



ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения»



Учебный военный центр
Кафедра метрологии
ВУС 670200 «Метрологическое
обеспечение
вооружения и военной техники»



Средства измерений военного назначения и их поверка

Раздел 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О МЕТРОЛОГИЧЕСКОМ ОБСЛУЖИВАНИИ ВВТ ВВС

Тема № 2. ОСНОВНЫЕ МЕТРОЛОГИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

Групповое занятие № 4

«Систематические и случайные погрешности измерений»

Вопросы:

- 1. Систематические погрешности измерений**
- 2. Случайные погрешности измерений**
- 3. Выявление и исключение грубых погрешностей**
- 4. Суммирование погрешностей**

1. ORGANIZATIONAL DESIGN
FOR THE 21ST CENTURY
BRUNNEN

Систематическая погрешность – это составляющая погрешности измерения, остающаяся постоянной или закономерно изменяющаяся при повторных измерениях одной и той же величины.

Причинами появления систематической погрешности могут являться неисправности СИ, несовершенство метода измерений, неправильная установка измерительных приборов, отступление от нормальных условий их работы, особенности самого оператора.

Систематические погрешности в принципе могут быть выявлены и устранены. Для этого требуется проведение тщательного анализа возможных источников погрешностей в каждом конкретном случае.

Случайная погрешность – это составляющая погрешности измерения, изменяющаяся случайным образом при повторных измерениях одной и той же величины.

Наличие случайных погрешностей выявляется при проведении ряда измерений постоянной физической величины, когда оказывается, что результаты измерений не совпадают друг с другом. Часто случайные погрешности возникают из-за одновременного действия многих независимых причин, каждая из которых в отдельности слабо влияет на результат измерения.

Систематические погрешности можно классифицировать:

1) по характеру проявления:

постоянные и переменные.

Переменные делят на:

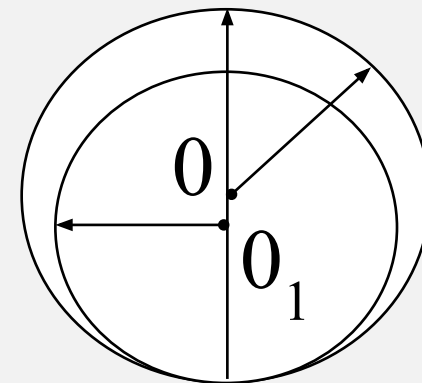
прогрессирующие, периодические и изменяющиеся по сложному закону.

2) по причинам, обуславливающим их появление:

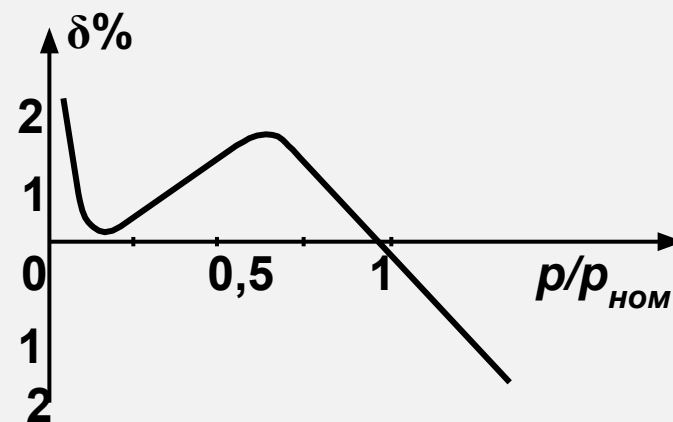
- инструментальные погрешности,*
- погрешности метода,*
- погрешности обусловленные внешними влияющими величинами и*
- субъективные погрешности.*

Прогрессирующие погрешности монотонно изменяются с течением времени (*например, разряд батареи, износ трущихся частей*).

Периодическая погрешность изменяется периодически при изменении измеряемой величины (*например, погрешность отсчета времени в механических часах при наличии эксцентриситета оси вращения стрелки*)



Погрешности, изменяющейся **по сложному закону** (*например, погрешность в зависимости от мощности потребляемой нагрузкой*)



***Инструментальная погрешность* зависит от систематических погрешностей применяемых СИ**

- люфт в подвижных частях СИ, неравномерное трение в опорах вращающихся частей их эксцентричное расположение;
- неточность градуировки СИ;
- старение (износ) деталей СИ, а также нарушение их регулировки, например, износ подшипников и увеличение люфта у приборов с механическими элементами в системе настройки;
 - изменение параметров ламп, полупроводниковых приборов;
 - изменение величин резисторов, конденсаторов и катушек индуктивности, входящих в систему прибора и др.

Среди инструментальных погрешностей можно выделить **погрешность установки**

Погрешность установки – составляющая систематической погрешности, зависящая:

- от неправильной механической установки (некоторые стрелочные приборы необходимо устанавливать строго вертикально или горизонтально по уровню);
- от неудачного взаимного расположения приборов, когда они оказывают сильное влияние друг на друга из-за электромагнитного излучения или паразитных связей;
- от неточной установки нуля, параллакса при отсчете по шкале прибора, несогласованности входных параметров электрических цепей приборов и ряда других причин

*Инструментальная погрешность в основном определяет **основную** погрешность СИ.*

Случайную составляющую погрешности указывают в случае, когда она больше 10% от систематической.

Погрешность метода измерений – составляющая систематической погрешности измерения, происходящая от несовершенства самого метода измерений.

Эта погрешность является следствием:

- тех или иных допущений или упрощений;
- применения эмпирических формул и функциональных зависимостей вместо точных;
- неполного знания всех свойств наблюдаемых явлений, а также влияния паразитных связей и т.п.

Субъективные погрешности являются следствием индивидуальных свойств наблюдателя (Например, погрешность от параллакса).

*Во многих случаях систематическую погрешность в целом можно представить как сумму двух составляющих **аддитивной** и **мультипликативной**.*

Способы обнаружения систематических погрешностей

Проведение многократных наблюдений

Измерение другими средствами измерений

Измерение различными операторами

Изменение условий измерения

Изменение климатических условий

Перемещение в пространстве

Отключение источников помех

Замена соединительных проводников

Изменение параметров питающей сети

Уменьшение систематических погрешностей

До начала измерений

Поверка средств измерений

Использование штатных проводников

Прогрев, уст. нулей и калибровка

Правильное размещ., экранирование

В процессе измерений

Использование метода замещения

Компенсация погрешности по знаку

Рандомизация

После измерений

Введение поправок

Введение поправочного множителя

Систематические погрешности косвенных измерений

Если измеряемая величина Y определяется выражением:

$$Y = \phi (A_1, A_2, \dots, A_m)$$

то измеряемая величина Y получит приращение Δ_{sy} , т.е:

$$Y + \Delta_{sy} = \phi (A_1 + \Delta_{sA_1}, A_2 + \Delta_{sA_2}, \dots, A_m + \Delta_{sA_m})$$

Разложив правую часть данного выражения в ряд Тейлора и удержав производные первого порядка, получим :

$$Y + \Delta_{sy} = \phi (A_1, A_2, \dots, A_m) + (\partial\phi / \partial A_1) \Delta_{sA_1} + (\partial\phi / \partial A_2) \Delta_{sA_2} + (\partial\phi / \partial A_m) \Delta_{sA_m}$$

Тогда получим погрешность:

$$\Delta_{sy} = \sum_{k=1}^m (\partial\phi / \partial A_k) \Delta_{sA_k}$$

Граница неисключенной систематической погрешности результата косвенного измерения вычисляется по формуле:

$$\Delta_{sy} = \sum_{k=1}^m \left| \left(\frac{\partial \varphi}{\partial A_k} \right) \Delta_{sA_k} \right|$$

Этот способ дает сильно завышенную оценку.

Поэтому :

$$\Delta = \sqrt{\sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial \varphi}{\partial A_k} \right)^2 \Delta_{sA_k}^2} / 3 .$$

Границы погрешности при дов. вероятности $P_\delta=0,95$:

$$\Delta_{sy} = 1,96 \sqrt{\sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial \varphi}{\partial A_k} \right)^2 \Delta_{sA_k}^2} / 3 \approx 1,1 \sqrt{\sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial \varphi}{\partial A_k} \right)^2 \Delta_{sA_k}^2} ;$$

При $P_\delta=0,99$:

$$\Delta_{sy} = 2,42 \sqrt{\sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial \varphi}{\partial A_k} \right)^2 \Delta_{sA_k}^2} / 3 \approx 1,4 \sqrt{\sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial \varphi}{\partial A_k} \right)^2 \Delta_{sA_k}^2} ;$$

Или общая запись:

$$\Delta = k \sqrt{\sum_i \Delta_{s_i}^2}$$

2. Структурные потребности и изменения

Причины, вызывающие **случайные** погрешности

- **трение или люфт в узлах измерительного механизма,**
- **попадание частичек пыли или влаги в механизм,**
- **пульсации напряжения источников питания,**
- **изменение сопротивления электрических контактов,**
- **вибрации,**
- **внешние поля,**
- **колебания температуры или влажности окружающей среды,**
- **незначительные изменения самой измеряемой величины и т.д.**

Для оценки случайной погрешности применяют следующие показатели точности (ГОСТ 8.011-72):

- числовые характеристики случайной составляющей погрешности измерения;***
- функцию распределения (плотность вероятности) случайной составляющей погрешности измерения;***
- интервал, в котором погрешность измерения находится с заданной вероятностью***

Числовые характеристики случайной погрешности получают на основе принципа максимального правдоподобия

Принцип максимального правдоподобия

Пусть результаты x_i наблюдений измеряемой величины подчинены закону распределения:

$$p(x_i; X_{cp}; \sigma),$$

где X_{cp} – математическое ожидание, σ – СКО.

Вероятность появления результата измерений:

$$P_i(x_i) = p(x_i; X_{cp}; \sigma) \Delta_x,$$

где Δ_x – малый интервал.

Вероятность появления совокупности независимых результатов x_1, x_2, \dots, x_n определяется как произведение вероятностей:

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n P_i(x_i) = \Delta_x^n \prod_{i=1}^n p(x_i; X_{cp}; \sigma).$$

Параметры X_{cp} и σ до измерений неизвестны, поэтому их можно рассматривать как переменные.

Метод максимального правдоподобия заключается в подборе таких значений X_{cp} и σ , при которых вероятность появления результатов измерений максимальна. Полученные таким образом оценки называют оценками максимального правдоподобия. Их отыскивают по максимуму функции правдоподобия - L .

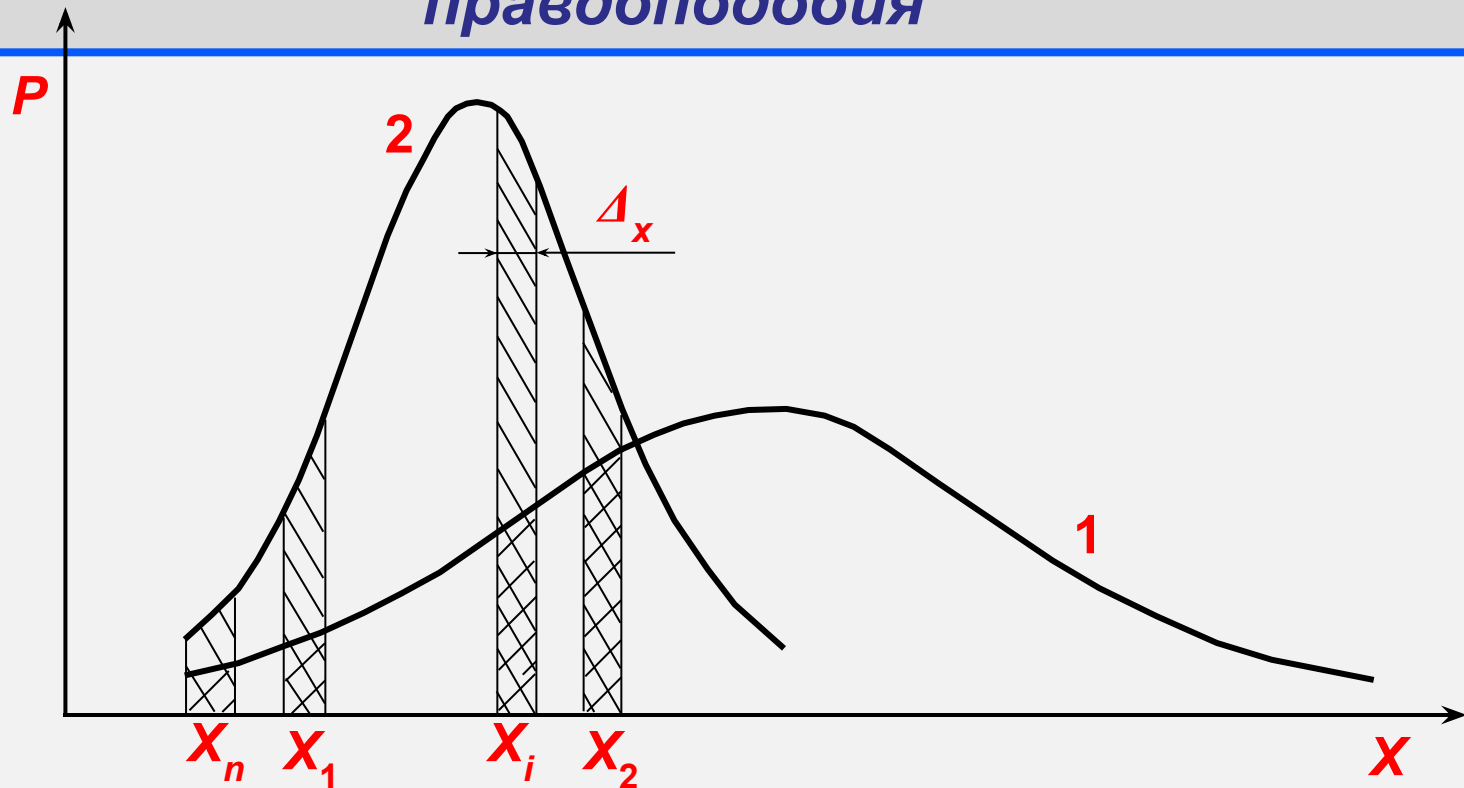
Функция правдоподобия:

$$L(x_1, x_2, \dots, x; X_{cp}; \sigma) = \prod_{i=1}^n p(x_i; X_{cp}; \sigma)$$

Функция правдоподобия L называется оценкой максимального правдоподобия параметра x_i .

Функция правдоподобия L отличается от вероятности $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ множителем Δ_x^n , не влияющим на решение.

Пример, поясняющий метод максимального правдоподобия



Если выбранное X_{cp} сильно сдвинуто от центра области, в которой расположены экспериментальные точки (кривая **1**), то вероятности $p_i(x_i)$ будут малы. Очевидно, что в данном случае вероятность $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ также мала.

Если уменьшить математическое ожидание X_{cp} и дисперсию σ (кривая **2**), то вероятности $p_i(x_i)$ возрастут и соответственно увеличится функция правдоподобия $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Оценки максимального правдоподобия зависят от закона распределения погрешностей

Для нормального закона:

функция правдоподобия:

$$p(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp - \frac{(x_i - X_{cp})^2}{2\sigma^2}$$

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; X_{cp}; \sigma) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \right)^n \exp - \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - X_{cp})^2}{2\sigma^2} .$$

Удобнее пользоваться **логарифмической функцией правдоподобия**:

$$\ln L(x_1, x_2, \dots, x_n; X; \sigma) = -\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - X)^2}{2\sigma^2} - n \ln \sigma - \frac{n}{2} \ln 2\pi .$$

В данном случае функция правдоподобия дифференцируема, а ее производные непрерывны в точках x_i . Поэтому оценки максимального правдоподобия находят, решая систему уравнений:

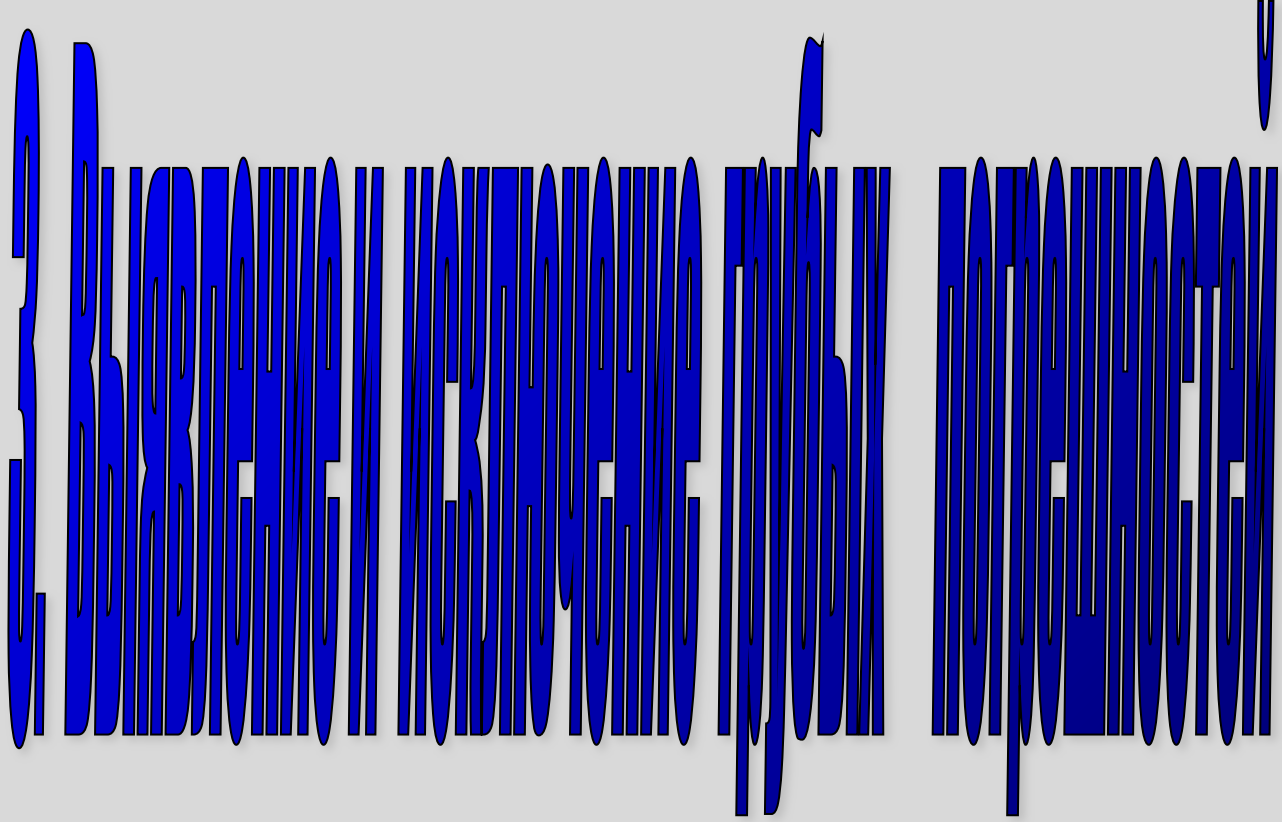
$$\left(\frac{\partial L}{\partial X} \right)_{\substack{X=X_{cp} \\ \sigma=\sigma_{cp}}} = \frac{1}{\sigma_{cp}^2} \sum_{i=1}^n (x_i - X_{cp})^2 = 0 ,$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \sigma} \right)_{\substack{X=X_{cp} \\ \sigma=\sigma_{cp}}} = \frac{1}{\sigma_{cp}^2} \sum_{i=1}^n (x_i - X_{cp})^2 - \frac{n}{\sigma_{cp}} = 0 .$$

В результате получим оценки максимального правдоподобия X_{cp} и σ_{cp} :

$$X_{cp} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i ,$$

$$\sigma_{cp} = \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - X_{cp})^2} .$$



Грубой погрешностью называют погрешность измерения, существенно превышающую ожидаемую при данных условиях.

Для максимального (по модулю) случайного отклонения $v_{\max} = |x_i - X_{cp}|_{\max}$, вычисляют отношение:

$$v_i = \frac{|x_i - X_{cp}|}{\sigma_{X_{cp}}},$$

Если $v_i \geq v_{\text{доп}}$, то результат x_i содержит грубую погрешность и должен быть исключен из ряда результатов наблюдений.

Значение $v_{\text{доп}}$ берут из таблицы распределения Смирнова.

4. СЛУЖБЕНИ ПРОБАНЕ ПОПРЕЧНОСТИ

Перед суммированием все погрешности делятся на следующие группы:

- *систематические и случайные*;
- в группе случайных - коррелированные и некоррелированные;
- *аддитивные и мультипликативные*;
- *основные и дополнительные*.

Такое деление необходимо потому, что систематические и случайные погрешности, а также коррелированные и некоррелированные суммируются по-разному, а аддитивные погрешности нельзя складывать с мультипликативными.

Если некоторые погрешности указаны в виде доверительных интервалов, то перед суммированием их нужно представить в виде среднеквадратических отклонений.

Дополнительные погрешности могут складываться с основными либо перед суммированием погрешностей, либо на заключительном этапе.

При последовательном соединении нескольких СИ погрешности, проходя через измерительный канал с передаточной функцией $f(x)$ могут усиливаться или ослабляться. Для учета этого эффекта используют коэффициенты влияния, которые определяются как $df(x)/dx=k$. Все погрешности перед суммированием приводят к выходу (или входу) измерительного канала путем умножения (деления) на коэффициент влияния.

При суммировании погрешностей применяются три основных способа: **арифметический (алгебраический), геометрический, моментов**

1) При арифметическом суммировании (завышает значение погрешности)

$$\sigma_{\Sigma} = \sum_{k=1}^m |\sigma_k|, \quad k - \text{номер погрешности, } m - \text{их количество}$$

2) При геометрическом суммировании

(занижает значение погрешности)

$$\sigma_{\Sigma} = \sqrt{\sum_{k=1}^m \sigma_k^2}$$

МИ 2232-2000 предусматривает промежуточный вариант между формулами геометрического и алгебраического суммирования:

$$\sigma_{\Sigma} = k \sqrt{\sum_{k=1}^m \sigma_k^2}$$

3) Способ моментов - вычисляется по одной из формул для оценки погрешности косвенного измерения

Суммирование систематической и случайной составляющих погрешности производится при определении границ погрешности результата измерения.

Установлено **три способа** определения границ погрешности результата измерения:

1. Если отношение суммарной не исключенной систематической погрешности к оценке среднего квадратического отклонения результата измерения меньше **0,8**, то есть:

$$\frac{\Delta_{S\Sigma}}{\sigma_{\text{ср}}} < 0,8 \quad , \quad \text{тогда:} \quad \Delta_{\Sigma} = t_S \sigma_x \quad ,$$

где t_s - коэффициент Стьюдента

2. Если отношение суммарной не исключенной систематической погрешности к оценке среднего квадратического отклонения результата измерения больше **8**, то есть:

$$\frac{\Delta_{S\Sigma}}{\sigma_{cp}} > 8, \quad \text{тогда:} \quad \Delta_{\Sigma} = \Delta_{S\Sigma} .$$

3. Если отношение попадает в интервал :

$$0,8 < \frac{\Delta_{S\Sigma}}{\sigma_{cp}} < 8, \quad \text{тогда:} \quad \Delta_{\Sigma} = K_{\Sigma} \sigma_{\Sigma} ,$$

где K_{Σ} – коэффициент, зависящий от соотношения случайной и неисклученной систематической погрешностей;

δ_{Σ} – оценка суммарного среднего квадратического отклонения результата измерения

Коэффициент K_{Σ} вычисляют по эмпирической формуле:

$$K_{\Sigma} = \frac{\Delta_{\text{cp_сл}} + \Delta_{S\Sigma}}{\sigma_{\text{cp}} + \sqrt{\sum_{k=1}^m \frac{\Delta_{\text{sk}}^2}{3}}}.$$

3. Оценку суммарного среднего квадратического отклонения результата измерения вычисляют по формуле:

$$\sigma_{\Sigma} = \sqrt{\sigma_{\text{cp}}^2 + \sum_{k=1}^m \frac{\Delta_{\text{Sk}}^2}{3}}.$$

END