КОСМИЧЕСКИЕ АППАРАТЫ И РАКЕТЫ-НОСИТЕЛИ

Основы теории движения космических аппаратов

Роман Викторович Ельников

Москва, 2015

План лекции

1. *Что изучает механика космического полета?*
2. *Задачи теории движения КА.*
3. *Описание относительного движения в задаче двух тел. Ограниченная задача двух тел.*
4. *Постановка задачи нахождения траектории ИСЗ в рамках ограниченной задачи двух тел.*
5. *Первые интегралы уравнений движения задачи двух тел.*
6. *Уравнение орбиты спутника.*
7. *Типы орбит.*
8. *Геометрия эллиптической орбиты.*
9. *Анализ изменения скорости спутника при его движении по орбите.*
10. *Скорость КА на круговой орбите.*
11. *Временные характеристики движения КА по орбите.*
12. *Геоцентрическая экваториальная система координат.*
13. *Элементы орбиты спутника.*
14. *Трасса искусственного спутника Земли.*

План лекции

15. Геостационарная орбита
16. Прецессия орбиты ИСЗ, вызываемая нецентральностью гравитационного поля Земли
17. «Молниевская» орбита
18. Солнечно-синхронная орбита
19. Межорбитальное маневрирование КА. Постановка задачи межорбитального перелета
20.Понятие характеристической скорости, оценка затрат топлива для маневра
21. Оценка характеристической скорости двухимпульсного перелета между круговыми компланарными орбитами (перелет Гомана-Цандера)

Основы теории движения космических аппаратов

Механика космического полета
(теория движения КА)

Механикой космического полета – называется раздел механики, изучающий движение искусственных небесных тел (космических аппаратов)

Анализ движения космического аппарата

Анализ движения центра масс КА в пространстве

$$m_{MT}\frac{d\vec{V}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i;$$

$$m_{KA}\frac{d\vec{V}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i + m_{KA}\frac{d\vec{V}_{отн}}{dt} + 2m_{KA}\left[\vec{\omega}\times\vec{V}\right]; \ (1)$$

$$m_{KA}\frac{d\vec{V}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i; \ (1a)$$

Анализ углового движения КА (движения КА вокруг центра масс)

$$I\frac{d\vec{\omega}}{dt} + \left[\vec{\omega}\times I\vec{\omega}\right] = \sum_j \vec{M}_j; \ (2)$$

Задачи теории движения КА

1. Нахождение траектории КА по заданным его параметрам и программе движения.
2. Проектирование траектории КА. Это задача выбора программы движения, которая обеспечивает для заданного КА выполнение заданной транспортной задачи.
3. Задача оценки влияния параметров КА на его траекторию.
4. Анализ влияния возмущающих факторов на траекторию КА. Эта задача состоит в оценке погрешностей в конечных характеристиках движения, к которым приводят различные случайные факторы.

Основы теории движения космических аппаратов

Описание относительного движения в задаче двух тел

Задачей двух тел называется задача, в которой рассматривается движение двух материальных точек с массами ***M*** и ***m*** под действием их взаимного гравитационного притяжения

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1;$$

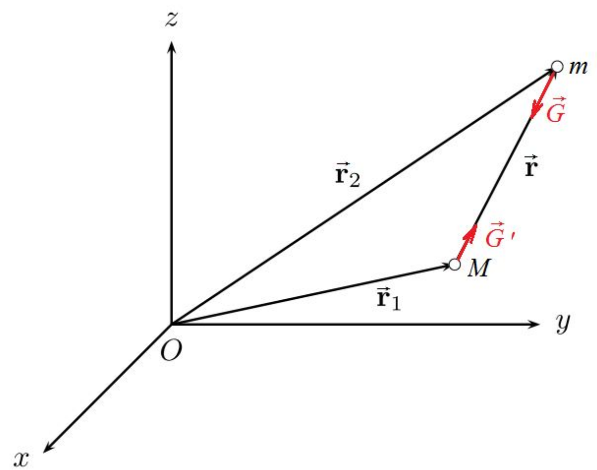
$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} - \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2};$$

$$M\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \vec{G}'; \quad m\frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \vec{G};$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{\vec{G}}{m} - \frac{\vec{G}'}{M};$$

$$\vec{G} = -f\frac{mM}{r^3}\vec{r}; \quad \vec{G}' = -\vec{G} = f\frac{mM}{r^3}\vec{r};$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -f\frac{M+m}{r^3}\vec{r};$$



Гравитационный параметр задачи двух тел:

$$\tilde{\mu} = f(M+m);$$

Уравнение относительного движения задачи двух тел:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{\tilde{\mu}}{r^3}\vec{r};$$

Ограниченная задача двух тел

Ограниченная задача двух тел – это задача двух тел при использовании допущения, что масса одного тела пренебрежимо мала по сравнению с массой другого тела.

$$M \gg m$$

$\tilde{\mu} = f\left(M + m\right)$ - гравитационный параметр задачи двух тел

$\mu = fM;$ - гравитационный параметр в ограниченной задаче двух тел

$\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\dfrac{\mu}{r^3}\vec{r};$ - уравнение относительного движения в ограниченной задаче двух тел

Движение КА в окрестности небесного тела с массой *M* может рассматриваться в рамках ограниченной задачи двух тел при наличии следующих допущений:

1. *Рассматривается пассивное движение КА.*
2. *Гравитационная сила, с которой небесное тело притягивает КА, подсчитывается как ньютоновская.*
3. *Притяжением других небесных тел Вселенной пренебрегается.*
4. *Не учитывается аэродинамическое воздействие среды на КА, не*

Постановка задачи нахождения траектории ИСЗ в рамках ограниченной задачи двух тел

Система уравнений движения ИСЗ:

$$\begin{cases} \dfrac{dV_x}{dt} = -\dfrac{\mu \cdot x}{r^3}; \\ \dfrac{dV_y}{dt} = -\dfrac{\mu \cdot y}{r^3}; \\ \dfrac{dV_z}{dt} = -\dfrac{\mu \cdot z}{r^3}; \\ \dfrac{dx}{dt} = V_x; \\ \dfrac{dy}{dt} = V_y; \\ \dfrac{dz}{dt} = V_z; \end{cases}$$

Проекции уравнения относительного движения

Кинематические связи

$$\mu = 398600.44 \frac{км^3}{c^2}$$

Гравитационный параметр Земли

Начальные условия движения ИСЗ:

$$x_0 = x(t_0); \;\; y_0 = y(t_0); \;\; z_0 = z(t_0);$$

$$Vx_0 = Vx(t_0); \;\; Vy_0 = Vy(t_0); \;\; Vz_0 = Vz(t_0);$$

Путем интегрирования системы уравнений движения можно получить траекторию движения КА, т.е получить зависимости:

$$x = x(t); \;\; y = y(t); \;\; z = z(t);$$

$$Vx = Vx(t); \;\; Vy = Vy(t); \;\; Vz = Vz(t);$$

Основы теории движения космических аппаратов

Первые интегралы уравнений движения задачи двух тел

Первый интеграл – это соотношение вида:

$$\varphi\left(x, y, z, V_x, V_y, V_z, t\right) = const;$$

Которое тождественно удовлетворяется каждым решением системы дифференциальных уравнений движения при подходящем значении постоянной в правой части.

Интеграл площадей:

$$\left[\vec{r} \times \vec{V}\right] = \vec{\sigma} = const;$$

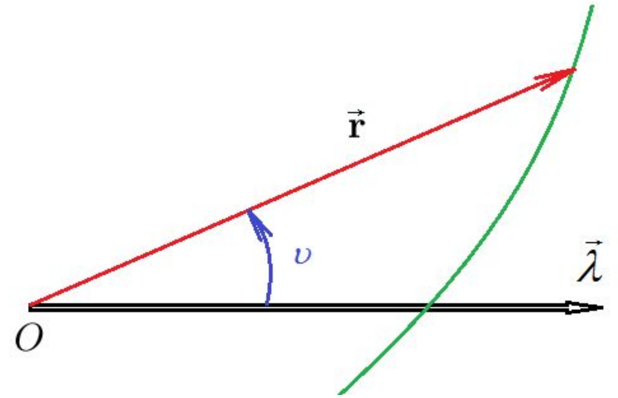
Интеграл энергии:

$$V^2 - \frac{2\mu}{r} = h = const;$$

Интеграл Лапласа:

$$\left[\vec{\sigma} \times \vec{V}\right] + \frac{\mu \vec{r}}{r} = -\vec{\lambda} = const;$$

Уравнение орбиты спутника



Уравнение орбиты спутника – это зависимость модуля радиуса-вектора КА, как функция полярного угла, подсчитанного в плоскости движения спутника. Этот угол удобно отсчитывать от вектора Лапласа. Он называется *углом истинной аномалии*.

$$r = \frac{\sigma^2}{\mu + \lambda \cos \upsilon};$$

Введем обозначения:

$p = \dfrac{\sigma^2}{\mu};$ Фокальный параметр

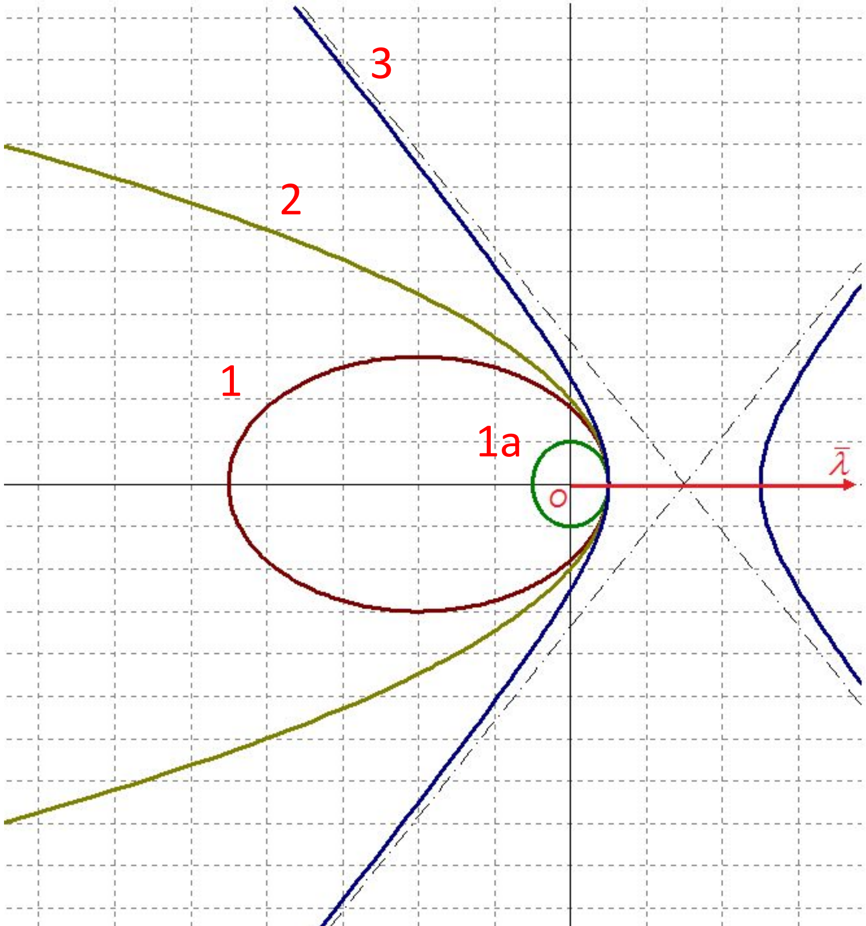
$e = \dfrac{\lambda}{\mu};$ Эксцентриситет

$$\Rightarrow \quad r = \frac{p}{1 + e \cos \upsilon};$$

Основы теории движения космических аппаратов

Типы орбит

Первый закон Кеплера: траектория спутника в задаче двух тел – есть коническое сечение в одном из фокусов которого расположен гравитационный

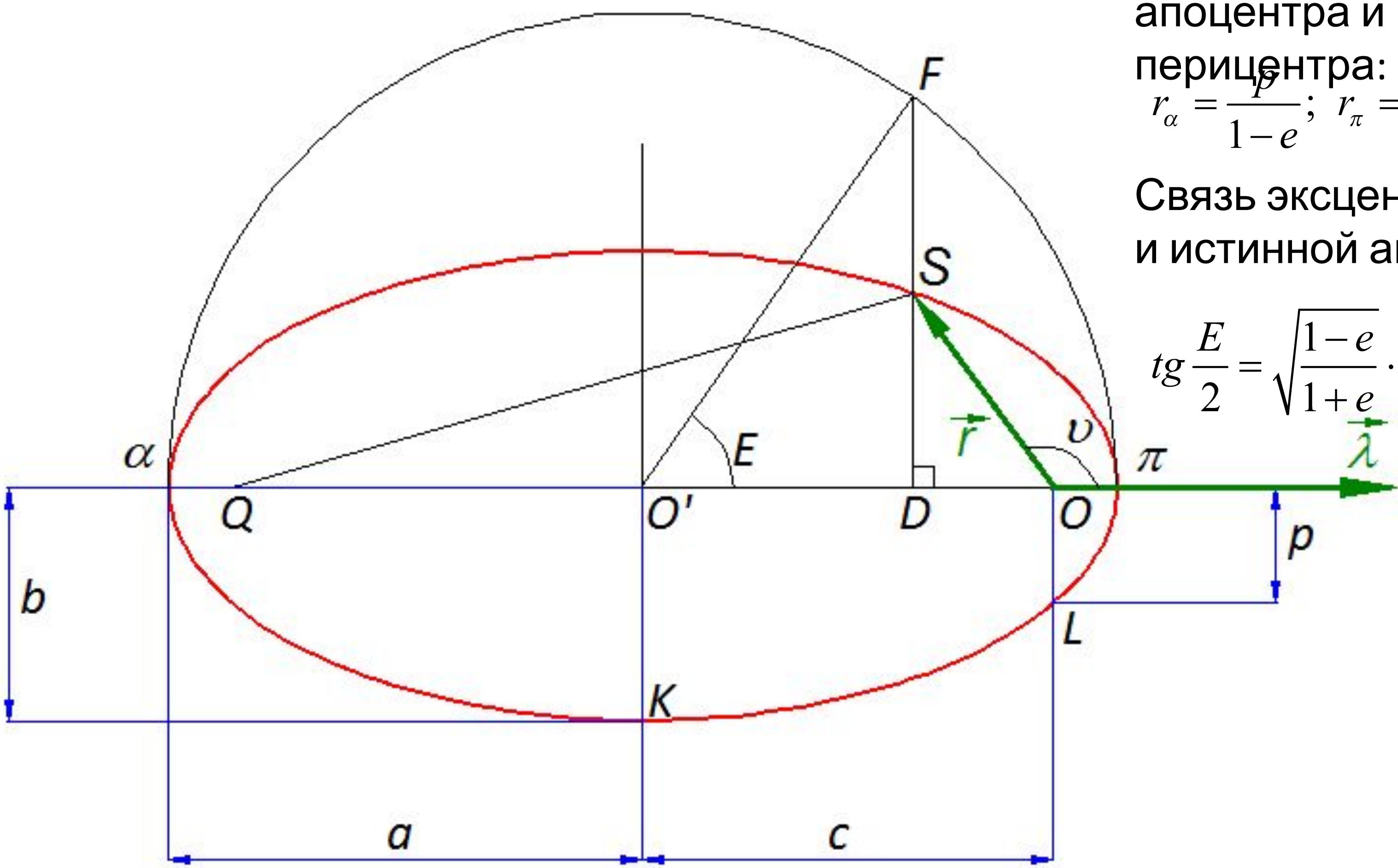


Типы орбит:

1. *Эллиптическая орбита $h<0$; $0 \le e<1$.*
   1a. Круговая орбита является частным случаем эллиптической орбиты ($e=0$).
2. *Параболическая орбита $h=0$; $e=1$.*
3. *Гиперболическая орбита $h>0$; $e>1$.*

Прямолинейное движение спутника - частный случай движения по вырожденному эллипсу, гиперболе или параболе. При этом $e=1$. Тип орбиты в этом случае можно определить только по знаку h.

Геометрия эллиптической орбиты



Радиусы апоцентра и перицентра:

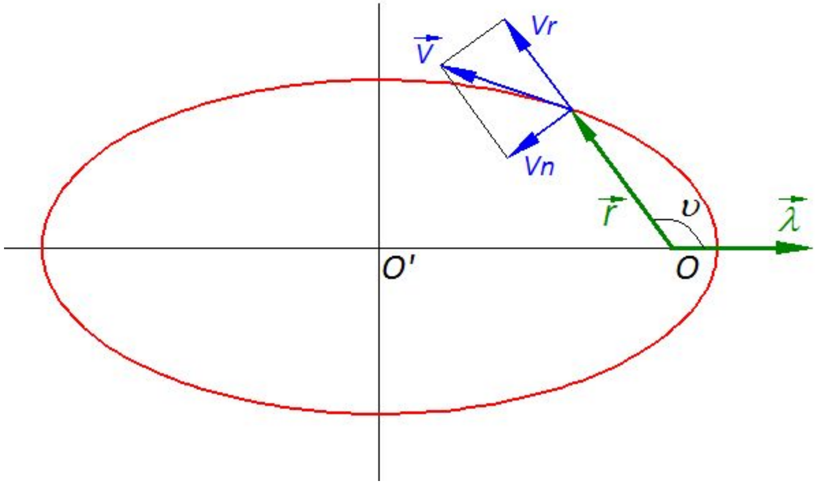
$$r_\alpha = \frac{p}{1-e}; \quad r_\pi = \frac{p}{1+e};$$

Связь эксцентрической и истинной аномалии:

$$tg\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \cdot tg\frac{\upsilon}{2}$$

Основы теории движения космических аппаратов

Анализ изменения скорости спутника при его движении по орбите



Зависимость полной скорости ИСЗ от расстояния до гравитационного центра:

$$V^2 - \frac{2\mu}{r} = h; \quad h = -\frac{\mu}{a};$$

$$Vr = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin\upsilon;$$

Закон изменения радиальной скорости спутника

$$Vn = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\left(1 + e\cos\upsilon\right);$$

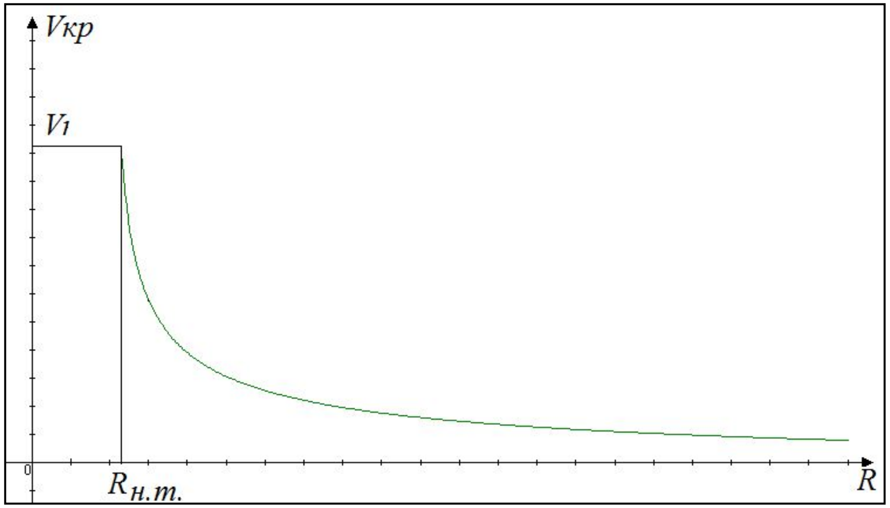
Закон изменения трансверсальной скорости спутника

Минимальная скорость спутника достигается в апоцентре, максимальная – в перицентре:

$$V_\alpha = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\left(1+e\right); \quad V_\pi = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\left(1-e\right);$$

Скорость КА на круговой орбите

$$e = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} Vr = \sqrt{\dfrac{\mu}{p}} e \sin\upsilon = 0; \\ Vn = \sqrt{\dfrac{\mu}{p}} (1 + e\cos\upsilon) = \sqrt{\dfrac{\mu}{p}}; \\ r = \dfrac{p}{1 + e\cos\upsilon} = p; \end{cases} \quad\Rightarrow\quad V_{кр} = \sqrt{\dfrac{\mu}{R_{орб}}};$$



Первая космическая скорость - круговая скорость на нулевой высоте относительно гравитирующего тела.

Основы теории движения космических аппаратов

Временные характеристики движения КА по орбите

$$E - e\sin E = n\left(t - t_{\pi}\right);$$

Уравнение Кеплера для случая движения по эллиптической орбите

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}};$$

Среднее движение

$$M = n\left(t - t_{\pi}\right);$$

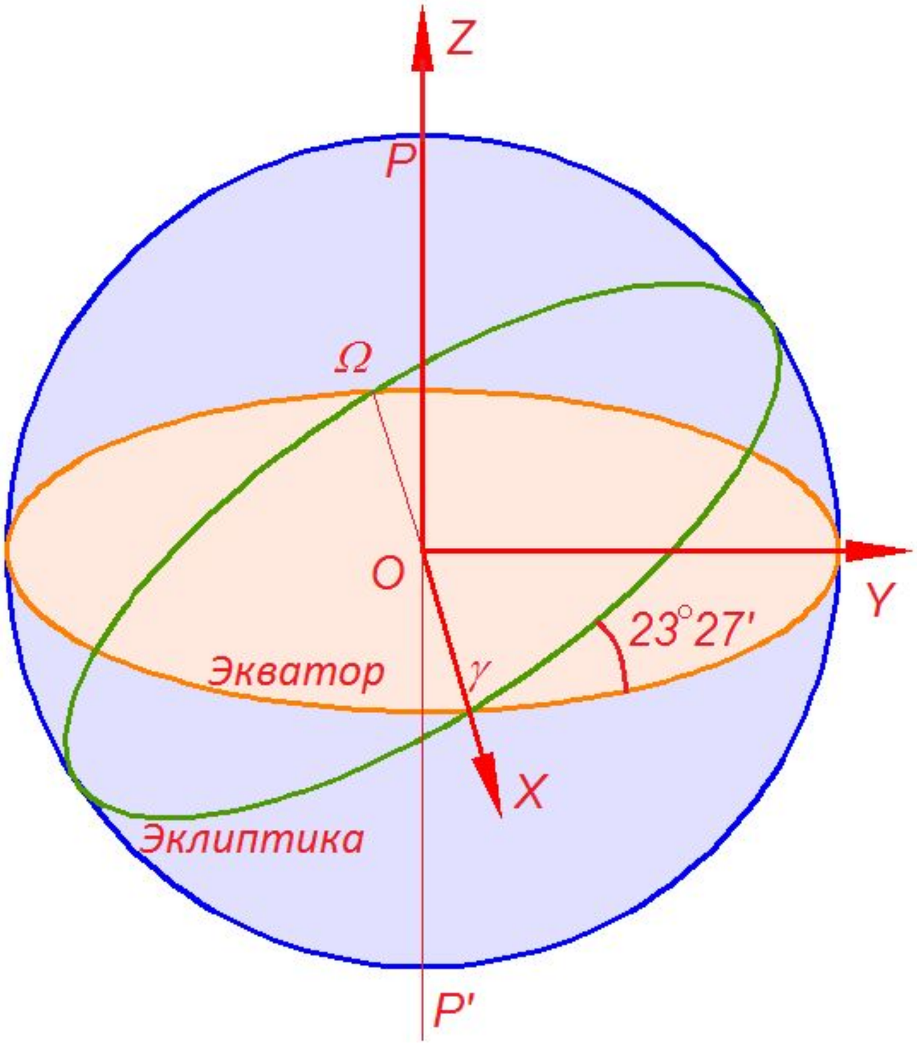
Средняя аномалия

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} a^{\frac{3}{2}};$$

Период обращения спутника по эллиптической орбите

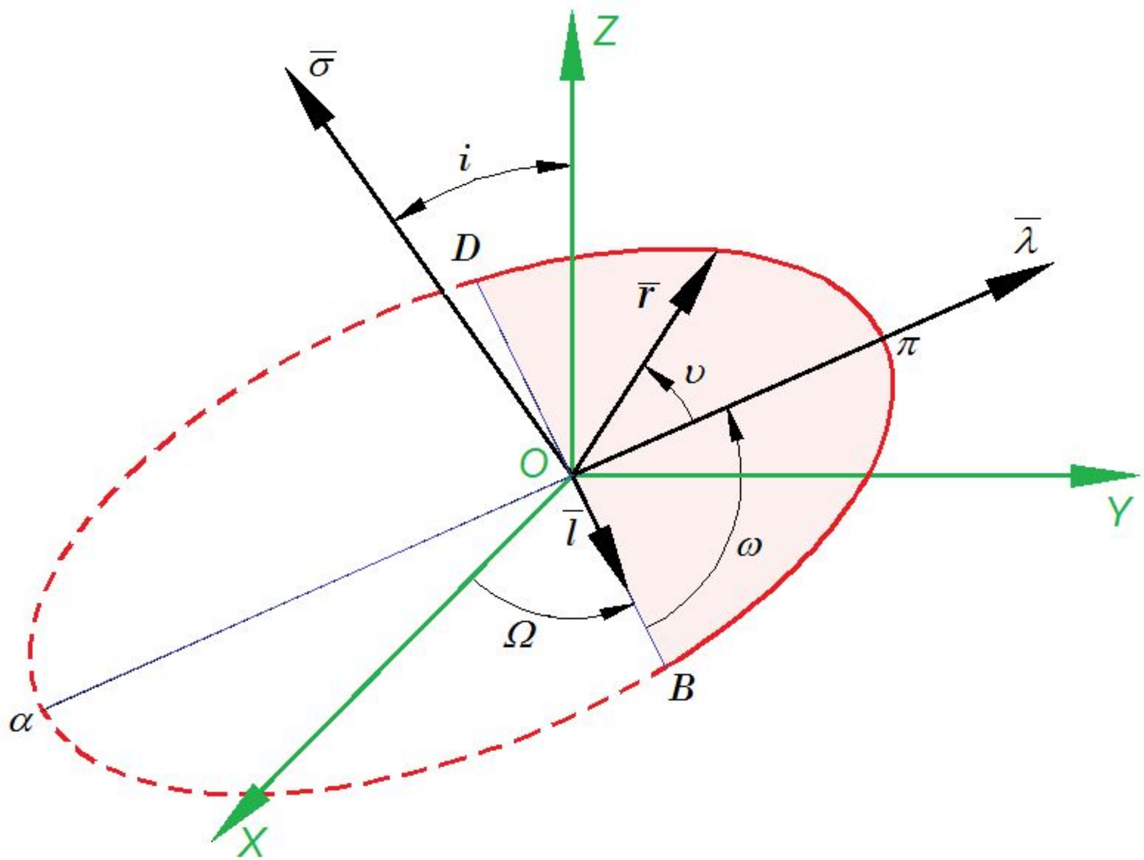
Основы теории движения космических аппаратов

<u>Геоцентрическая экваториальная система координат</u>



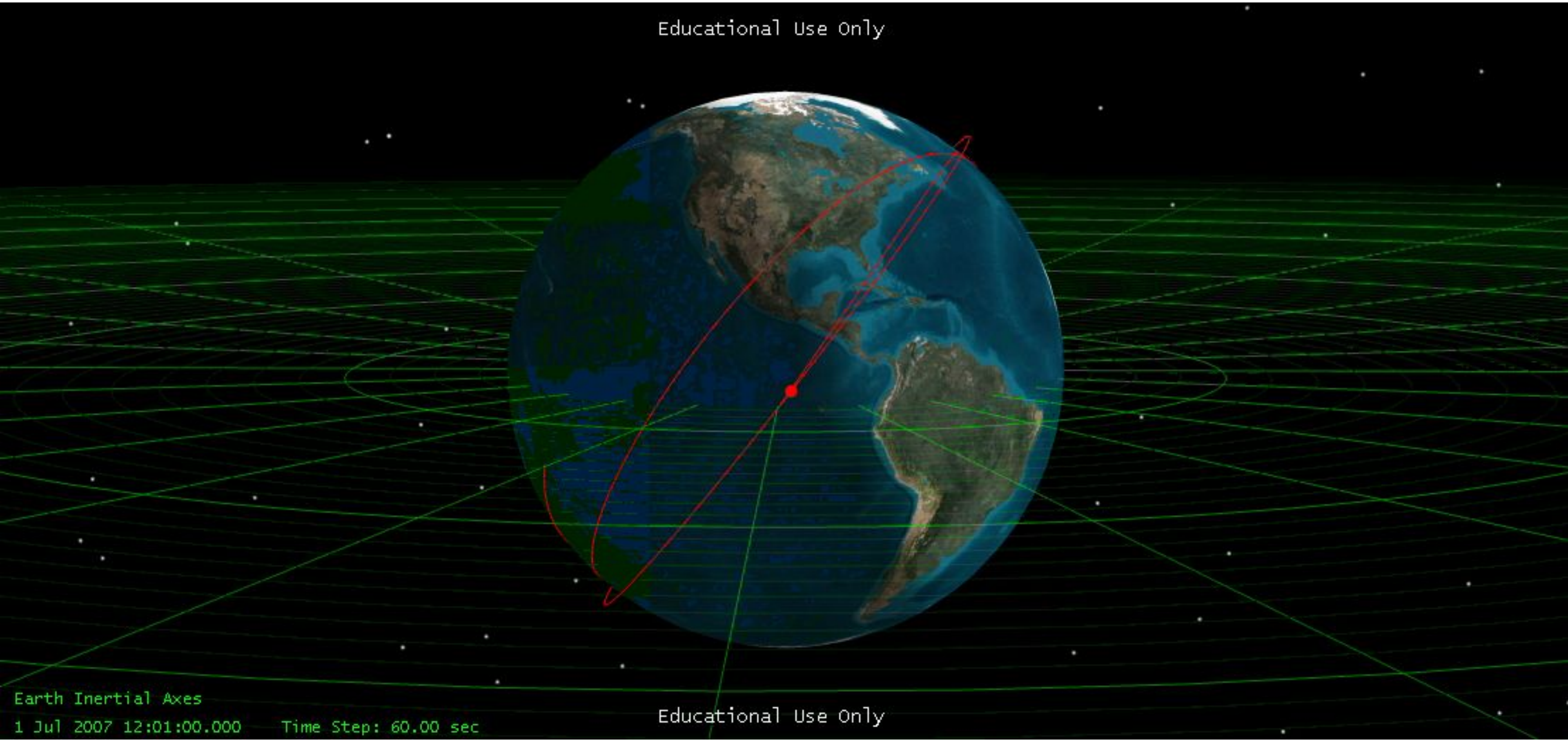
P – северный полюс мира;
P' – южный полюс мира;
γ - точка весеннего равноденствия;
Ω - точка осеннего равноденствия;
OXYZ – геоцентрическая экваториальная СК.

Элементы орбиты спутника



1. Большая полуось (*a*) или фокальный параметр (*p*)
2. Эксцентриситет (*e*)
3. Наклонение (*i*)
4. Долгота восходящего узла (Ω)
5. Аргумент перицентра (ω)
6. Время прохождения перицентра (t_π).

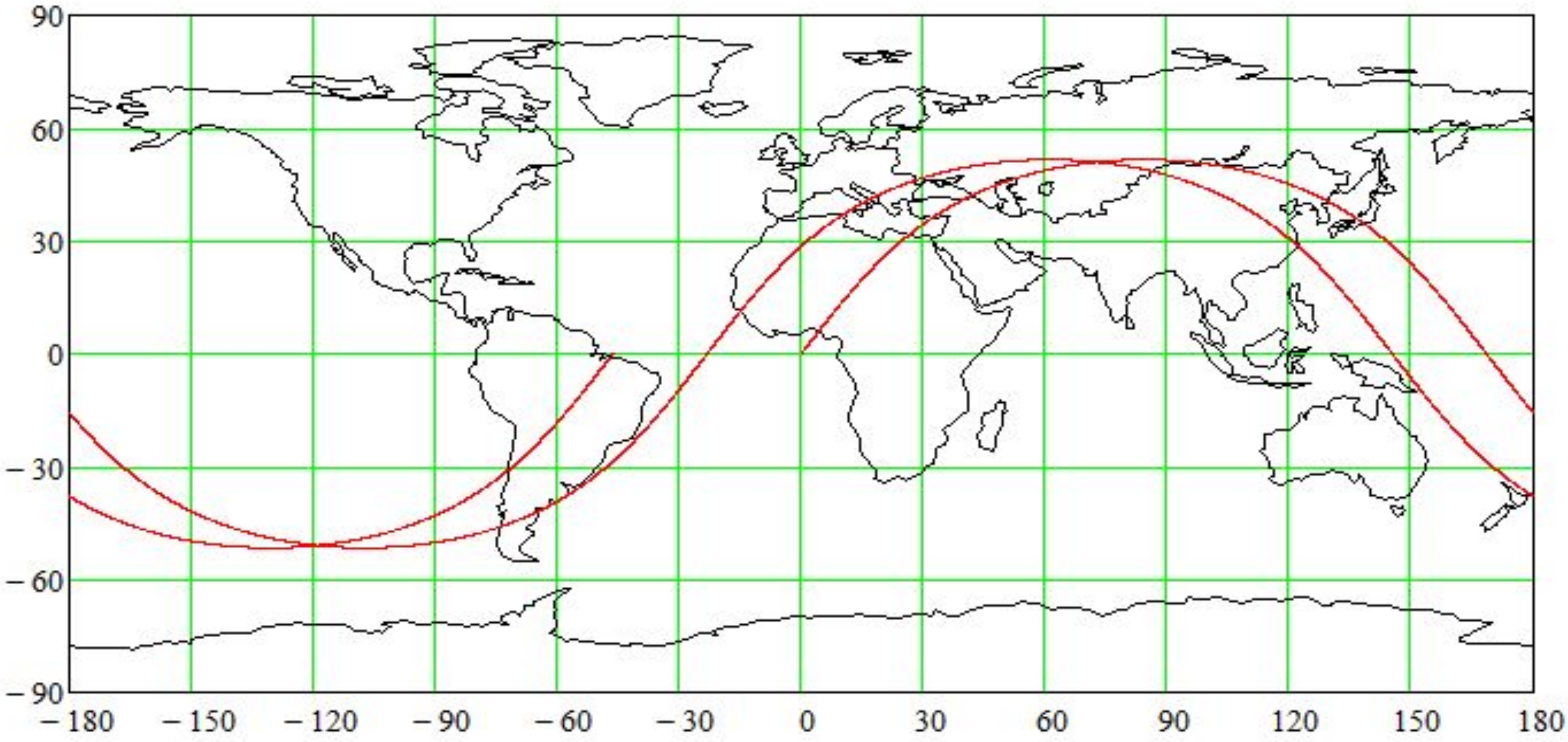
Трасса искусственного спутника Земли



e = 0, a=6771 км (H=400 км), i =51.6°

Основы теории движения космических аппаратов

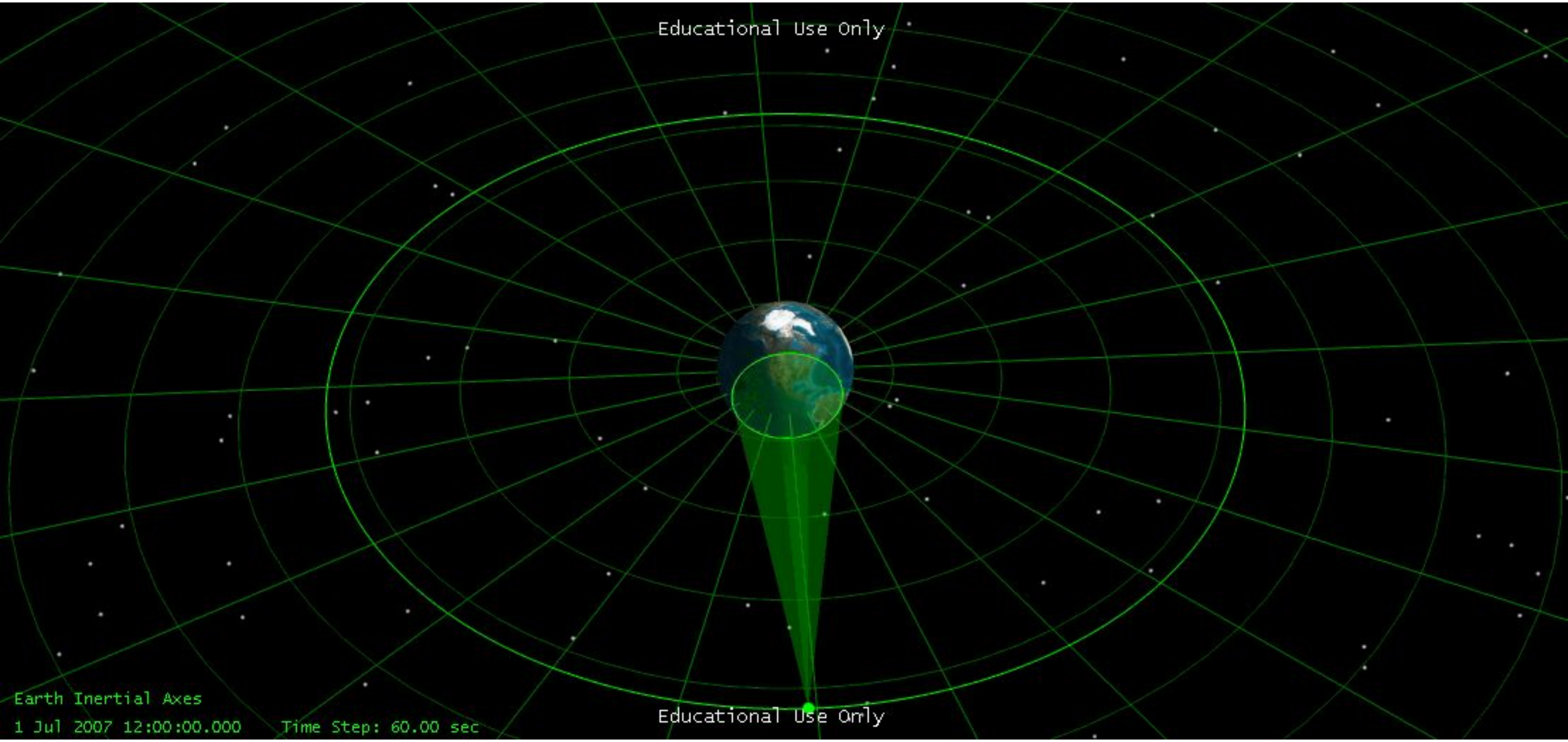
Трасса искусственного спутника Земли



e = 0, *a*=6771 км (*H*=400 км), *i* =51.6°

Основы теории движения космических аппаратов

Геостационарная орбита (ГСО)



e = 0, a=42164 км (H=35793 км), i =0°

T=23ч 56м 3,084 с

Основы теории движения космических аппаратов

Прецессия орбиты ИСЗ, вызываемая нецентральностью гравитационного поля Земли

В рамках задачи двух тел (центральное ньютоновское гравитационное поле):

$$p = const;$$

$$e = const;$$

$$i = const;$$

$$\Omega = const;$$

$$\omega = const;$$

Приращения элементов орбиты за виток (вековые возмущения) в случае, если Земля рассматривается как сжатый по полюсам сфероид:

$$\Delta p = 0;$$

$$\Delta e = 0;$$

$$\Delta i = 0;$$

$$\Delta\Omega = -\frac{2\pi}{p^2}\cos i;$$

$$\Delta\omega = \frac{\pi\delta}{p^2}\left(4 - 5\sin^2 i\right);$$

$$\delta = 66.07 \times 10^3\, km^2;$$

Основы теории движения космических аппаратов

Прецессия орбиты ИСЗ, вызываемая нецентральностью гравитационного поля Земли

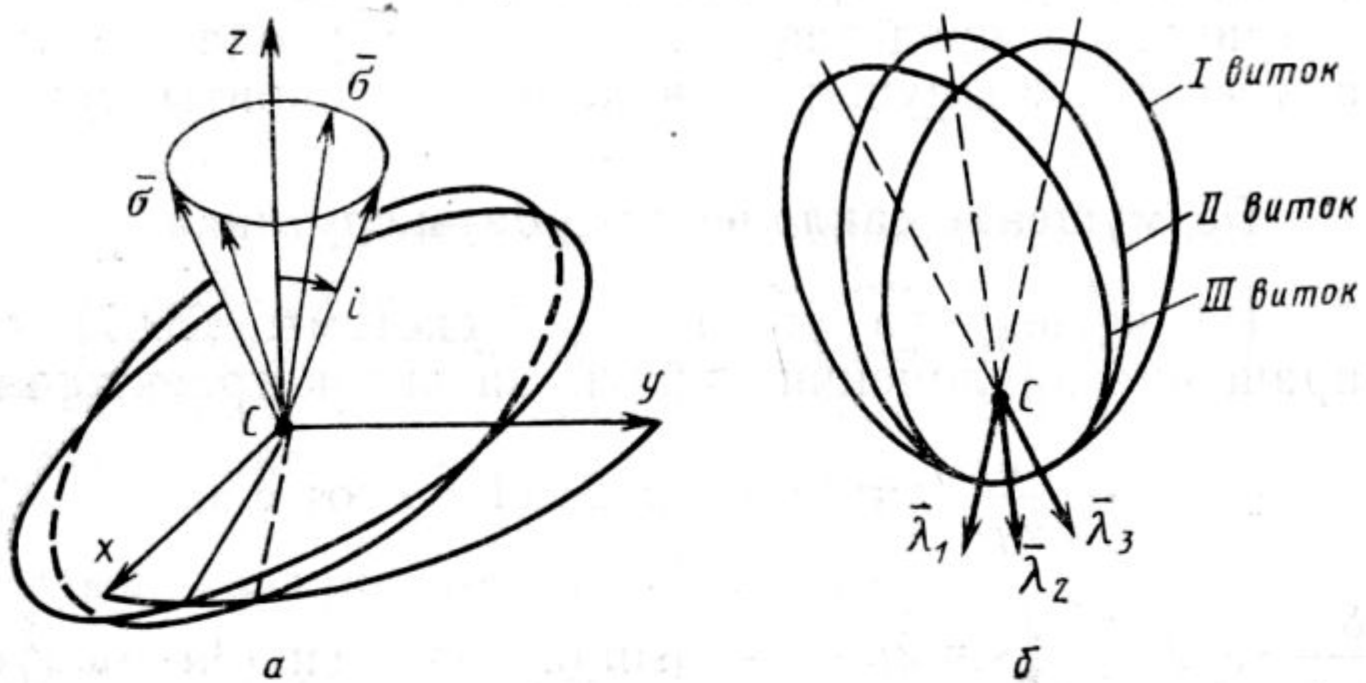
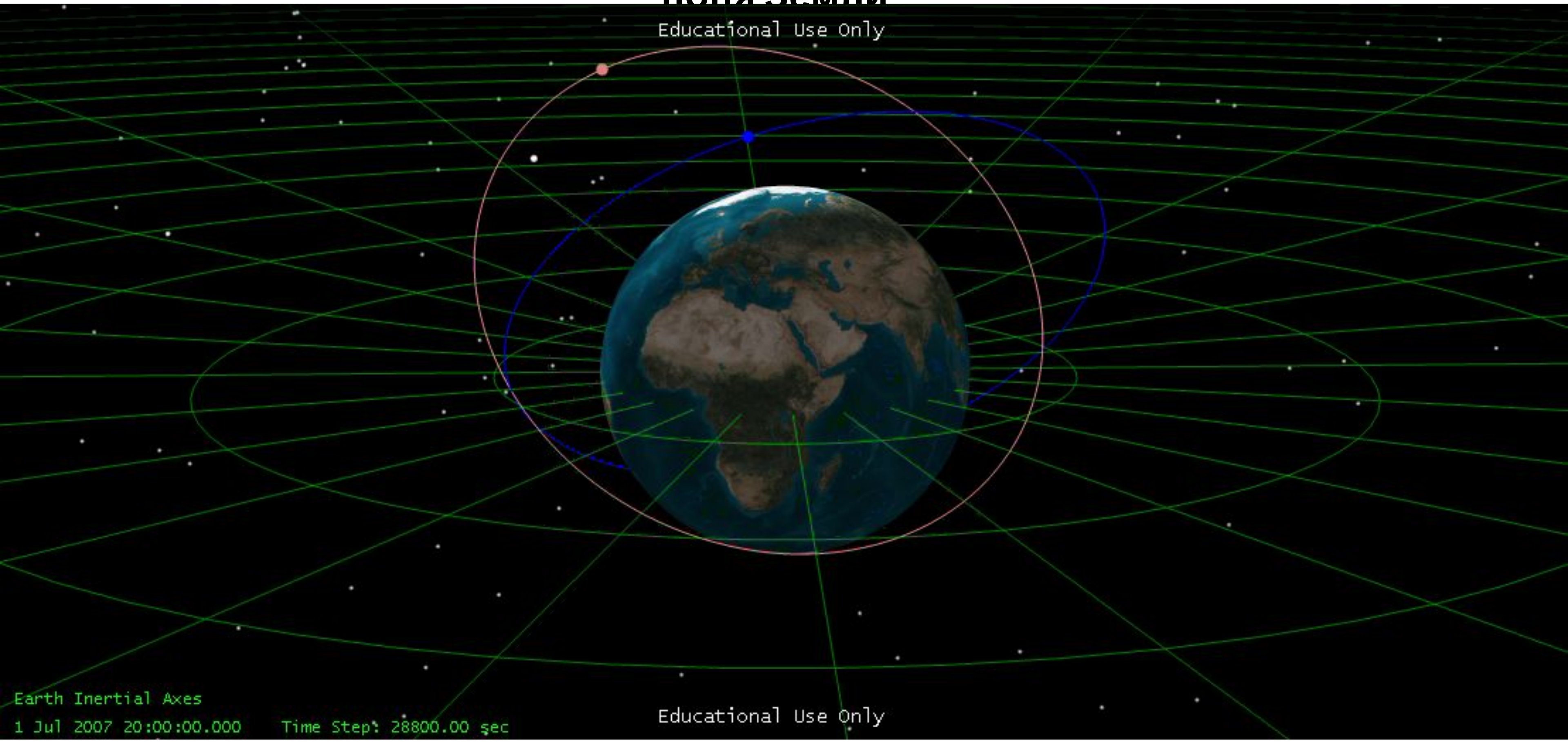


Рис. 3.10. Прецессия линии:
а — узлов орбиты ИСЗ; *б* — апсид орбиты ИСЗ

Основы теории движения космических аппаратов

Прецессия орбиты ИСЗ, вызываемая нецентральностью гравитационного поля Земли



«Молниевская» орбита

$$\Delta\omega = 0;$$

$$\frac{\pi\delta}{p^2}\left(4 - 5\sin^2 i\right) = 0;$$

$$4 - 5\sin^2 i = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} i = 63.435°; \\ i = 116.565°; \end{array}\right.$$

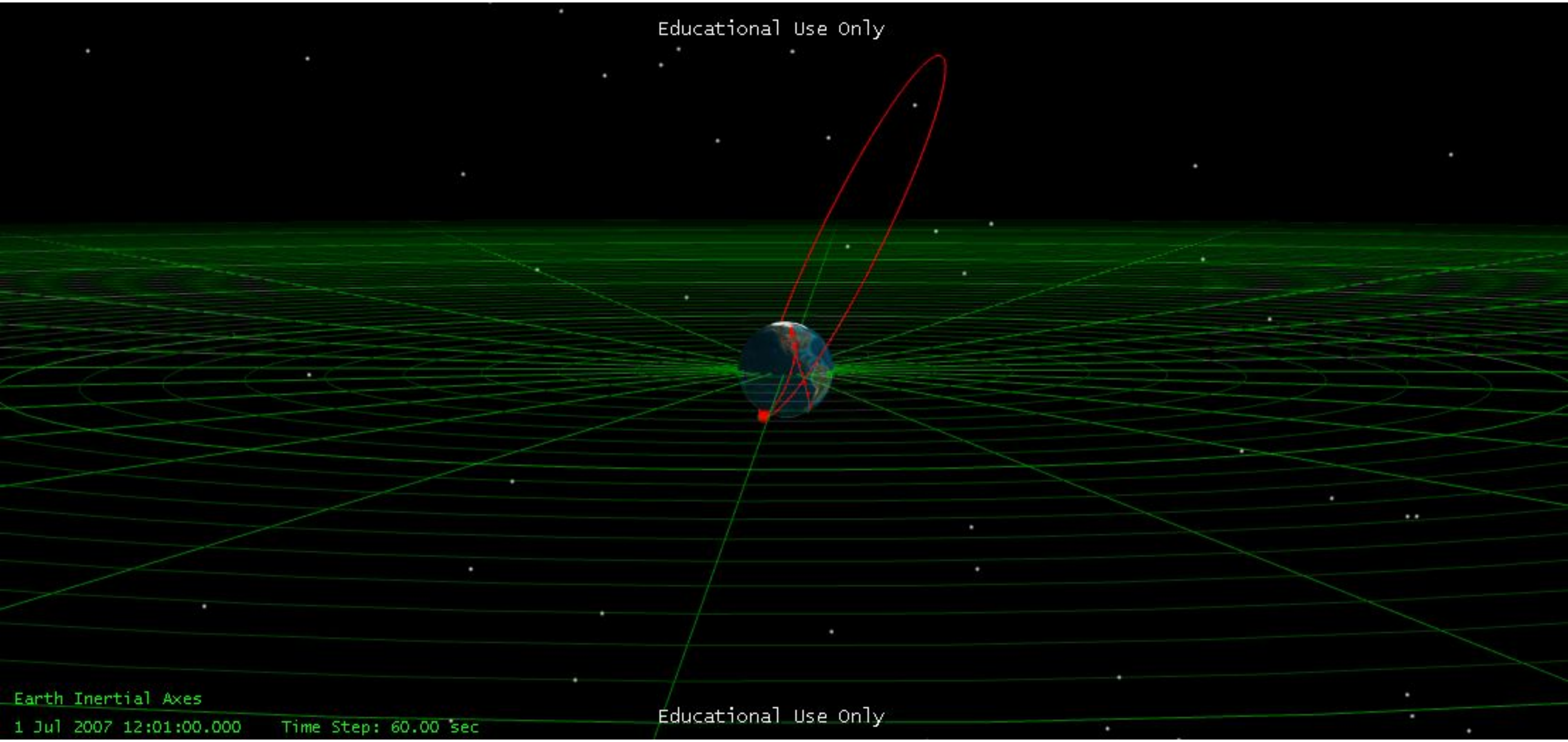
«Молниевская» орбита - эллиптическая орбита с периодом обращения кратным звездным земным суткам и наклонением, обеспечивающим неизменное положение линии апсид.

Пример параметров такой орбиты:

- ✔*высота перигея 500 - 1000 км,*
- ✔*высота апогея ~ 40000 км,*
- ✔*наклонение 63.4°,*
- ✔*аргумент перицентра 270°.*
- ✔*Период обращения КА: 0.5* $T_{зв}$

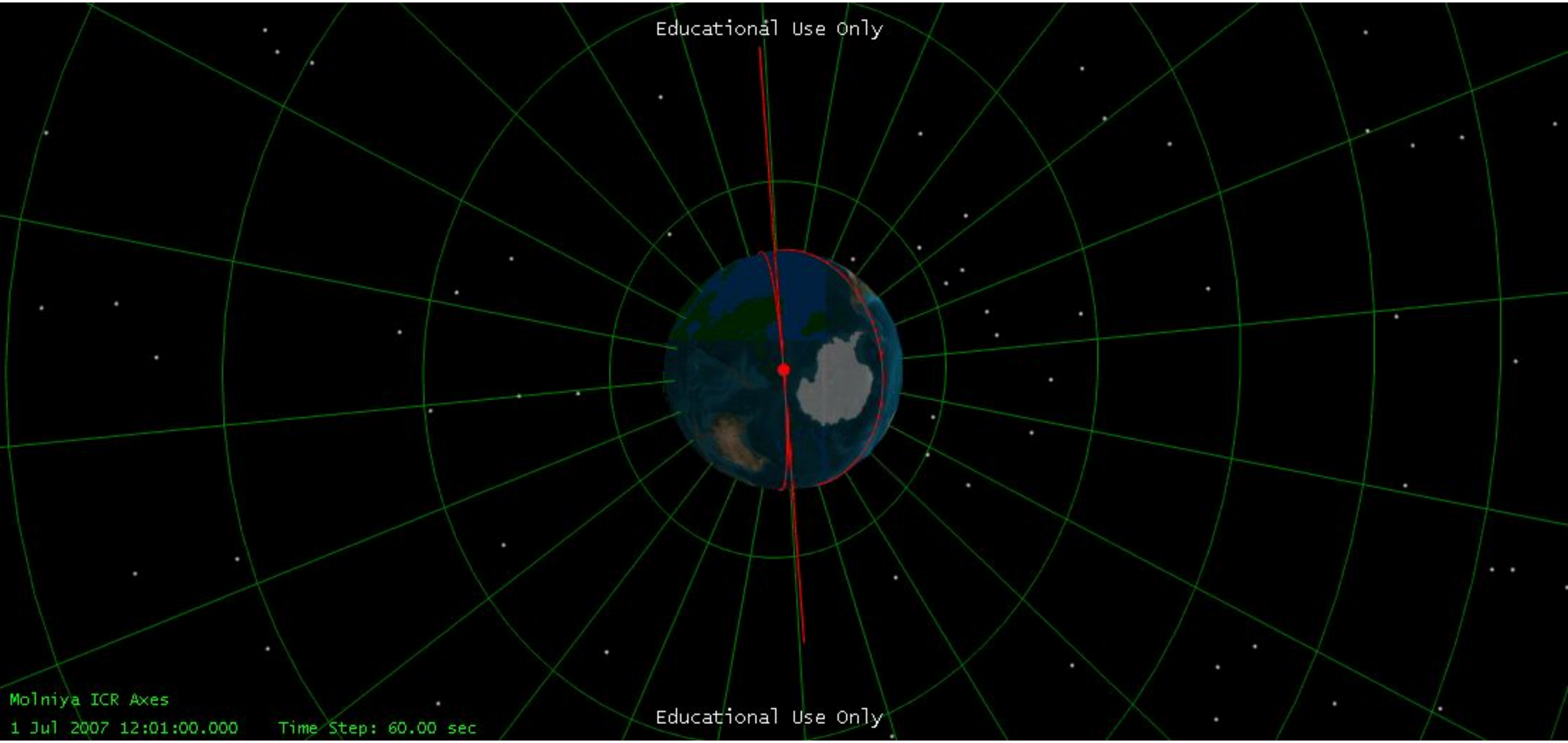
Основы теории движения космических аппаратов

«Молниевская» орбита



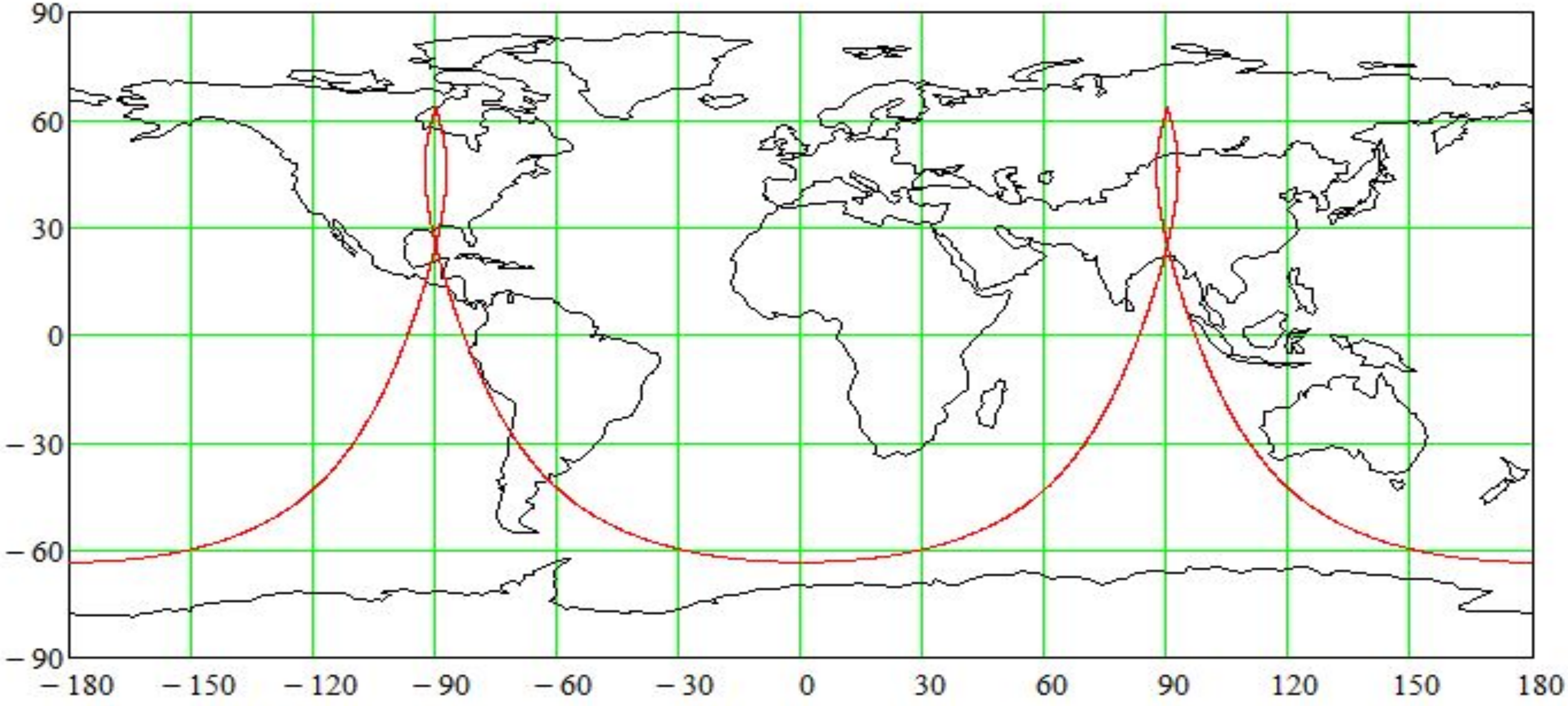
Основы теории движения космических аппаратов

«Молниевская» орбита



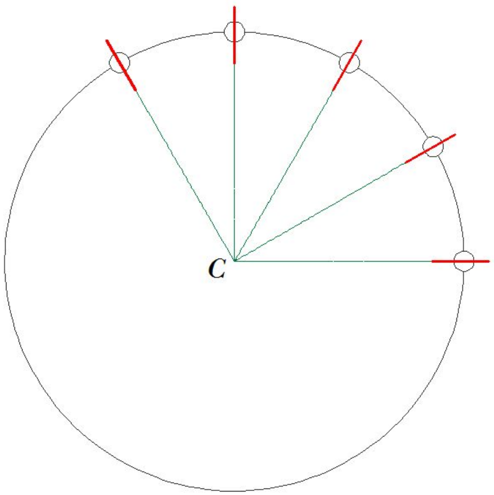
Основы теории движения космических аппаратов

«Молниевская» орбита - трасса



Солнечно-синхронная орбита (ССО)

Наклонение ССО выбирается таким, чтобы угловая скорость векового ухода долготы восходящего узла была бы равна угловой скорости радиус-вектора Земли относительно Солнца, т.е. была бы равна одному обороту за год. Если это условие выполняется, то относительно направления Солнце-Земля плоскость орбиты спутника остается примерно в одном положении.



$$i = \arccos\left[-0.09852\left(1+\frac{h_\alpha + h_\pi}{2R_\oplus}\right)^{3.5}\right];$$

$R_\oplus = 6371 km;$ - средний радиус Земли

h_α - высота апогея орбиты

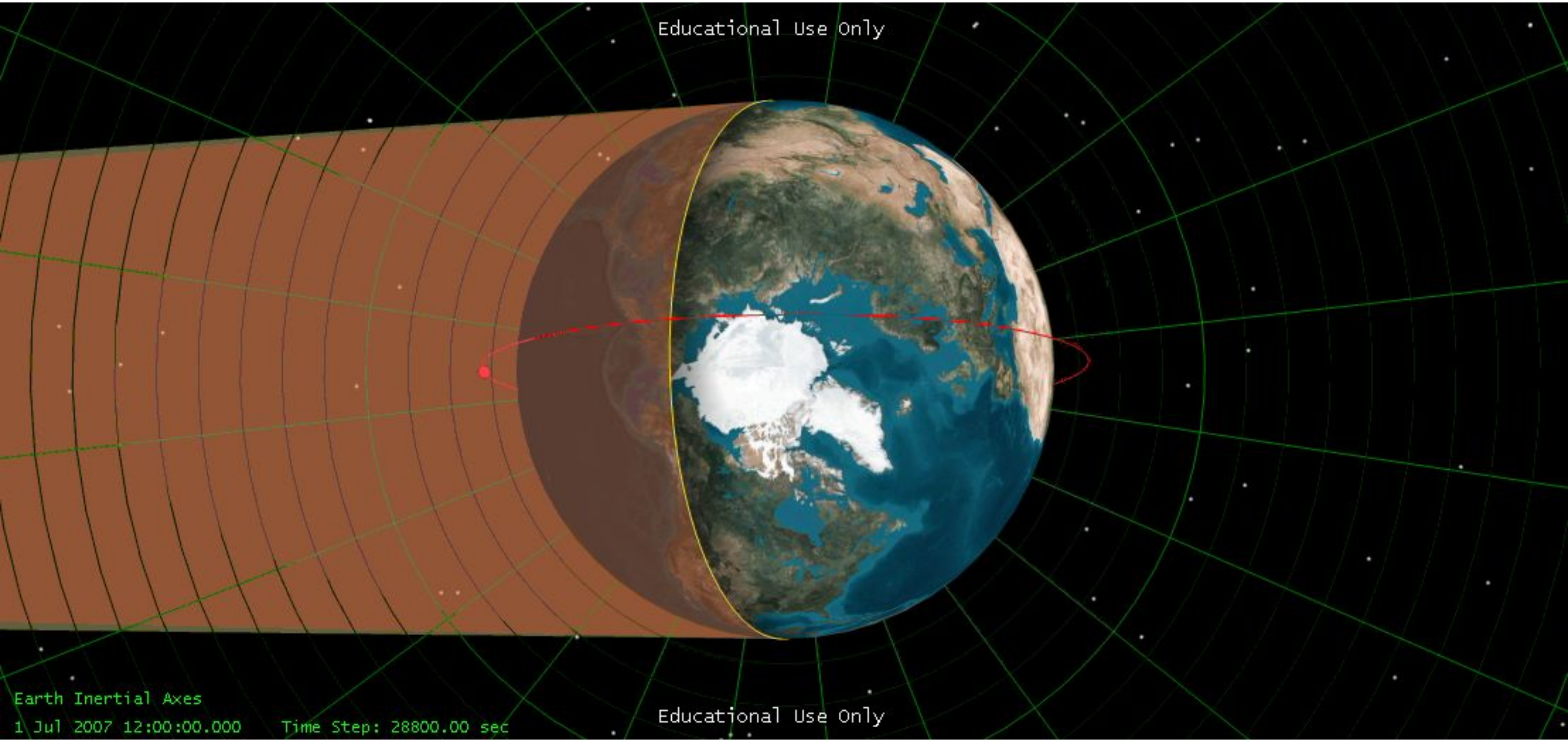
h_π - высота перигея орбиты

Характеристики круговых солнечно-синхронных орбит

№ п/п	Наименование параметра	Значение			
1	Высота орбиты, км	400	500	600	700
2	Радиус орбиты, км	6771	6871	6971	7071
3	Период обращения КА, с	5545	5668	5792	5917
4	Количество витков в сутки	15,582	15,243	14,916	14,601
5	Наклонение ССО, град	97,003	97,374	97,759	98,158

Основы теории движения космических аппаратов

Солнечно-синхронная орбита (ССО)



Межорбитальное маневрирование КА

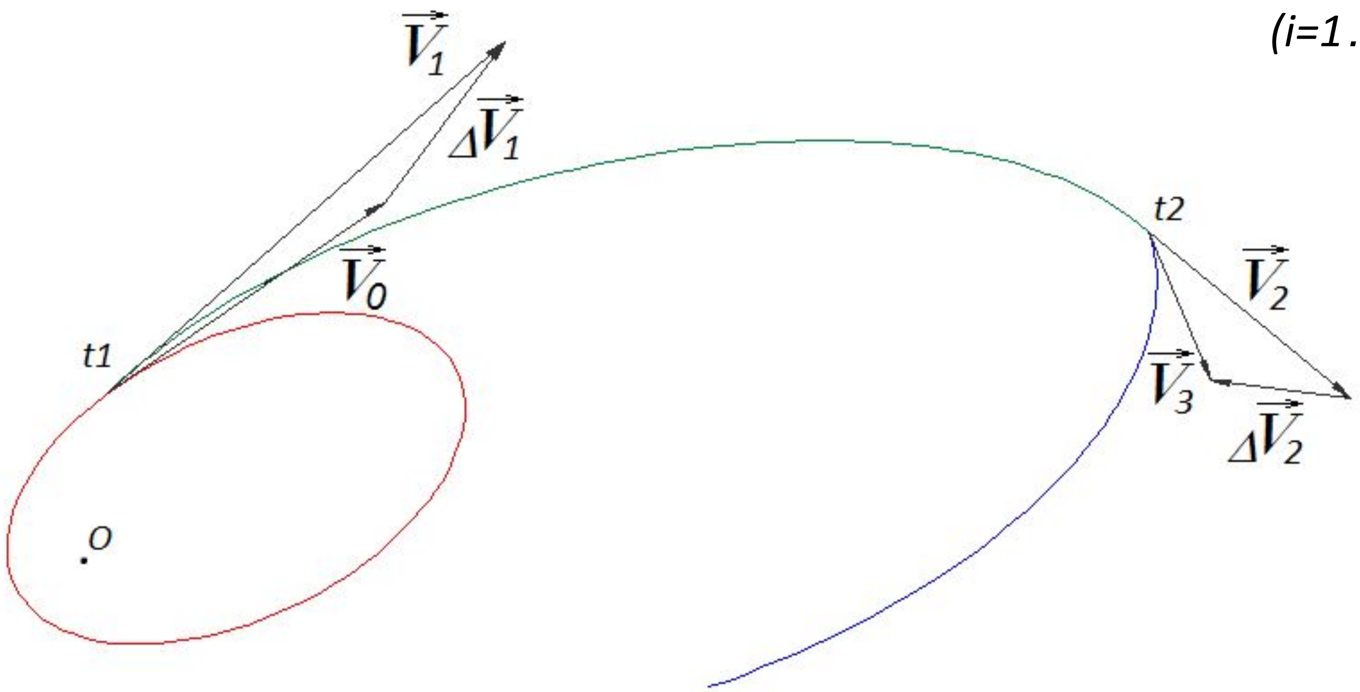
Маневр межорбитального перелета – управляемое движение в результате которого КА переходит с начальной орбиты на конечную.

Импульсная аппроксимация активных участков – широко используемое в практике проектных расчетов упрощение. Оно основано на том, что при использовании термохимических двигателей (ЖРД и РДТТ) время их работы на активных участках значительно меньше пассивных участков переходных орбит.
Таким образом, можно считать, что к КА прикладывается импульс, мгновенно изменяющий величину и направление скорости КА и неизменяющий его координаты.

Постановка задачи межорбитального перелета

Дано:
μ - гравитационный параметр небесного тела;
$p_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0$ – параметры начальной орбиты;
$p_к, e_к, i_к, \Omega_к, \omega_к$ – параметры конечной орбиты;
Найти:
схему и траекторию перелета.

Выбираемые параметры схемы перелета:
N – количество импульсов;
$\overrightarrow{\Delta V_i}$ – величины и направления импульсов;
t_i – моменты времени приложения импульсов.
$(i=1\dots N)$



Понятие характеристической скорости, оценка затрат топлива для маневра

Характеристическая скорость маневра

$$\Delta V_\Sigma = \sum_{i=1}^{N} \Delta V_i;$$

Характеристиеская скорость КА – скорость, которую КА может набрать в идеальных условиях, истратив все топливо.

$$V_{хар} = -w \ln \frac{m_k}{m_0};$$

$$[w] = c\ /I; \quad [c_{уд}] = w; \quad I = g_{уд} \cdot {}_0;$$

Чтобы КА мог выполнить маневр, необходимо:

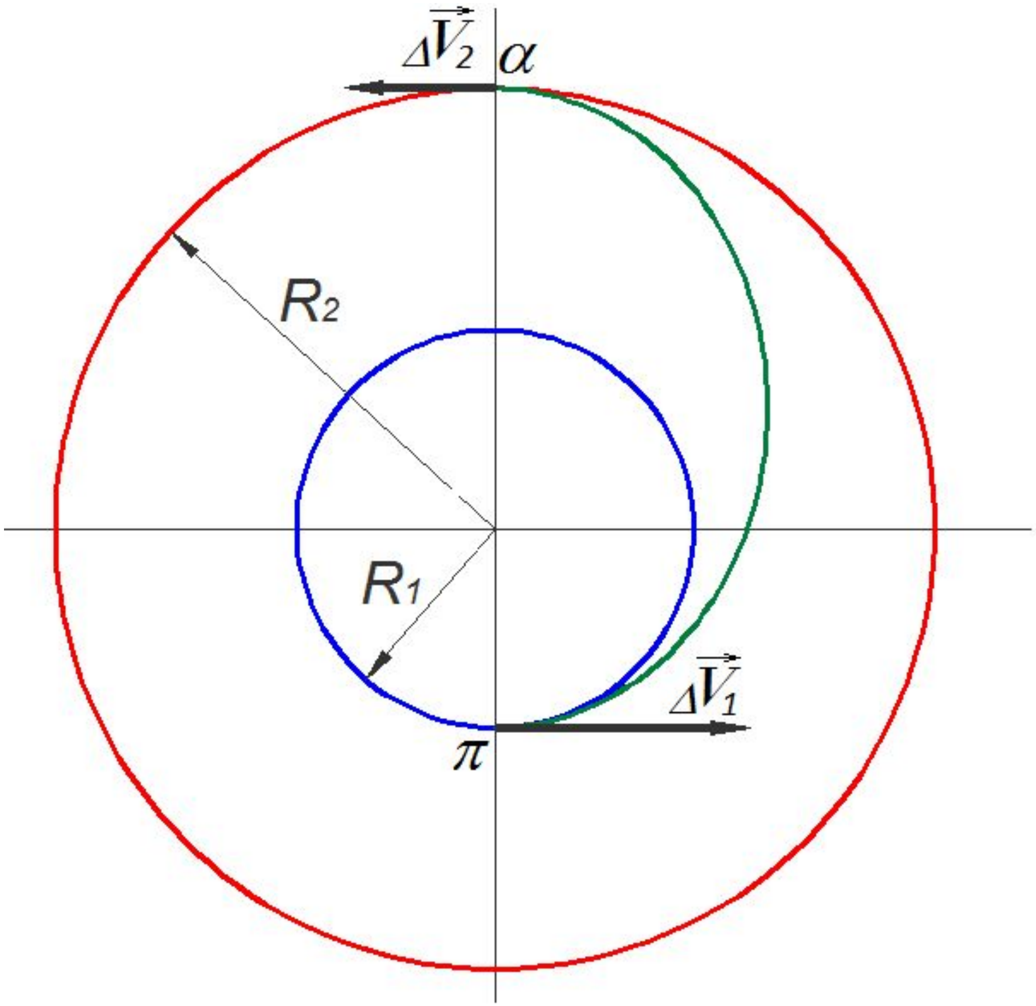
$$V_{хар} = \Delta V_\Sigma + \cancel{\Delta V_{потерь}};$$

Оценка затрат топлива, необходимого для осуществления маневра:

$$m_k = m_0 - m_p;$$

$$m_p = m_0 \left(1 - e^{-\frac{\Delta V_\Sigma}{w}} \right);$$

Оценка характеристической скорости двухимпульсного перелета между круговыми компланарными орбитами (перелет Гомана-Цандера)



Дано: μ, R_1, R_2

Найти: ΔV_Σ - ?

Решение:

$$\Delta V_\Sigma = \Delta V_1 + \Delta V_2;$$

$$\Delta V_1 = V_\pi - V_0 = \sqrt{\frac{2\mu}{R_1} - \frac{2\mu}{R_1 + R_2}} - \sqrt{\frac{\mu}{R_1}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\mu}{R_1}} \cdot \left(\sqrt{\frac{2R_2}{R_1 + R_2}} - 1 \right);$$

$$\Delta V_2 = V_k - V_\alpha = \sqrt{\frac{\mu}{R_2}} - \sqrt{\frac{2\mu}{R_2} - \frac{2\mu}{R_1 + R_2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\mu}{R_2}} \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{2R_1}{R_1 + R_2}} \right);$$

Список литературы

1. Константинов М.С., Каменков Е.Ф., Перелыгин Б.П., Безвербый В.К. Под. ред. В.П. Мишина, Механика космического полета. М.: Машиностроение, 1989.
2. Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г. Основы механики космического полета. М.: Наука. 448 с., 1990.
3. Сихарулидзе Ю.Г. Баллистика летательных аппаратов. М.: Наука. 351 с., 1982.
4. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1975.

Спасибо за внимание!

Кафедра СМ-1 «Космические аппараты и ракеты-носители»

107005, Москва, Госпитальный переулок, дом 10
E-mail: kafsm1@sm.bmstu.ru
Телефон: +74992610107

Ельников Роман Викторович
E-mail: elnikov_rv@mail.ru