Лекция 3. **Математические методы в логистике**

Содержание лекции:

1. Формулировка общей задачи управления запасами
2. Классическая задача управления запасами
3. Моделирование систем регулирования товарных запасов (*на самоподготовку*)
4. Отражение формирования и использования запасов при моделировании двухэтапного процесса принятия решения

Литература

Экономико-математические методы и прикладные модели: Учеб. пособие для вузов / Под ред. *В.В. Федосеева.* — 2-е изд. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. — раздел 8.2.

Управление фирмой / Под ред. *Л.Л. Разумновой*. М.: МАКС Пресс, 2009. — Часть 2, с. 23-30.

Мельник М.М. Экономико-математические методы и модели в планировании и управлении материально-техническим снабжением: Учебник. М.: Высшая школа, 1990.

3.1. Формулировка общей задачи управления запасами

- Дано:
  - функция вероятности поставки товара в объёме S от времени t и управляющих воздействий M: $p = S(S,t,M)$
    - в частном случае – функция объёма поставки $S = S(t,M)$
  - функция вероятности спроса на товар от времени и управляющих воздействий: $p = D(D,t,M)$
    - в частном случае – функция объёма спроса $D = D(t,M)$
  - функция издержек хранения от размера запаса и времени: $C = C(U,t)$
  - целевая функция
    - Например, минимум суммы издержек хранения и потерь из-за отсутствия запаса
- Условие: $dU/dt = S - D$
- Найти: управляющие воздействия, доставляющие оптимум целевой функции

3.2. Классическая задача управления запасами

- <u>Дано</u>:
  - наличие товара на складе к концу *предыдущего* периода – x_0
  - функция плотности распределения вероятностей объёмов спроса в *следующем* периоде – $f(x)$
  - затраты на хранение единицы товарных остатков – c
  - потери от неполного удовлетворения спроса на единицу товара – k

Если заявки на обслуживание независимы и редки, то $f(x)$ соответствует закону Пуассона; если независимы и происходят часто – нормальному распределению.

3.2.

- Условия:
  - Расчёт остатков:
    - $x_1 = \max(0, x_0 + h - x)$
  - Расчёт неудовлетворённого спроса:
    - $q = \max(0, x - h - x_0)$
  - Расчёт издержек:
    - $\varphi = cx_1 + kq$

Пополнение запаса

Спрос

- Найти:
  - $\min_{\{h\}} \varphi$

3.2.

Всю задачу можно сформулировать в виде одного выражения:

$$\min_h \left(C(h) + K(h) \right),$$

где

$$C(h) = c \int_{-\infty}^{x_0+h} \boxed{\left(x_0 + h - x \right) f(x)}\, dx,$$

$$K(h) = k \int_{x_0+h}^{\infty} \boxed{\left(x - x_0 - h \right) f(x)}\, dx$$

Сумма произведений издержек и их вероятностей

Оптимум можно найти в общем виде, пользуясь достаточными условиями минимума:

$$d\left(C(h) + K(h)\right) / dh = 0, \quad d^2\left(C(h) + K(h)\right) / dh^2 > 0.$$

3.2.

Продифференцируем по h функцию

$$C(h) = c\int_{-\infty}^{x_0+h}(x_0+h-x)f(x)\,dx$$

Воспользуемся очевидным фактом, что

$$\frac{d}{dy}\int_{-\infty}^{y} a(x)\,dx = a(y),$$ следовательно, $$\frac{d}{dy}\int_{-\infty}^{y} x\,a(x)\,dx = y\,a(y)$$

Представим $C(h)$ как

$$c\int_{-\infty}^{x_0+h}(-x)f(x)dx + c\left(x_0+h\right)\int_{-\infty}^{x_0+h} f(x)dx$$

Для второго слагаемого используем формулу производной произведения

Продифференцировав, получим

$$-c(x_0+h)f(x_0+h) + c\left((x_0+h)f(x_0+h) + 1\cdot\int_{-\infty}^{x_0+h} f(x)\,dx\right),$$

т.е. $c\cdot\int_{-\infty}^{x_0+h} f(x)dx = cF(x_0+h)$, где $F(\cdot)$ – функция распределения вероятности.

Аналогичным образом продифференцировав $K(h)$ и упростив, в итоге имеем $(c+k)F(x_0+h)-k$.

3.2.

Теперь можно решить уравнение

$$d(C(h)+K(h))/dh=0$$

Подставляем полученную форму производнойв левую часть:

$(c+k)F(x_0+h)-k=0$, откуда

получаем оптимальную вероятность неисчерпания запаса:

$$F(x_0+h^*)=\frac{k}{c+k}.$$

Далее с помощью таблицы функции F или подходящего программного средства определяем оптимальный размер поставки – величину h^*

Если эта величина отрицательна, то оптимальный размер поставки в текущем периоде равен нулю.

3.3. Моделирование систем регулирования товарных запасов

(на самоподготовку)

- Система с заданным размером запаса
- Система с заданной периодичностью заказа
- Система с заданными границами размера запаса
  - в т.ч. с заданной периодичностью

3.4. Отражение формирования и использования запасов при моделировании двухэтапного процесса принятия решения

3.4.

- Предприятие может выпускать два вида продукции:
  1. Из полуфабриката A (1 ц/ц) и покупного ресурса Z (0,5 ц/ц)
  2. Из полуфабрикатов A (0,5 ц/ц), B (1 ц/ц) и ресурса Z (1 ц/ц)
  - Полуфабрикаты выпускаются:
    - A. Из ресурсов X и Y (по 1 ц/ц)
    - B. Из ресурса X (2 ц/ц)
  - Цены продукции:
    1. 15 у.е./ц
    2. 30 у.е./ц
  - Цена ресурса Z:
    - В 75% случаев – 5 у.е./ц
    - В 25% случаев – 20 у.е./ц
  - Имеется возможность приобрести не более 55 ц ресурса Z
  - Ресурсы X и Y уже закуплены в количествах 100 и 50 ц, соответственно
  - Ресурс Z можно хранить на складе предприятия
    - Потери составляют 10% за один производственный цикл
- Найти оптимальную производственную программу
  - (учитывая, что объём производства полуфабрикатов нужно определить уже сейчас, хотя цена на ресурс Z ещё не известна).

3.4.

- Переменные (9)
  - Априорное решение (2)
    - Производство полуфабрикатов A и B (2)
  - Апостериорное решение (6)
    - Дешёвый ресурс Z (3)
      - Покупка ресурса Z (1)
      - Выпуск продуктов 1 и 2 (2)
    - Дорогой ресурс Z (3, те же)
  - Формирование запаса ресурса Z (1)

3.4.

- Ограничения (10)
  - Априорное решение (2)
    - Баланс ресурсов X и Y (2)
  - Апостериорное решение (8)
    - Дешёвый ресурс Z (4)
      - Баланс полуфабрикатов A и B (2)
      - **Баланс ресурса Z** (1) – здесь отражается *формирование* запаса
      - Лимит покупки ресурса Z (1)
    - Дорогой ресурс Z (4)
      - Баланс полуфабрикатов A и B (2)
      - **Баланс ресурса Z** (1) – здесь отражается *использование* запаса
      - Лимит покупки ресурса Z (1)

3.4. Ограничения

- Априорное решение
  - Баланс ресурсов X и Y
    - $1x_A+2x_B \le 100$
    - $1x_A \le 50$
- Апостериорное решение
  - Дешёвый ресурс Z
    - Баланс полуфабрикатов A и B
      - $1x_{11}+0{,}5x_{12} \le x_A$
      - $1x_{12} \le x_B$
    - **Баланс ресурса Z** – здесь отражается *формирование* запаса
      - $0{,}5x_{11}+1x_{12}+\mathbf{(1/(1-0{,}1))}x_0 \le x_{1Z}$
    - Лимит покупки ресурса Z
      - $x_{1Z} \le 55$
  - Дорогой ресурс Z
    - Баланс полуфабрикатов A и B (*составьте самостоятельно*)
    - **Баланс ресурса Z** – здесь отражается *использование* запаса
      - $0{,}5x_{21}+1x_{22} \le x_{2Z}+\mathbf{(0{,}75/0{,}25)}x_0$
    - Лимит покупки ресурса Z (*составьте самостоятельно*)

x_0 – переменная по формированию запаса

Измеряется в количестве ресурса, направляемого на пополнение запаса за один благоприятный производственный цикл

Потери за один производствен-ный цикл

Вероятность *пополнения* запаса

Вероятность *расходования* запаса

3.4.

Формулировка в программе XA и решение

Storage	maximiz	A	B	(1)Z	(1)1	(1)2	(2)Z	(2)1	(2)2	0					
	n	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	min	max	сумма	дв.оценка	
X	y1	1	2									100	100	4.3125	UB
Y	y2	1										50	50	1.4375	UB
(1)A	y3	-1			1	0.5						0		4.5	UB
(1)B	y4		-1			1						0		6.75	UB
(1)Z	y5						-1	0.5	1	-3		0		5	UB
(2)A	y6	-1						1	0.5			0		1.25	UB
(2)B	y7		-1						1			0		1.875	UB
(2)Z	y8			-1	0.5	1				1.111		0		13.5	UB
	MAX			55			55								
	MIN	0	0	0	0	0	0	0	0	0					
Целевая	cost			-3.75	11.25	22.5	-5	3.75	7.5						

переменные	50	25	55	37.5	25	13.38	37.5	25	10.125	1039	OPTIM	NORMAL COMPLETIO
оценки			9.75									
	BS	BS	UB	BS	BS	BS	BS	BS	BS			

3.4.

- Метод позволяет определить:
    - потоки ресурсов
        - на пополнение запаса
        - на использование запаса,
    - не позволяет определить **размер** запаса ☹
- Оптимальный размер запаса
    - определяют с помощью подходящей модификации общей задачи управления запасами
    - возможно выделение третьего и четвёртого исходов (когда запас кончился и когда склад полон) с вероятностью, определённой при помощи о.з.у.з.
        - при этом уточняются потери от отсутствия запаса, что приводит к итеративной процедуре решения
    - возможно объединение стохастической двухэтапной задачи и задачи управления запасами
        - для решения придётся воспользоваться методами нелинейного программирования
        - процедура поиска решения может оказаться нетривиальной