Основы математической логики

Функции Алгебры Логики

Функции алгебры логики

Переменные x_i, принимающие значения из множества {0,1} называются двоичными переменными.

Функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ от двоичных переменных, принимающая, как и ее аргументы, значения 0,1, называется функцией алгебры логики (ФАЛ) или переключательной функцией (ПФ). Такие функции называют также двоичными, логическими или булевыми функциями.

ФАЛ характеризуются:

- числом двоичных переменных n;
- областью определения функции – число наборов $k_н=2^n$;
- общим числом различных функций $k_ф= 2^{k_н}$.

Булева функция одного аргумента

Переключательная **функция одного** аргумента имеет:

$n = 1$, $k_н = 2^n = 2^1 = 2$, $k_ф = 2^{k_н} = 2^2 = 4$

X	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1
	Константа 0	Переменная X	Инверсия X	Константа 1

Переключательная **функция двух** аргументов имеет:

$n = 2$, $k_н = 2^n = 2^2 = 4$, $k_ф = 2^{k_н} = 2^4 = 16$

Булева функция двух аргументов

	Номер набора				Название функции	Формула функции
	0	1	2	3		
x_1	0	0	1	1		
x_2	0	1	0	1		
$f_0(x)$	0	0	0	0	Константа нуль	$f_0 = 0$
$f_1(x)$	0	0	0	1	Конъюнкция (И)	$f_1 = x_1 \& x_2$
$f_2(x)$	0	0	1	0	Запрет по x_2	$f_2 = \neg x_1 \& x_2$
$f_3(x)$	0	0	1	1	Повторитель по x_1	$f_3 = x_1$
$f_4(x)$	0	1	0	0	Запрет по x_1	$f_4 = x_1 \& \neg x_2$
$f_5(x)$	0	1	0	1	Повторитель по x_2	$f_5 = x_2$
$f_6(x)$	0	1	1	0	Сложение по модулю 2	$f_6 = x_1 \oplus x_2$
$f_7(x)$	0	1	1	1	Дизъюнкция (ИЛИ)	$f_7 = x_1 \vee x_2$

Булева функция д в у х аргументов

	Номер набора				Название функции	Формула функции
	0	1	2	3		
x_1	0	0	1	1		
x_2	0	1	0	1		
$f_8(x)$	1	0	0	0	Стрелка Пирса (ИЛИ-НЕ)	$f_8 = \neg(x_1 \vee x_2)$
$f_9(x)$	1	0	0	1	Логическая равнозначность	$f_9 = x_1 \& x_2 \vee$ $= \vee \neg x_1 \& \neg x_2$
$f_{10}(x)$	1	0	1	0	Инверсия x_2	$f_{10} = \neg x_2$
$f_{11}(x)$	1	0	1	1	Импликация от x_2 по x_1	$f_{11} = \neg x_1 \vee x_2$
$f_{12}(x)$	1	1	0	0	Инверсия x_1	$f_{12} = \neg x_1$
$f_{13}(x)$	1	1	0	1	Импликация от x_1 по x_2	$f_{13} = x_1 \vee \neg x_2$
$f_{14}(x)$	1	1	1	0	Штрих Шеффера (И-НЕ)	$f_{14} = \neg(x_1 \& x_2)$
$f_{15}(x)$	1	1	1	1	Константа единица	$f_{15} = 1$

Функционально п о л н ы й набор

На практике используют не все функции, а только те, которые методом суперпозиции (подстановка вместо элементов одной функции других функций) обеспечивают представление любой другой функции. Набор таких функций называют функционально полным набором (ФПН).

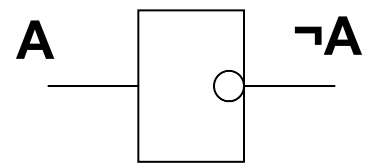
Существует несколько ФПН. Один из них основной ФПН – конъюнкция, дизъюнкция, инверсия.

Дискретный преобразователь, который после обработки входных двоичных сигналов выдаёт на выходе сигнал, являющийся значением одной из логических операций, называется логическим элементом (ЛЭ).

Логические элементы

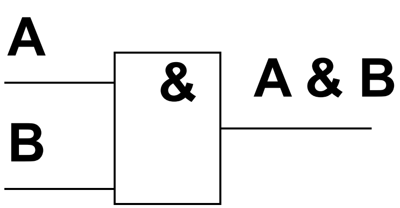
Инверсия, конъюнкция, дизъюнкция, представляют ФПН. Схемы «И», «ИЛИ», «НЕ» образуют функционально полную систему, т.е. с помощью этих схем может быть построено любое устройство.

Инвертор, схема «НЕ»



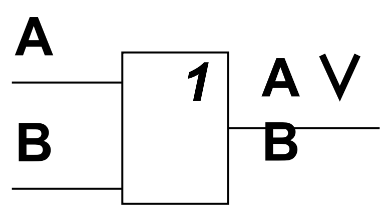
A	¬A
0	1
1	0

Конъюнктор, схема «И»



A	B	A & B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Дизъюнктор, схема «ИЛИ»



A	B	A ⋁ B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Логические элементы

Кроме выше указанных логических схем в качестве базовых могут использоваться комбинированные схемы.

Стрелка Пирса,

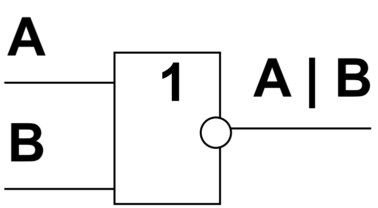
схема «ИЛИ-НЕ»

¬(A∨ B)

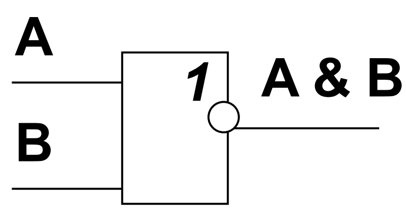
Штрих Шеффера,

схема «И-НЕ»

¬(A ∧ B)



A	B	$A \mid B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



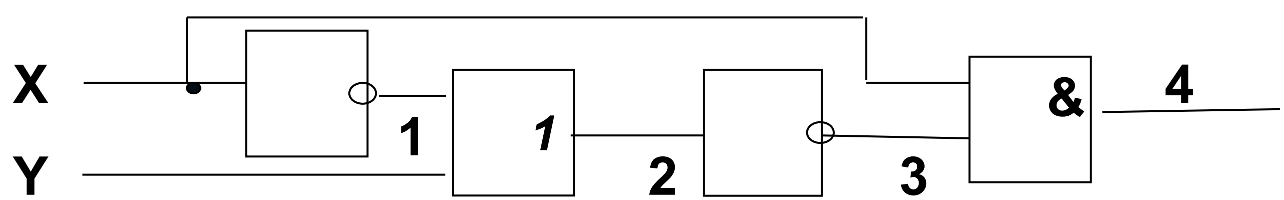
A	B	¬(A ∧ B)
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Функциональная схема, структурная формула

Дискретный преобразователь, который после обработки входных двоичных сигналов выдаёт на выходе сигнал, являющийся значением одной из логических операций, называется **логическим элементом (ЛЭ)**.

Цепочка ЛЭ, в которой выходы одних элементов являются входами других, называется **логическим устройством**

Схема соединения ЛЭ, реализующая логическую функцию, называется **функциональной схемой.**



Формой описания функции, реализуемой логическим устройством, является **структурная формула.**

$$F(X,Y)=\overline{\left(\overline{X}\vee Y\right)}\&X$$

Построение функциональных схем логических устройств

Цепочка логических элементов, в которой выходы одних элементов являются входами других, называется логическим устройством

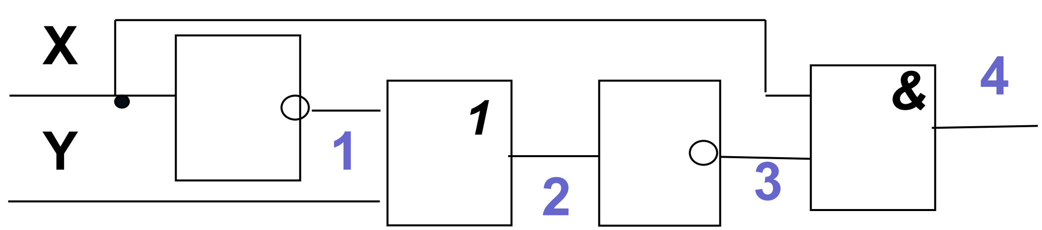
Функциональная схема - схема соединения логических элементов, реализующая логическую функцию,

Формой описания функции, реализуемой логическим устройством, является структурная формула.

Пример. Дана структурная формула:

$$F(X,Y)=\overline{\left(\overline{X}\vee Y\right)}\& X$$

по которой построена функциональная схема:



Построение функциональных схем логических устройств

Цепочка логических элементов, в которой выходы одних элементов являются входами других, называется **логическим устройством**

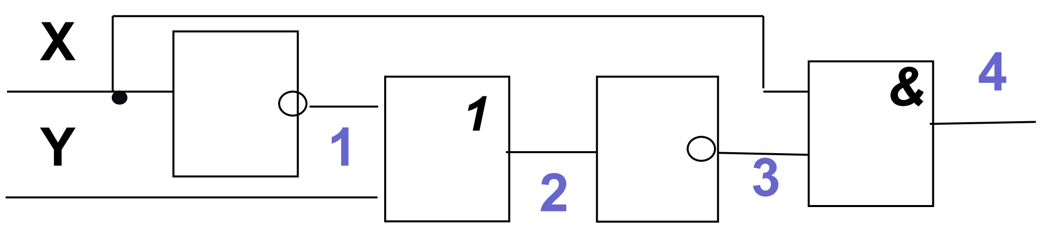
Схема соединения элементов, реализующая логическую функцию, называется **функциональной схемой.**

Формой описания функции, реализуемой логическим устройством, является **структурная формула.**

Пример. Дана структурная формула:

$$F(X,.Y) = \overline{\left(\overline{X} \vee Y\right)} \& X$$

по которой построена функциональная схема:



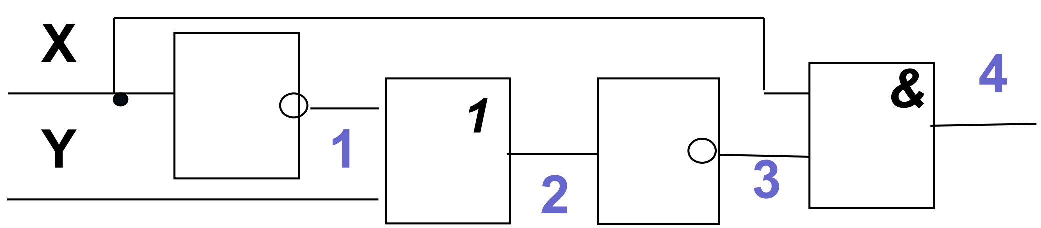
Сравнение таблиц истинности

Для проверки соответствия функциональной схемы и структурной формулы сравним их таблицы истинности:

$$F(X,Y)=\overline{\left(\overline{X}\vee Y\right)}\&\,X$$

X	Y	¬X	¬X∨ Y	¬(¬X∨Y)	F(X.Y)
0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1
1	1	0	1	0	0

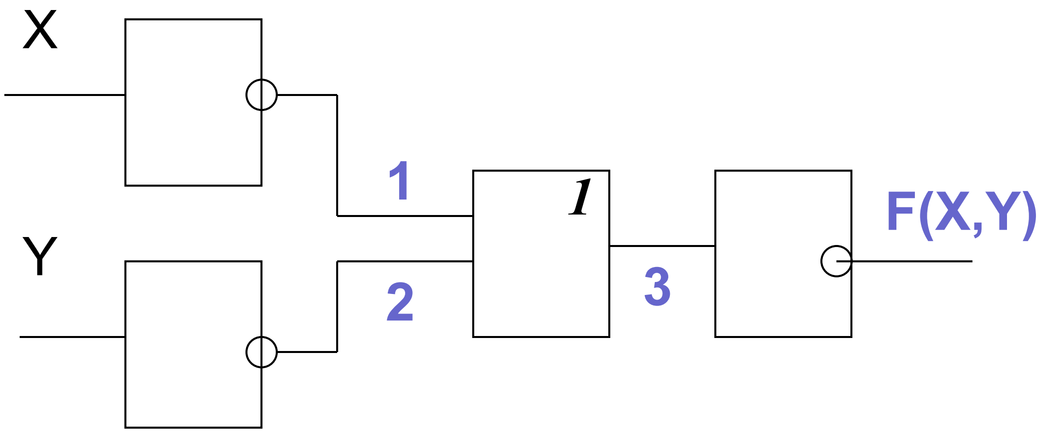
Для функциональной схемы:



X	Y	1	2	3	4
0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1
1	1	0	1	0	0

Определение структурной формулы по функциональной схеме

Имеется функциональная схема. Требуется определить по схеме соответствующую структурную формулу:



Выход 1 – ¬X, Выход 2 – ¬Y, Выход 3 -- ¬ X ∨ ¬ Y,

Выход F(X,Y) – ¬(¬ X ∨ ¬ Y)

Для проверки соответствия схемы и формулы нужно также построить таблицы истинности.

Дизъюнктивная нормальная форма и конъюнктивная нормальная форма

Элементарная конъюнкция – логическое произведение (конъюнкция) аргументов или их отрицаний, среди аргументов могут быть одинаковые.

Пример. $A \& \neg B \& C$ – элементарная конъюнкция

$\neg(A \& \neg B)$ – НЕ элементарная конъюнкция, есть отрицание выражения.

Элементарная дизъюнкция – логическая сумма (дизъюнкция) аргументов или их отрицаний, среди аргументов возможны одинаковые. Примеры. $\neg A \vee B$ или $X \vee \neg Y \vee \neg Z$, но

$X \vee Y \& Z$ НЕ элементарная дизъюнкция, имеется конъюнкция

Всякую дизъюнкцию элементарных конъюнкций назовем дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ)

Пример. $X \& \neg X \vee X \& Y \& \neg Z$; $X \& Y \vee \neg Y \vee X \& Z$

Всякую конъюнкцию элементарных дизъюнкций назовем конъюнктивной нормальной формой (КНФ).

$(X \vee Y \vee X) \& (X \vee Z)$; $X \& (X \vee Y) \& (X \vee Z)$;

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма и совершенная конъюнктивная нормальная форма

Совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ) называется ДНФ, в которой нет одинаковых элементарных конъюнкций и все конъюнкции состоят из одного и того же набора переменных, в который каждая переменная входит только один раз (возможно, с отрицанием).

Пример. X & Y & ¬Z V X & Y & Z , но X & Y V ¬ Y V X & ¬ Z НЕ СДНФ

Совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ) называется КНФ, в которой нет одинаковых элементарных дизъюнкций и все дизъюнкции состоят из одного и того же набора переменных, в который каждая переменная входит только один раз (возможно, с отрицанием).

Пример. (¬X V Y V Z) & (X V ¬ Y V Z),

но (¬X V Y V X) & (¬ X V Z) НЕ СКНФ

Алгоритм получения СДНФ по таблице истинности

Имеется таблица истинности, требуется получить СДНФ

X	У	F(X,Y)
0	0	0
0	1	1*
1	0	1*
1	1	0

1. **Отметить те строки таблицы истинности, в последнем столбце которых стоит 1.**
2. **Выписать для каждой отмеченной строки конъюнкцию всех переменных так: если значение некоторой переменной в данной строке равно 1, то в конъюнкцию включать саму эту переменную, если равно 0, то ее отрицание: ¬X & Y – для 2-й строки, X & ¬ Y - для 3-й строки,**
3. **Все полученные конъюнкции связать в дизъюнкцию:**

(¬ X & Y) V (X & ¬ Y)

Алгоритм получения СКНФ по таблице истинности

Имеется таблица истинности, требуется получить СКНФ

X	У	F(X,Y)
0	0	0*
0	1	1
1	0	1
1	1	0*

1. **Отметить те строки таблицы истинности, в последнем столбце которых стоит 0.**
2. **Выписать для каждой отмеченной строки дизъюнкцию всех переменных так: если значение некоторой переменной в данной строке равно 0, то в конъюнкцию включать саму эту переменную, если равно 1, то ее отрицание: X ⋁ Y – для 1-й строки, ¬ X ⋁ ¬ Y - для 4-й строки,**
3. **Все полученные дизъюнкции связать в конъюнкции:**

(X V Y) & (¬ X ⋁ ¬ Y)