Лк_5б

Вращение твердого тела

Момент импульса твердого тела равен сумме моментов импульсов точечных элементов, образующих тело. Мо мент инерции i-того точечного элемента определяется формулой:

$$\vec{N}_i = J_i \vec{\omega}$$

При суммировании моментов импульса всех точек твердого тела в левой части получим его момент импульса тела, а в правой, в виду того, что угловая скорость одинакова для всех точек, будем иметь ее произведение на сумму моментов инерции всех точек, т.е. - на момент инерции тела:

$$\vec{N} = j\vec{\omega} \qquad (5.1)$$

Для i-той материальной точки тела производная по времени от момента импульса равна моменту силы, действующей на точку:

$$\frac{d\vec{N}_i}{dt} = \vec{M}_i$$

Вновь проведя суммирование этого равенства по всем точкам твердого тела, получим в левой части производную от момента импульса этого тела, а в правой только сумму моментов внешних сил, так как сумма моментов внутренних сил равна нулю

$$\frac{d\vec{N}}{dt} = \vec{M}_{\text{рез}} \qquad (5.2)$$

где N - это момент импульса тела, а Мрез - суммарный момент внешних сил, действующих на него.

Подставим в (5.2) вместо N его выражение (5.1) и получим:

$$j\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M} \qquad (5.3)$$

Это уравнение в каком-либо из его вариантов является основным уравнением динамики вращательного движения твердого тела.

Закон сохранения момента импульса - это один из фундаментальных законов природы. Если на тело не действуют внешние силы, или их равнодействующий момент равен нулю то согласно (5.3)

$$\frac{d\vec{N}}{dt} = 0$$

Следовательно, N = const.

Кинетическая энергия вращающегося тела. При поступательном движении кинетическая энергия материальной точки определяется по формуле

$$W = \frac{mv^2}{2}$$

Модуль линейной скорости точечного элемента вращающегося тела равен $v_i = \omega R_i$. Подставим этот модуль в формулу для кинетической энергии i-того точечного элемента вращающегося тела

$$W_i = \frac{m_i \omega^2 R_i^2}{2} \qquad (5.4)$$

Просуммируем энергии точечных элементов и получим кинетическую энергию всего вращающегося тела:

$$W=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i\omega^2R_i^2}{2}=\frac{\omega^2}{2}\sum_{i=1}^{n}m_iR_i^2=\frac{j\omega^2}{2} \qquad (5.5)$$

Работа силы, вращающей тело выражается обычной формулой

$$dA=\vec{F}\mathrm{d}\vec{r}$$

Приращение радиус-вектора - $\mathrm{d}\vec{r}$ выражается через приращение угла поворота радиус-вектора - φ

$$d\vec{r}=d\vec{\varphi}\ \times\vec{r}=-\vec{r}\times d\vec{\varphi}d\vec{\varphi}$$

Подставив это в формулу для элементарной работы, получим

$$dA=-\vec{F}\cdot(\vec{r}\times d\vec{\varphi})=-(\vec{F}\times\vec{r})\cdot d\vec{\varphi}$$

Однако $-\left(\vec{F}\times\vec{r}\right)=\overrightarrow{\mathrm{M}}$ - момент силы, действующей на тело. Тогда

$$dA=\overrightarrow{\mathrm{M}}\cdot d\vec{\varphi} \qquad (5.6)$$

Мы видим, что формулы динамики поступательного и вращательного движения по форме похожи друг на друга. Для наглядности запишем эти формулы в общую таблицу

Поступательное движение	**Вращательное движение**
Масса m [кг]	Момент инерции mR^2 [кгм^2]
Второй закон Ньютона	
Кинетическая энергия	

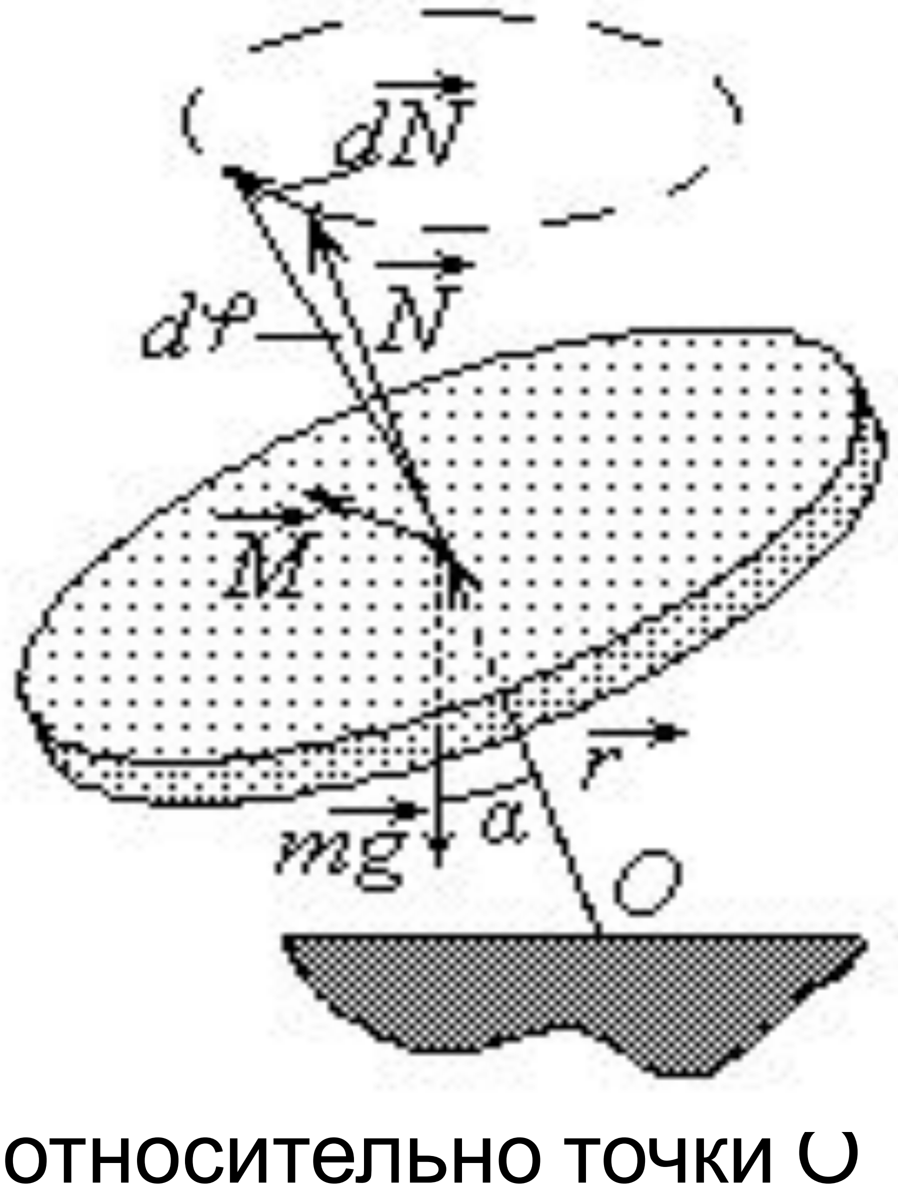
Некоторые устройства и эффекты, связанные с вращением твердого тела.

Маховик - часто применяемое устройство для придания плавности вращению в случае быстрых изменений вращающего момента. Согласно (5.3) угловое ускорение

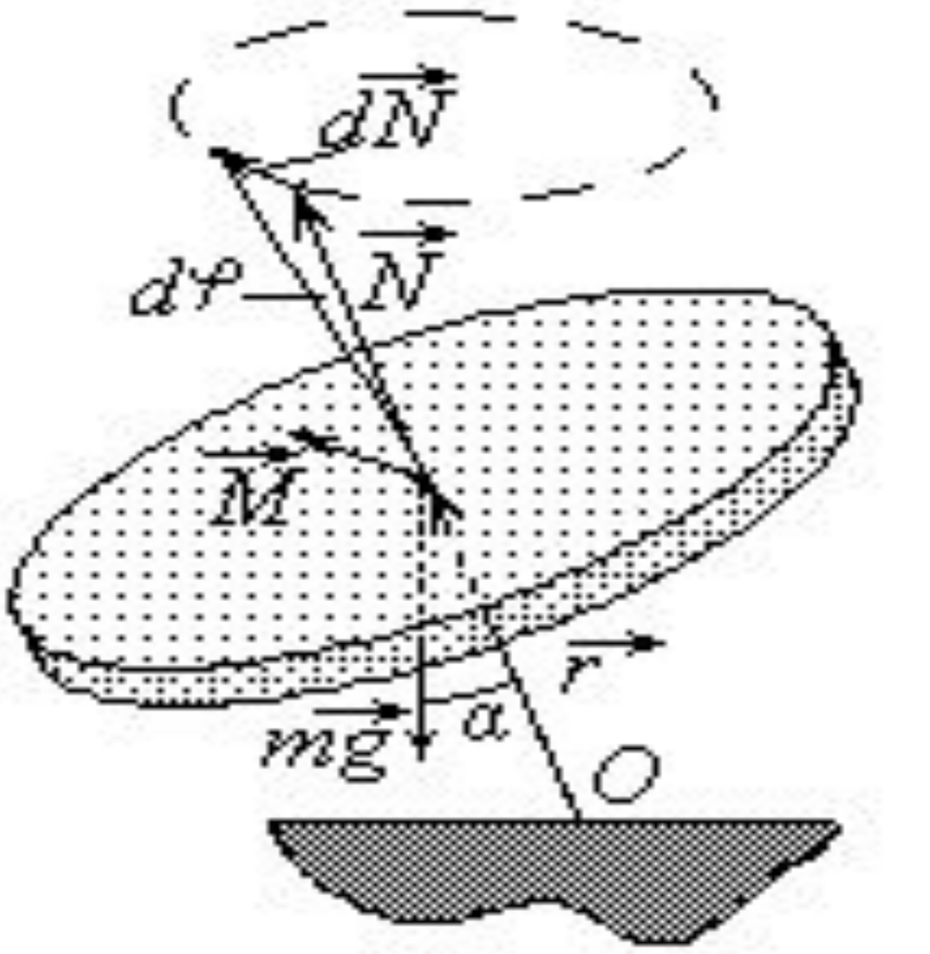
$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{\vec{M}}{j}$$

Обратно пропорционально моменту инерции. Выбирая момент инерции достаточно большим можно добиться малых величин углового ускорения и, следовательно, малых изменений угловой скорости при быстрых изменениях вращающего момента.

Волчок (юла) всем известная игрушка, которая будучи раскрученной вокруг своей оси не падает при постановке ее на пол в неустойчивое равновесие, а пытается сохранить вертикальное положение оси вращения, которая при этом описывает коническую поверхность. На рисунке показаны силы, действующие на волчок, а также векторы момента этих сил и момента импульса. В качестве начала координат возьмем точку опоры – О. . Центр масс волчка находится в центре массивного диска. Поскольку ось вращения наклонена по отношению к вертикали, сила тяжести диска - mg создает вращающий момент относительно точки О



Вектор этого момента, будет перпендикулярен плоскости, в которой находятся векторы r и mg. Поэтому приращение вектора момента импульса будет происходить не в направлении силы mg а в направ лении, перпендикулярном плоскости r-mg. В этом же направлении будет поворачиваться вектор момента импульса и ось волчка.



При этом верхний конец оси вращения и конец вектора момента импульса описывают окружности. Такое движение волчка называется **прецессией**.

Нетрудно вычислить угловую скорость прецессии - Ω, которая определяется как скорость поворота оси вращения. Поскольку вектор момента импульса лежит на оси вращения эта же скорость будет характеризовать и поворот вектора момента импульса - N. Подставим в (5.2) приращение модуля N как, dN=Ndφ, где φ - угол поворота оси волчка. В результате получим

$$N \cdot \frac{d\varphi}{dt} = M$$

где M- модуль момента силы тяжести, равный mgsin(α), N - модуль вектора момента импульса, dφ/dt=Ω - угловая скорость прецессии. В результате получим

$$\Omega = \frac{M}{N} \tag{5.7}$$

Чем больше момент импульса вращающегося волчка, тем меньше скорость его прецессии. Уменьшая момент внешних сил – М, вызывающих прецессию, и увеличивая момент инерции, можно получить достаточно малую скорость прецессии. Этот принцип лежит в основе следующего устройства, широко используемого в различных устройствах.

Гироскоп - это тщательно изготовленный цилиндр - ротор, ось вращения которого помещается в т.н. карданов подвес, показанный на рисунке. Центр масс ротора должен совпадать с центром подвеса. Ротор гироскопа раскручивается до большой скорости. после этого положение оси вращения ротора остается, практически,

Это обеспечивается законом сохранения момента импульса, поскольку внешний вращающий момент, действующий на ротор, очень мал. Даже если движение подвеса за счет трения в нем создаст вращающий момент, поворачивающий ось ротора, согласно (5.7), скорость и величина прецессии будут очень малыми за счет большой величины момента импульса ротора.

Земля не является инерциальной системой отсчета. Причиной этого является ее суточное вращение. Ось гироскопа, оставаясь неподвижной в ИСО, относительно земли будет изменять свое положение, делая оборот за 24 часа. Если принудительно удерживать ось в горизонтальном положении, то удерживающая сила создаст вращающий момент и вызовет прецессию гироскопа, т. е. поворот его оси в направлении параллельности с осью вращения земли. В результате ось гироскопа установится в плоскости меридиана и укажет направление на полюс земли. На этом эффекте основано действие гирокомпаса.

Статика - это раздел механики, который можно назвать противоположностью динамики. Если динамика изучает законы движения тел, то статика рассматривает задачи предотвращения движения. Зачастую важно знать, какие требуется приложить силы, чтобы удержать тело от движения или предотвратить его разрушение. На законах статики основано конструирование деталей и устройств, строительных сооружений, выдерживающих заданные нагрузки

Чтобы удержать тело в покое (в равновесии), требуется предотвратить его поступательное и вращательное движения. Для этого необходимо выполнение двух условий:

1. Векторная сумма всех приложенных к телу сил должна быть равна нулю.

2. Векторная сумма всех моментов этих сил должна быть равна нулю

$$\sum \vec{F}_i = 0 \tag{5.8}$$

$$\sum \vec{M}_i = 0$$

Простота и ясный физический смысл исходных условий равновесия тела не гарантирует легкость решения статических задач, поскольку конфигурация действующих на тело сил может быть весьма громоздкой.

Поэтому, важным этапом решения является упрощение исходной конфигурации сил, приложенных к телу. Упрощение основано на преобразовании заданной системы сил

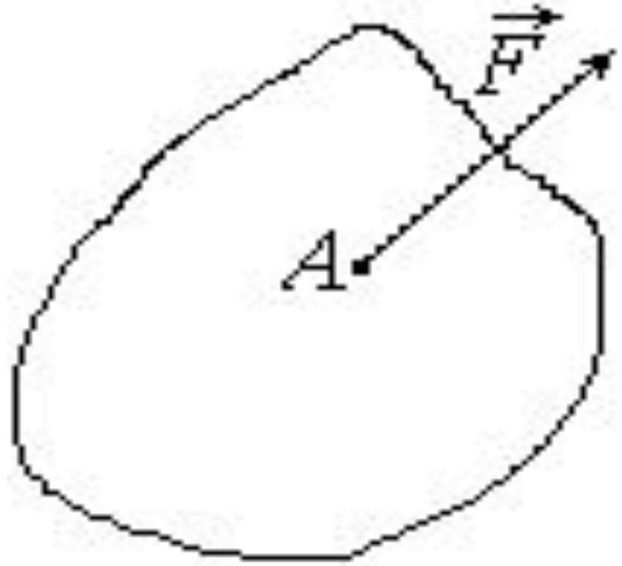
$$(F_1, F_2, ..., F_n)$$

в другую эквивалентную их систему

$$(P_1, P_2, ... , P_m),$$

которая по действию на тело не отличается от исходной. Когда система сил эквивалентна одной силе R, последняя называется равнодействующей системы сил.

В простейшем случае система сил состоит из одной силы F, которая определяется величиной (модулем), направлением, и точкой приложения. В статике вектор силы не является свободным, его нельзя переносить параллельно самому себе в произвольную точку .



Следующая по сложности система сил состоит из двух сил (F_1, F_2). Если применить к этой системе условия равновесия, то будем иметь

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = 0$$

Если первое условие выполнено, т.е $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$, то система из двух сил называется ***парой сил***.

При действии на тело пары сил условие нулевого вращающего момента выразится такой формулой

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 - \vec{r}_2 \times \vec{F}_1 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1 = 0$$

Модуль векторного произведения

$$(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1 = F_1 d \tag{5.9}$$

Величина d – расстояние между линиями действия сил называется **плечом пары сил**.

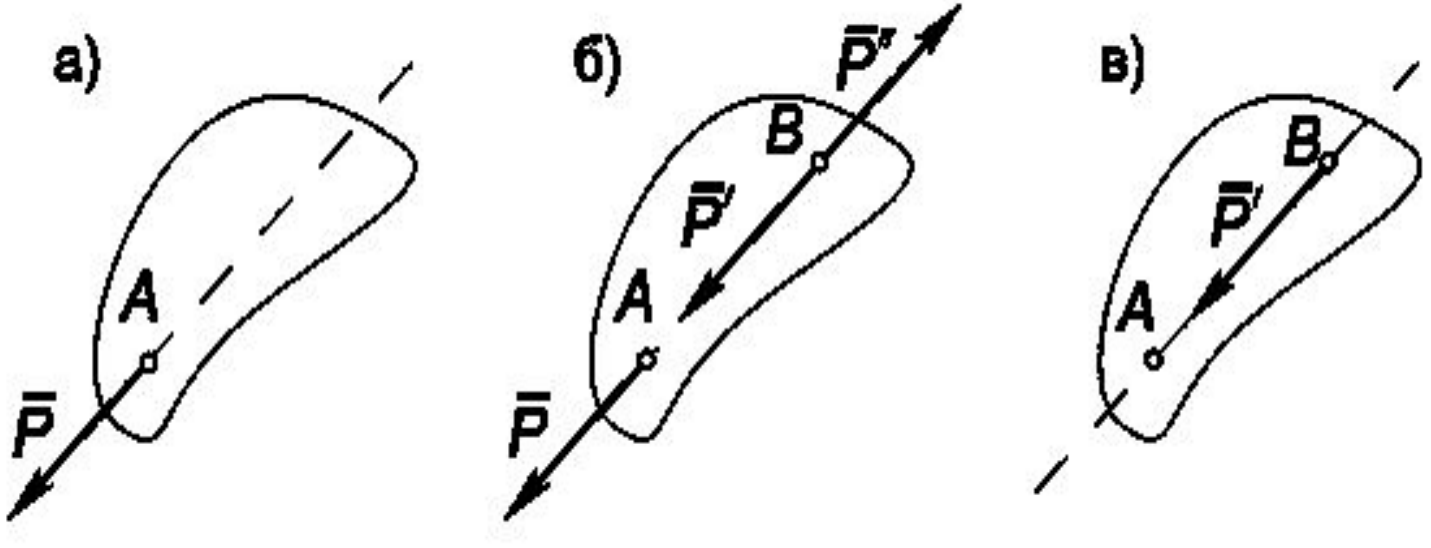
Для равенства нулю момента пары сил необходимо, чтобы плечо пары было нулевым (d=0), т.е. векторы пары сил должны находится на одной прямой. Пара сил с нулевым плечом называется **уравновешенной парой** сил.

Если на тело действует уравновешенная пара сил, то при перемещении точки приложения любой из сил по линии ее действия система равенств (5.8) не нарушатся. Это означает, что такое перемещение дает систему сил, эквивалентную исходной.

Очевидно также, ***что добавление к системе сил уравновешенной пары сил или отбрасывания ее будет давать новую систему сил, эквивалентную исходной***.

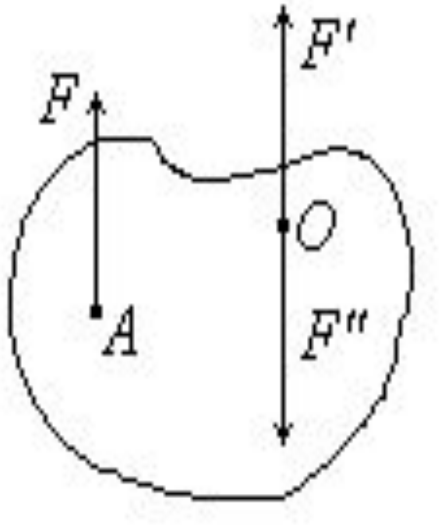
Отсюда следует, что ***точку приложения любой силы можно передвигать по линии ее действия, не нарушая при этом равновесие тела***.

Действительно, если на тело действует сила P (Рис. а), то добавив уравновешенную пару сил P' - P'' в точке B, лежащей на линии действия P мы получим эквивалентную систему сил (рис. б). Примем |P'|=|P|, тогда силы P и P'' образуют уравновешенную пару, которую можно отбросить из системы сил, без нарушения равновесия тела. В результате получим эквивалентную исходной систему сил, состоящей из одной силы P', приложенной к точке B.



Если точка приложения силы переносится не по линии ее действия, то используется следующая ***Лемма о параллельном переносе силы***: Сила, приложенная в какой-либо точке твердого тела, эквивалентна такой же силе, приложенной в любой другой точке этого тела, и паре сил, момент которой равен моменту данной силы относительно новой точки приложения. Для доказательства рассмотрим тело, к которому в точке А приложена сила F. Добавим в систему уравновешенную пару сил F', F'', приложенных к произвольной точке О, причем

F'=F. Полученная система трех сил эквивалентна силе F. Однако теперь мы можем рас-сматривать эту систему как неуравновешенную пару сил F-F'' и одиночную силу F'. Сила F' действует в точке О, а неуравновешенная пара создает вращающий момент, равный моменту силы F относительно точки О.

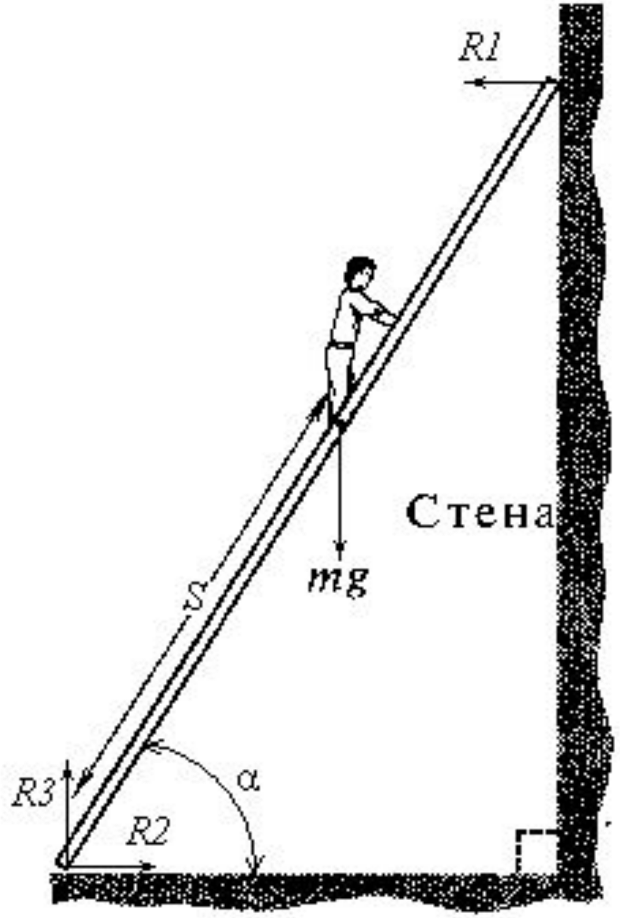


Силы реакции. Тело называется свободным, если его перемещения ничем не ограничены. Тело, перемещения которого ограничены другими телами, называется несвободным, а тела, ограничивающие перемещения данного тела, – связями. В точках контакта возникают силы взаимодействия между данным телом и связями. Силы, с которыми связи действуют на данное тело, называются реакциями связей. Как правило, направление реакции связи можно определить из характера связи. Если связью является нить или стержень, то реакция будет направлена вдоль нити или стержня. Связь в виде шарнира создает силу реакции, проходящую через центр шарнира.

Принцип освобождаемости. Всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если действие связей заменить их реакциями, приложенными к данному телу. Сделав такую замену, т. е. включив реакции в систему сил, действующих на тело, можно решать задачу об условии равновесия тела. Пример

На рисунке 5 показана лестница длиной l, опирающаяся на пол и стену. Коэффициент трения о пол равен 0.4, трением о стену пренебрегаем. Задан также угол α, под которым установлена лестница. Требуется определить на какую высоту S может подняться человек, прежде чем лестница проскользнет в нижней точке и упадет.

Дано: l, μ, α,



Решение. Предположим, что человек находится на критической высоте – S, при которой сила трения достигла максимально возможной величины. Освободим лестницу, заменив связи ее с полом и стеной реакциями R1, R2, R3. Реакция R2 - это сила трения, модуль которой выражается через коэффициент трения - μ формулой сухого трения R2=R3*μ.

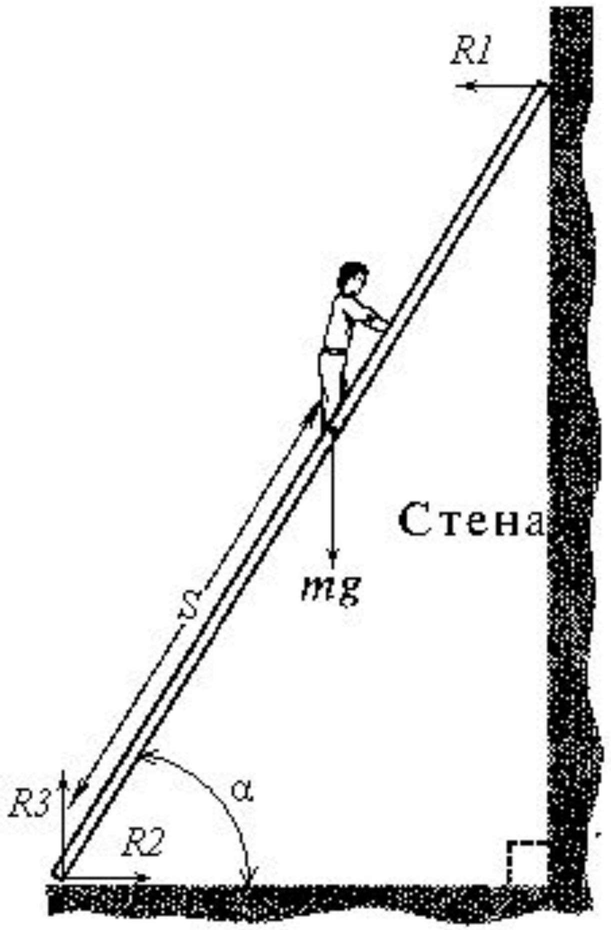
Составим первое уравнения равновесия:

$$\vec{R}_1 + m\vec{g} + \vec{R}_2 + \vec{R}_3 = 0$$

Проецируя его на горизонтальную и вертикальную оси, получим скалярные соотношения: R2-R1=0; R3-mg=0. Из этих равенств следует, что силы R1 и R2 образуют пару сил. Аналогично, R3 и mg образуют вторую пару сил.

Второе условие равновесия запишется в виде равенства нулю суммы моментов двух неуравновешенных пар сил.

$$\vec{M}_{R2-R1} + \vec{M}R3_{M3-mg} = 0$$



Плечо пары R2-R1 - это проекция лестницы на стену: *a=l*sin(α).* Плечо пары mg-R3 - проекция длины S на пол *b=S*cos(α).* В результате формула равенства моментов будет иметь следующий вид:

$$R_2 l * sin(\alpha)\ - mgScos(\alpha) = 0$$

Подставив R2=R3*μ=mg*μ, получим окончательное уравнение равновесия

$$mg * \mu * l * sin(\alpha) = mg * S * cos(\alpha)$$

из которого определится критическая высота S.

$S_{кр}=\mu * l * tg(\alpha)$

Пятиминутка: Шар массой 10 кг и радиусом 20 см подвешен у стены на нити, длиной 1м. Нить также закреплена одним концом на стене. Определить силу давления шара на стену и силу натяжения нити.