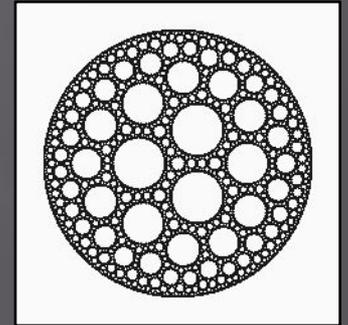
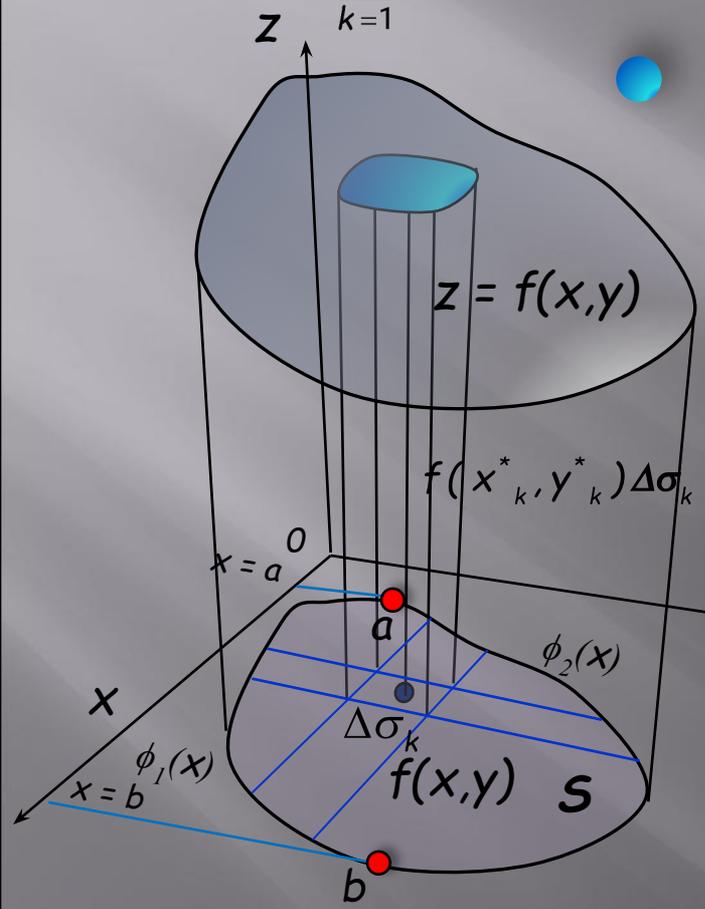


Двойной интеграл



{ двойной интеграл – двукратный интеграл - пример – замена переменной в двойном интеграле – якобиан преобразования – вычисление двойного интеграла в полярной системе координат – примеры }

$$\sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta\sigma_k = f(x_1, y_1) \Delta\sigma_1 + f(x_2, y_2) \Delta\sigma_2 + \dots + f(x_n, y_n) \Delta\sigma_n$$



● Двойной интеграл

Интегральная сумма Римана

$$\iint_S f(x, y) d\sigma = \lim_{\substack{\max \Delta\sigma_k \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*) \Delta\sigma_k$$

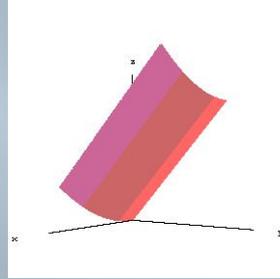
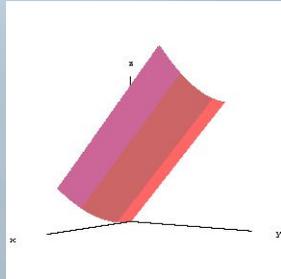
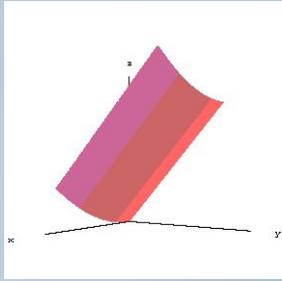
$$\iint_S f(x, y) dx dy = \lim_{\substack{\max \Delta x_k, \Delta y_k \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*) \Delta x_k \Delta y_k =$$

$$= \lim_{\substack{\max \Delta x_i, \Delta y_j \rightarrow 0 \\ m, n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n \Delta x_i \sum_{j=1}^m f(\tilde{x}, y_j) \Delta y_j =$$

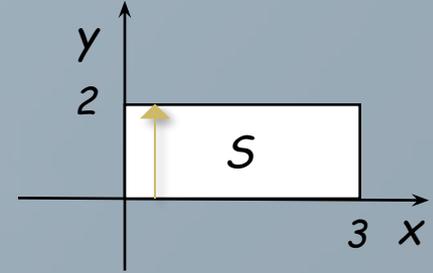
$$= \int_a^b dx \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(\tilde{x}, y) dy \right) \Rightarrow \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dx dy$$

● Двухкратный интеграл

@ Вычислить двойной интеграл: $\iint_S (x^2 + 4y) dx dy$ $S : [0,3] \times [0,2]$



Решение

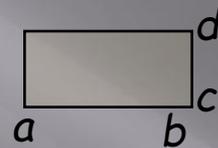


$$\iint_S (x^2 + 4y) dx dy = \int_0^3 \left(\int_0^2 (x^2 + 4y) dy \right) dx = \int_0^3 (x^2 y + 2y^2) \Big|_0^2 dx =$$

$$\int_0^3 (2x^2 + 8) dx = \left(\frac{2x^3}{3} + 8x \right) \Big|_0^3 = 42$$

Объем цилиндрида (цилиндрического бруса)

$$\iint_S f(x, y) d\sigma = \iint_S f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$



$$\iint_S f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

Теорема Фубини

$$\iint_S f(x, y) d\sigma = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy$$

Свойства

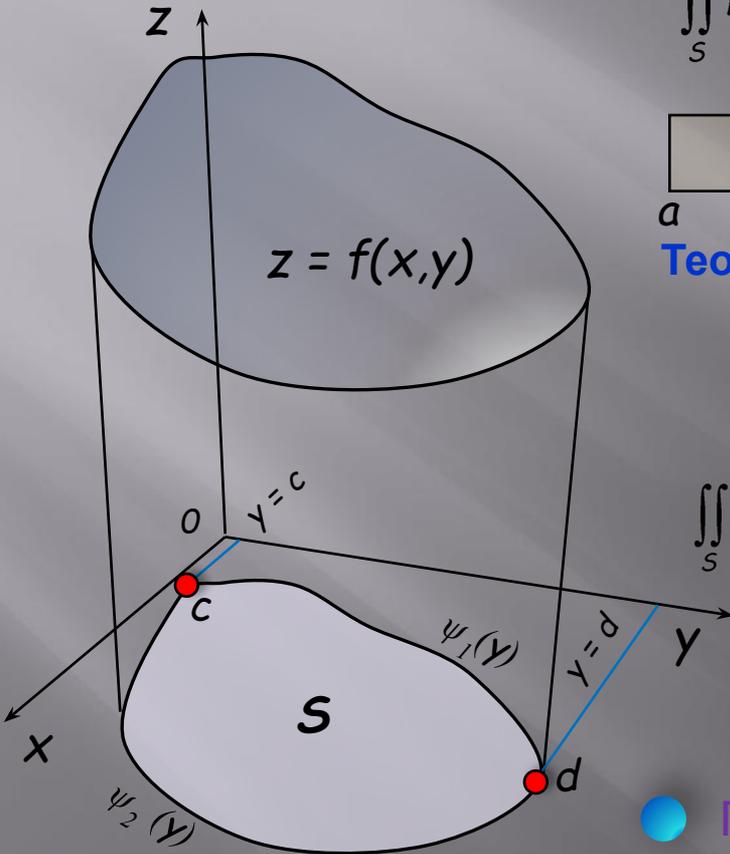
$$\iint_S (af(x, y) + bg(x, y)) d\sigma = a \iint_S f(x, y) d\sigma + b \iint_S g(x, y) d\sigma$$

$$\iint_S f(x, y) d\sigma = \iint_{S_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{S_2} f(x, y) d\sigma$$

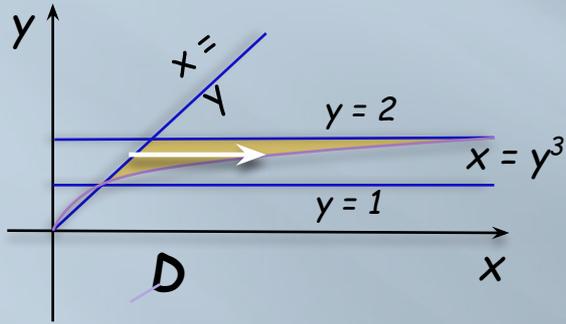
S_1	S_2
-------	-------

$$S = S_1 \cup S_2$$

Площадь плоской фигуры - $\iint_S d\sigma$

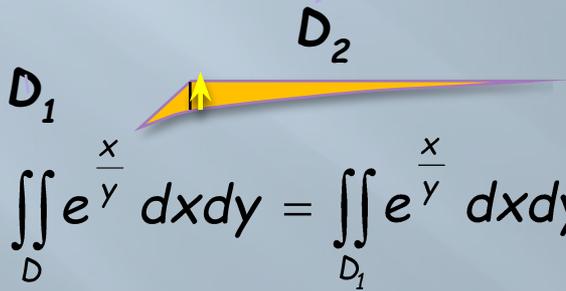


@ Вычислить двойной интеграл: $\iint_D e^{\frac{x}{y}} dx dy$ $D = \{(x, y) \mid 1 \leq y \leq 2, y \leq x \leq y^3\}$



Решение

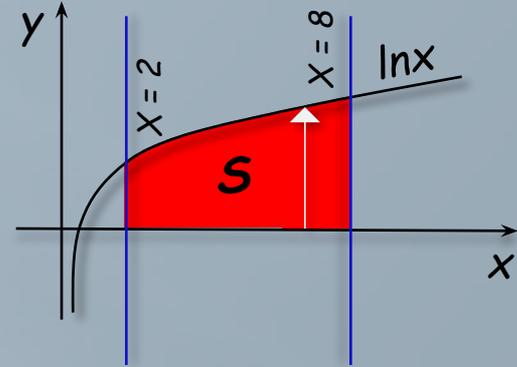
$$\begin{aligned} \iint_D e^{\frac{x}{y}} dx dy &= \int_1^2 \left(\int_y^{y^3} e^{\frac{x}{y}} dx \right) dy = \int_1^2 e^{\frac{x}{y}} y \Big|_y^{y^3} dy = \\ &= \int_1^2 (e^{y^2} y - ye^1) dy = \left(\frac{e^{y^2}}{2} - \frac{y^2 e^1}{2} \right) \Big|_1^2 = \frac{e^4}{2} - 2e^1 \end{aligned}$$



$$\iint_D e^{\frac{x}{y}} dx dy = \iint_{D_1} e^{\frac{x}{y}} dx dy + \iint_{D_2} e^{\frac{x}{y}} dx dy = \int_1^2 \left(\int_{\sqrt[3]{x}}^x e^{\frac{x}{y}} dy \right) dx + \int_2^8 \left(\int_{\sqrt[3]{x}}^2 e^{\frac{x}{y}} dy \right) dx$$

Второй способ вычисления интеграла - неэффективен

@ Вычислить $\int_2^8 \int_0^{\ln x} e^y dx dy$

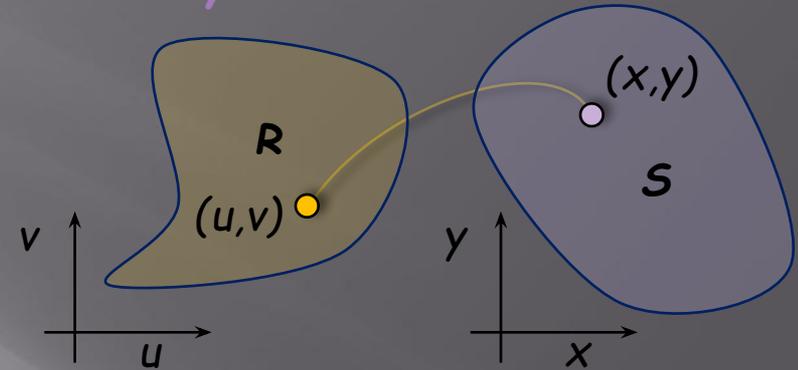
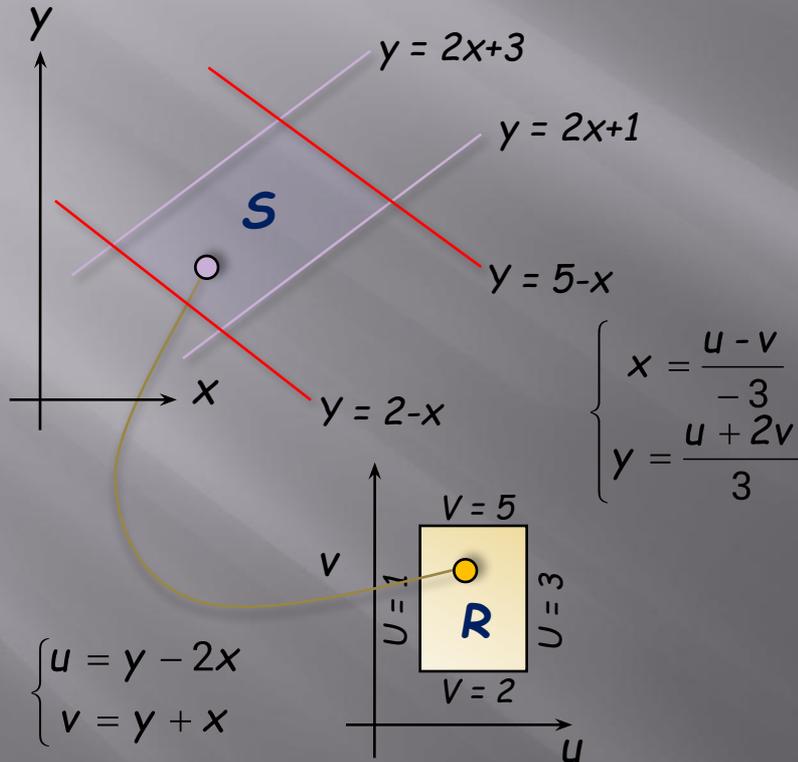


Решение

$$\int_2^8 \int_0^{\ln x} e^y dx dy = \int_2^8 \left(\int_0^{\ln x} e^y dy \right) dx = \int_2^8 \left(e^y \Big|_0^{\ln x} \right) dx = \int_2^8 (x - 1) dx = \frac{x^2}{2} - x \Big|_2^8 = 24$$

Замена переменных в двойном интеграле

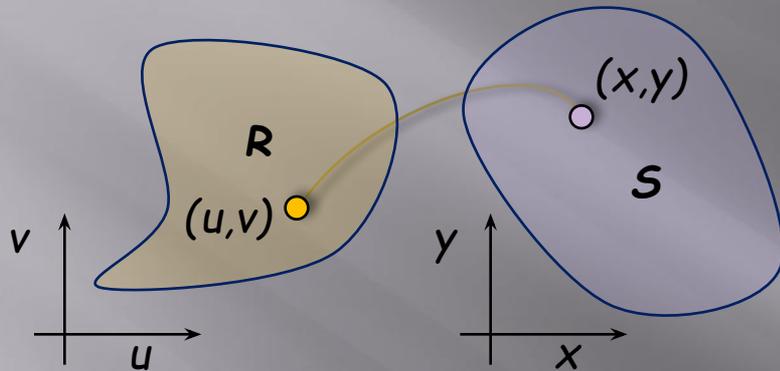
- Замена переменных в двойном интеграле определяется отображением T области R в плоскости uv в область S плоскости xy .



Пример

Пусть S – область, ограниченная прямыми линиями $y = 2x + 3$, $y = 2x + 1$, $y = 5 - x$ and $y = 2 - x$.
Найти преобразование T с отображением области R в плоскости uv на S , где R – прямоугольная область с границами, параллельными осям u, v .

- Якобианом преобразования называется определитель:



$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$|J| = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$$

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right|^{-1}$$

Замена переменной в двойном интеграле

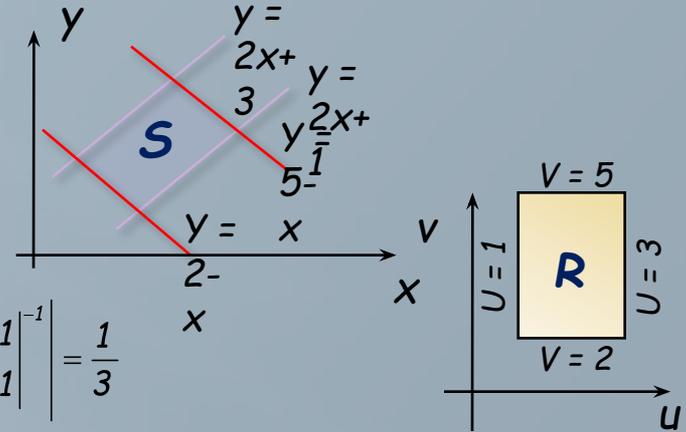
$$\iint_S f(x, y) dx dy = \iint_R f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \iint_R f(x(u, v), y(u, v)) |J| du dv$$

@ Вычислить $\iint_S (x^2 + 2xy) dx dy$

Решение

$$S: \begin{cases} y \geq 2x + 1 \\ y \leq 2x + 3 \\ y \geq 2 - x \\ y \leq 5 - x \end{cases}$$



$$\begin{cases} u = y - 2x \\ v = y + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{u-v}{-3} \\ y = \frac{u+2v}{3} \end{cases}$$

$$|J| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}$$

$$|J| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}$$

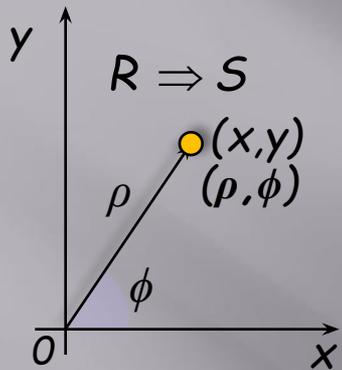
$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right|^{-1}$$

$$\iint_S (x^2 + 2xy) dx dy = \iint_R \left(\frac{(u-v)^2}{9} + 2 \frac{(u-v)(u+2v)}{9} \right) \frac{1}{3} du dv = \frac{1}{27} \iint_R (u^2 - 2uv + v^2 + 2u^2 - 2uv + 4uv - 4v^2) du dv =$$

$$\frac{1}{9} \iint_R (u^2 - v^2) du dv = \frac{1}{9} \int_1^3 \left(\int_2^5 (u^2 - v^2) dv \right) du = \frac{1}{9} \int_1^3 \left(u^2 v - \frac{v^3}{3} \right) \Big|_2^5 du = \frac{1}{27} \int_1^3 (9u^2 - 117u) du = \frac{1}{27} (3u^3 - 117u) \Big|_1^3 =$$

$$\frac{1}{9} (u^3 - 39u) \Big|_1^3 = \frac{1}{9} (26 - 78) = -\frac{52}{9}$$

Двойной интеграл в полярной системе координат



Преобразование T : отображение области $R: \rho, \phi$ на $S: x, y$.

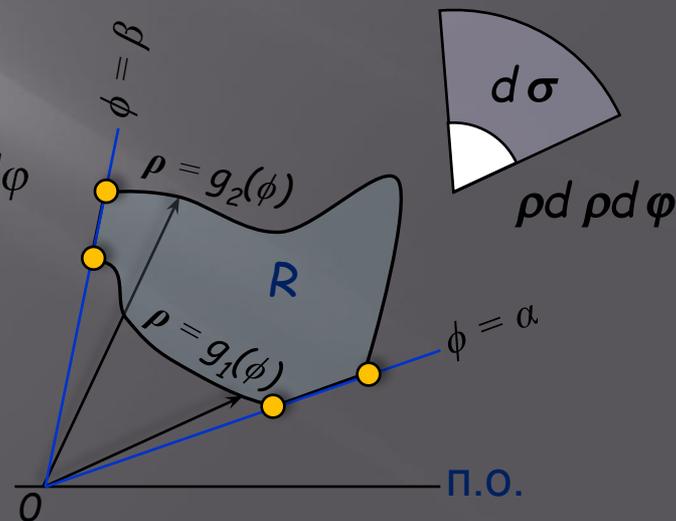
$$T: \begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$$

Якобиан преобразования: $|J| = \rho$

$$|J| = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \varphi)} \right| = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho$$

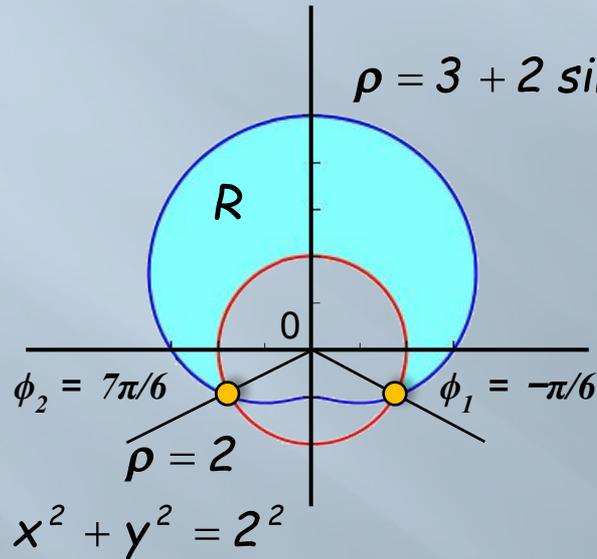
$$\iint_S f(x, y) dx dy = \iint_R f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi$$

$$\iint_R f(\rho, \varphi) \rho d\rho d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g_1(\varphi)}^{g_2(\varphi)} f(\rho, \varphi) \rho d\rho d\varphi$$



@ Найти площадь плоской фигуры, ограниченной кривой $\rho = 3 + 2 \sin \varphi$ и лежащей вне круга $x^2 + y^2 \leq 4$

Решение



$$2 = 3 + 2 \sin \varphi \Rightarrow \sin \varphi = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{7\pi}{6} \quad 2 \leq \rho \leq 3 + 2 \sin \varphi$$

$$S = \iint_R d\sigma \quad S = \iint_R \rho d\rho d\varphi = \int_{-\pi/6}^{7\pi/6} \int_2^{3+2\sin\varphi} \rho d\rho d\varphi$$

$$= \int_{-\pi/6}^{7\pi/6} \frac{\rho^2}{2} \Big|_2^{3+2\sin\varphi} d\varphi = \int_{-\pi/6}^{7\pi/6} \left(\frac{7}{2} + 6\sin\varphi - \cos 2\varphi \right) d\varphi$$

$$= \frac{7}{2} \varphi - 6 \cos \varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \Big|_{-\pi/6}^{7\pi/6} = \frac{11\sqrt{3}}{2} + \frac{14\pi}{3} = 24.187$$