Лекция 3.6. ***Знакопеременные ряды.***

<u>*Определение:*</u>

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется абсолютно сходящимся,

если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

<u>*Определение:*</u>

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится,

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется условно сходящимся.

Теорема:

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Определение:

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Обозначим через

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ новый ряд, такой, что $a_n^+ = a_n$, если $a_n > 0$

и $a_n^+ = 0$, если $a_n \leq 0$. Также обозначим через

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ такой ряд, что $a_n^- = a_n$, если $a_n < 0$ и

$a_n^- = 0$, если $a_n \geq 0$.

<u>Теорема:</u>

Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ сходятся.

Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ расходятся.

<u>Определение:</u>

Будем называть биекцию $\sigma: N \to N$ перестановкой N.

<u>Теорема:</u>

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно,

то $\forall\sigma$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ тоже сходится абсолютно, и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$.

Определение:

Ряд – знакочередующийся, если все члены ряда с чётными номерам имеют одинаковый знак, и все члены с нечётными номерами имеют одинаковый знак (причём противоположный знаку членов с чётными номерами).

Теорема (признак Лейбница):

Рассмотрим $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$,

где $a_n > 0$ (или $a_n < 0$). Пусть a_n монотонна и $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Тогда $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ сходится, и $\left|\sum_{n=m}^{\infty}(-1)^n a_n\right| \le |a_m|$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$$

__Замечание:__

Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ \to +\infty$, а $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- \to -\infty$.

__Теорема (Римана):__

Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно, то $\forall a \in R$ $\exists \sigma$ такая, что $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = a$. Также $\exists \sigma$ такие, что $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} \to +\infty, -\infty, \infty$ и такая, что $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ расходится, но его частичные суммы ограничены.

__Теорема (признаки Абеля и Дирихле):__

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

Признак Абеля:

если $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, и a_n – монотонна и ограничена, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

Признак Дирихле:

если $\exists M > 0$ такое, что $\forall N$

$$\left|\sum_{n=1}^{N} b_n\right| < M, a_n - \text{монотонна и } \lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

$$B_n = \sum_{l=k}^{n} b_l\,, \qquad B_{k-1} \equiv 0.$$

$$\sum_{n=k}^{m} a_n b_n = a_m B_m + \sum_{n=k}^{m-1} (a_n - a_{n+1}) B_n$$

преобразования Абеля для конечной суммы