получено с применением метода карт Карно, на основе термов, сформированных из групп с единичным значением логической функции, при минимальном количестве литер называется **минимальной суммой (минимальная ДНФ)**.



При формировании групп для получения минимальных сумм необходимо руководствоваться двумя принципами:

- 1) группа должна быть как можно больше;**
- 2) число групп должно быть как можно меньше.**

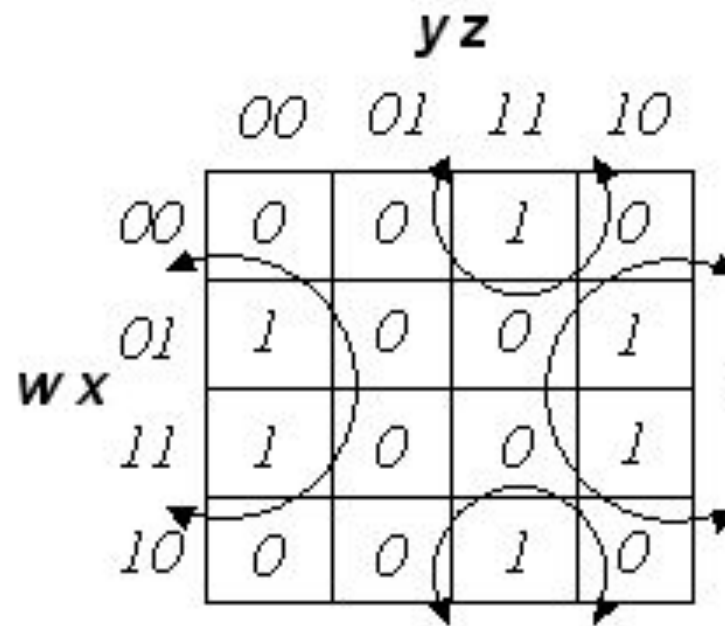
Карту Карно следует рассматривать как трехмерную, представляя ее в виде тора (склеивая правую и левую, а так же нижнюю и верхнюю границы).

Общая последовательность действий при минимизации:

- 1) в таблице Карно выбирается ячейка с единицей, не являющаяся подмножеством уже сформированного блока;**
- 2) формируется наибольшая группа, содержащая эту ячейку;**
- 3) выбирается следующая ячейка, не вошедшая в предшествующие группы, и для нее повторяются те же действия;**
- 4) процесс повторяется, пока не останутся единицы, не включенные в какие-либо группы;**
- 5) записывается выражение минимальной функции по правилу, которое было установлено выше.**

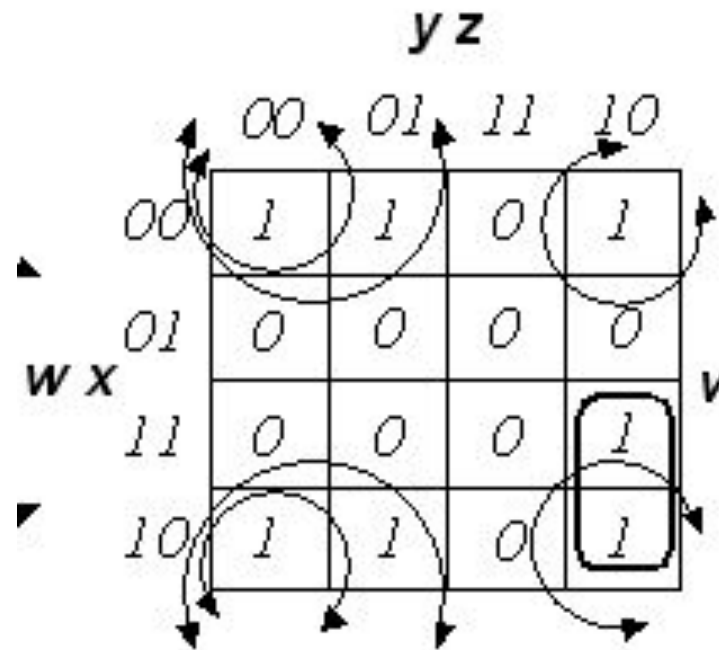
Пример. Карте Карно, представленной на рисунке, соответствует функция.

$$f(w, x, y, z) = x\bar{z} \vee \bar{x}yz$$



Пример. Карте Карно, представленной на рисунке, соответствует функция.

$$f(w, x, y, z) = \bar{x} \bar{y} \vee w y \bar{z} \vee \bar{x} \bar{z}$$





Существует еще один способ записи минимальной формулы на основе метода минимальных произведений (**минимальное произведение или минимальная КНФ**).

При этом по тому же правилу объединяются ячейки с нулем, логическая формула записывается как конъюнкция элементарных дизъюнкций, а правила формирования переменных в дизъюнкции обратные описанным выше.

4) при исключении переменной вместо нее записывается прочерк.

Минимизация частично определенных булевых функций. В случае, если некоторые входные наборы невозможны либо значение функции на них несущественно, то говорят о **недоопределенных условиях**.

При этом особенность использования карт Карно следующая: недоопределенное условие на карте Карно обозначается прочерком и его можно либо присоединить, либо не присоединить к любой группе.

Пример. Карте Карно, представленной на рисунке, соответствует функция.

$$f(w, x, y, z) = yz \vee \bar{w}x\bar{y}$$

		yz			
		00	01	11	10
w x	00	0	—	0	1
	01	—	1	0	1
	11	0	0	—	—
	10	0	0	0	1

2.5. ПОЛНОТА И ЗАМКНУТОСТЬ МНОЖЕСТВА БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

2.5.1. Понятие функционально полной системы

Система функций называется **функционально полной**, если любая булева функция может быть записана в виде формул через функции этой системы. Одним из способов получения полных систем является использование некоторых существующих, ранее выявленных полных систем.

Теорема. Пусть даны две системы функций:

и . Относительно этих функций известно, что $B_1 = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ — полная система и каждая ее функция может быть выражена в виде формул через функции второй системы. В этом случае система $D = \{g_1, g_2, \dots, g_m\}$ — тоже полная.

Доказательство. Пуст h – это произвольная функция. В силу полноты B функция h может быть выражена в виде формул над B , т.е. $h = F(f_1, f_2, \dots, f_n)$. Но любая из функций B по условию может быть выражена через функции D , т.е.

$$f_1 = \varphi_1(q_1, q_2, \dots), f_2 = \varphi_2(q_1, q_2, \dots)$$

Следовательно,

$$h = F(\varphi_1(q_1, q_2, \dots), \varphi_2(q_1, q_2, \dots)) = F(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

Таким образом, произвольная функция h может быть выражена через функции системы D . Поэтому система D – полная.

Доказанную теорему можно использовать для доказательства полноты двух следующих систем:

$$S_1 = \{\wedge, \bar{}\} \text{ и } S_2 = \{\vee, \bar{}\}$$

Известно, что S_1 – полная система (это вытекает из того факта, что любую булеву функцию можно представить в КНФ и ДНФ).

Для доказательства полноты S_1 и S_2 нужно установить, что недостающая относительно S_0 операция (в S_1 – дизъюнкция, в S_2 – конъюнкция) может быть выражена через две остальные. Такое подтверждение дают правила де Моргана и двойного отрицания:

$$x_1 \vee x_2 = \overline{\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2}$$

$$x_1 \wedge x_2 = \overline{\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2}$$

Следовательно, S_1 и S_2 — полные системы и их называют соответственно **конъюнктивным** и **дизъюнктивным базисом Буля**.

Полной является также система $S_3 = \{\wedge, \oplus, 1\}$, которая сводится к конъюнктивному базису S_1 , т.к. отрицание \bar{x} может быть выражено через операции S_3 следующим образом:

$$\bar{x} = x \oplus 1$$

Это легко проверяется по таблице истинности.

2.5.2. Алгебра Жегалкина

Алгебра над множеством логических функций с двумя бинарными операциями (конъюнкция и сложение по модулю два) называется **алгеброй Жегалкина**. В этой алгебре выполняются следующие соотношения:

$$1) x \oplus y = y \oplus x;$$

$$4) x \oplus 0 = x;$$

$$2) x(y \oplus z) = xy \oplus xz;$$

$$5) \bar{x} = x \oplus 1.$$

$$3) x \oplus x = 0;$$

Для подтверждения полноты алгебры Жегалкина представим дизъюнкцию через функции этой алгебры:

$$x \vee y = \overline{\bar{x} \cdot \bar{y}} = xy \oplus x \oplus y$$

Полученная формула, имеющая вид суммы произведений, называется **полиномом по модулю два** или **полиномом Жегалкина**.

Для каждой логической функции может быть получен полином Жегалкина, причем единственный для данной функции.

Для этого следует привести заданное выражение к форме СДНФ, исключить операции дизъюнкции, отрицания и раскрыть скобки. В частном случае, если $x \cdot y = 0$, то $x \vee y = x \oplus y$

Пример.

$$\begin{aligned}x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 &= x_1x_2 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_2 = x_1x_2 \oplus (x_1 \oplus 1)(x_2 \oplus 1) = \\ &= x_1x_2 \oplus x_1x_2 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 1 = x_1 \oplus x_2 \oplus 1\end{aligned}$$

Существует ещё один способ приведения функции к полиному Жегалкина. Запишем предполагаемый результат в виде выражения общего вида с неопределенными коэффициентами.

Пример.
$$x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 = ax_1x_2 \oplus bx_1 \oplus cx_2 \oplus d$$

Для определения значений коэффициентов вычислим левую и правую часть для четырех возможных наборов входных переменных:

$$1) x_1 = 0, x_2 = 0 \quad l = d; \quad d = l;$$

$$2) x_1 = 0, x_2 = 1 \quad 0 = c \oplus d = c \oplus l; \quad c = l;$$

$$3) x_1 = 1, x_2 = 0 \quad 0 = b \oplus d = b \oplus l; \quad b = l;$$

$$4) x_1 = 1, x_2 = 1 \quad l = a \oplus b \oplus c \oplus d = a \oplus l \oplus l \oplus l; \quad a = 0.$$

Отсюда.
$$x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 = x_1 \oplus x_2 \oplus l.$$

2.5.3. Замыкание и замкнутые классы

Замыканием множества функции M называют множество всех булевых функций, представляемых в виде формул через функции множества M . Замыкание множества будем обозначать $[M]$. Очевидно, что $M \subseteq [M]$.

Множество M называют **замкнутым классом**, если при замыкании M не происходит его дальнейшего расширения, то есть $[M] = M$.

Ответ на вопрос, какую систему булевых функций можно считать функционально полной, дают две теоремы.

4) при исключении переменной вместо нее записывается прочерк.

Теорема о функциональной полноте. Для того чтобы система функций B была полной, необходимо и достаточно, чтобы она не содержалась полностью ни в одном из пяти замкнутых классов: T_0, T_1, S, L, M , где

T_0 – класс замкнутых булевых функций, сохраняющих константу 0 , т.е. функций, для которых

$$f(0, 0, \dots, 0) = 0$$

T_1 – замкнутый класс булевых функций, сохраняющих константу 1 , т.е. таких функций, что

$$f(1, 1, \dots, 1) = 1$$

;

S – замкнутый класс всех самодвойственных функций, т.е. функций, для которых

$$\overline{f}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

L – замкнутый класс всех линейных функций.

Линейной функцией называется функция, у которой полином Жегалкина имеет вид $c_0 \oplus c_1 x_1 \oplus c_2 x_2 \oplus \dots \oplus c_i x_i \oplus \dots \oplus c_n x_n$, где c_0 и c_i – коэффициенты (равны 1 или 0). В линейной функции отсутствует произведение переменных.

M – замкнутый класс всех монотонных функций;

Функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется монотонной, если из условия $\alpha \leq \beta$ следует $f(\alpha) \leq f(\beta)$, где α и β – наборы переменных и введено отношение порядка \leq , означающее $\alpha \leq \beta$, если

$$\alpha_1 \leq \beta_1, \alpha_2 \leq \beta_2, \dots, \alpha_n \leq \beta_n$$

Существует еще одно, близкое по содержанию определение теоремы о полноте.

Теорема Поста. Система является **полной** тогда, когда выполняются следующие условия:

- 1) $f_i \notin T_0$;
- 2) $f_j \notin T_1$;
- 3) $f_k \notin S$;
- 4) $f_m \notin M$;
- 5) $f_l \notin L$.

То есть хотя бы одна функция не должна принадлежать какому-либо замкнутому классу, т.к. из функций замкнутого класса нельзя построить функцию, не входящую в данный класс.

Примеры функционально полных базисов. Класс функций N из E_2 называется **предполным**, если он неполный, а для любой функции f , такой, что $f \in E_2$, но $f \notin N$ — полный. $N \cup \{f\}$

Система B называется полной, если любая функция $f \in E_2$ может быть представлена в виде суперпозиций функций этой системы, и она называется **базисом**, если теряется полнота при удалении хотя бы одной функции.

Состав систем, которые относятся к базису, можно определить на основе следующей таблицы

N	Функция	T_0	T_1	L	S	M
1	$x_1 \wedge x_2$	—	—	+	+	—
2	$x_1 \oplus x_2$	—	+	—	+	+
3	$x_1 \vee x_2$	—	—	+	+	—
4	$x_1 \sim x_2$	+	—	—	+	+
5	\bar{x}	+	+	—	—	+
6	$x_1 \rightarrow x_2$	+	—	+	+	+
7	$x_1 x_2$	+	+	+	+	+
8	1	+	—	—	+	—

Символом «+» обозначается факт непринадлежности функции к замкнутому классу.

Согласно теореме Поста, к базису можно отнести минимальный набор функций, строки которого будут содержать хотя бы один символ «+» в каждом столбце (T_0, T_1, S, L, M, \dots).

Из предшествующей таблицы видно, что к функционально полным системам можно отнести, например, системы

$$\{\wedge, \neg\}, \{|\}, \{\oplus, \rightarrow\}$$