

*Полный дифференциал функции  
нескольких переменных*

Лекция 2

# ***Полное приращение функции 2-х переменных***

Если обеим переменным дать приращение, то функция получит полное приращение

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

# Определение дифференцируемой функции

Функция  $z = f(x, y)$  называется **дифференцируемой в точке  $M(x, y)$** , если ее полное приращение можно представить в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho),$$

где  $\Delta x$  и  $\Delta y$  - произвольные приращения аргументов  $x$  и  $y$  в некоторой окрестности точки  $M(x, y)$ ,  $A$  и  $B$  – постоянные, независящие от  $\Delta x$  и  $\Delta y$ ,  $o(\rho)$ -

бесконечно малая более высокого порядка, чем

$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$  - расстояние между  $M(x, y)$  и

$$M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$$

# Определение дифференциала

Главная линейная относительно  $\Delta x$  и  $\Delta y$  часть полного приращения функции  $z = f(x, y)$  называется **полным дифференциалом** этой функции и обозначается  $dz$  или  $df(x, y)$  .  
Таким образом,  $dz = A\Delta x + B\Delta y$  .

# Формула для вычисления дифференциала

Если функция  $z = f(x, y)$  дифференцируема в точке  $M(x, y)$ , то она имеет в этой точке частные производные  $f'_x(x, y)$  и  $f'_y(x, y)$ , причем  $f'_x(x, y) = A$ , а  $f'_y(x, y) = B$ .  
Так что,  $\Delta z = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y + o(\rho)$

$$dz = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y .$$

Если положить  $\Delta x = dx$ ,  $\Delta y = dy$ , то

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy$$

При малых  $\rho$   $\Delta z \approx dz$  , то есть

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \approx f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y \quad ,$$

или

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y \quad .$$

Пример. Вычислить приближенно

$$\ln\left(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1\right) \quad .$$

# Дифференциалы высшего порядка

Дифференциалом второго порядка функции  $z=f(x,y)$  называется

$$d^2 z = d(dz)$$

Вообще:  $d^n z = d(d^{n-1} z)$

Если  $x$  и  $y$  независимые переменные, то

$$\cdot \quad d^2 z = z''_{xx} dx^2 + 2z''_{xy} dx dy + z''_{yy} dy^2$$

# Экстремумы функции двух переменных

**Определение.** Говорят, что в точке  $P_0(x_0, y_0)$  функция  $f(x, y)$  имеет максимум, если существует такая окрестность этой точки, что для всех точек  $P(x, y)$  этой окрестности, отличных от  $P_0(x_0, y_0)$ , выполнено неравенство

$$f(P_0) > f(P).$$

Аналогично определяется минимум функции. Минимум и максимум функции называются ее экстремумами.



# ***Экстремумы функции двух переменных***

***Теорема (необходимое условие экстремума)***. В точке экстремума функции нескольких переменных каждая ее частная производная либо равна нулю, либо не существует.

Точки, в которых выполнены эти условия, называются ***критическими***.

# Достаточные условия экстремума функции двух переменных

**Теорема.** Пусть функция  $z=f(x,y)$  определена и имеет непрерывные частные производные до 3-го порядка в некоторой окрестности точки  $M_0(x_0, y_0)$  в которой  $z'_x = z'_y = 0$ . Если при этом в этой точке выполнено условие  $\Delta = z''_{xx} z''_{yy} - (z''_{xy})^2 > 0$ , то точка  $M_0$  является точкой экстремума функции, причем точкой максимума, если  $z''_{xx} < 0$ , и точкой минимума, если  $z''_{xx} > 0$ .

Если же в этой точке  $\Delta = z''_{xx} z''_{yy} - (z''_{xy})^2 < 0$ , то экстремума в точке  $M_0$  нет.

В том случае, если  $\Delta = z''_{xx} z''_{yy} - (z''_{xy})^2 = 0$  в точке  $M_0$  теорема ответа не дает.

# Пример

Исследовать на экстремум функцию

$$z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}, \text{ где } x > 0 \text{ и } y > 0.$$

# ***Наибольшее и наименьшее значения функции***

***Определение.*** Наименьшее или наибольшее значение функции в данной области называется абсолютным экстремумом функции (абсолютным минимумом или абсолютным максимумом соответственно) в этой области.

Известно, что непрерывная в замкнутой ограниченной области функция достигает в ней своих наибольшего и наименьшего значений.

Абсолютный экстремум достигается функцией либо в критических точках, либо на границе области.

Пусть функция непрерывна в замкнутой ограниченной области  $G$ , дифференцируема внутри этой области. *Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции в этой области, нужно:*

- 1) найти критические точки, принадлежащие этой области, и вычислить в них значения функции;
- 2) найти наибольшее и наименьшее значения функции на границе области;
- 3) из всех найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

# Пример

Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = x^2 + 3y^2 + x - y$$

в треугольнике, ограниченном прямыми

$$x = 0, y = 0, x + y = 1.$$

# *Скалярное поле*

## Лекция 3



# Основные определения

Пусть в области  $D$  пространства  $Oxyz$  задана функция  $u=u(x,y,z)$ . В этом случае говорят, что в области  $D$  задано **скалярное поле**, а саму функцию  $u=u(x,y,z)$  называют функцией поля. Например, поле давлений, температур и т.д.

# *Основные определения*

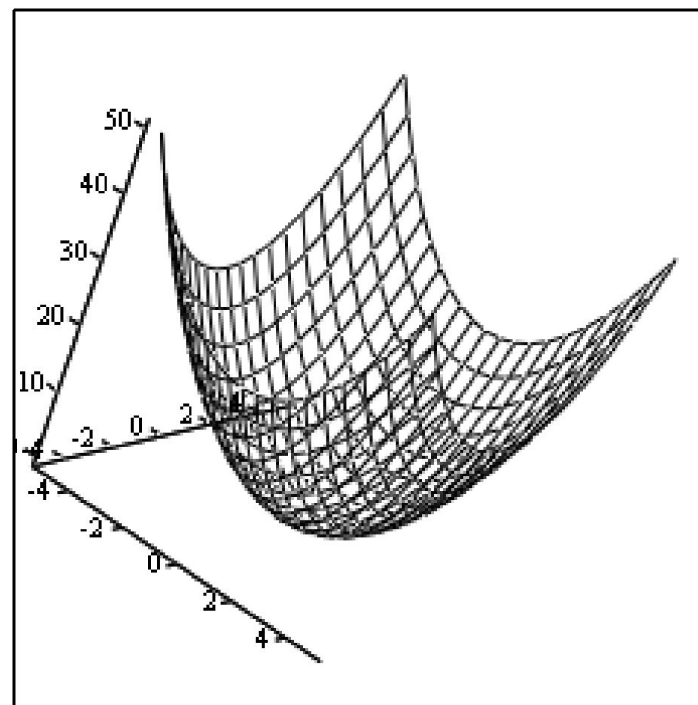
Множество точек  $M$  области  $D$ , для которых скалярное поле сохраняет постоянное значение, т. е.  $u(M)=C$ , называется *поверхностью уровня* ( или изоповерхностью) скалярного поля.

Если область  $D$  расположена на плоскости  $Oxy$ , то поле  $u=u(x,y)$  является плоским.

Поверхности уровня называют в этом случае *линиями уровня*.

Пусть

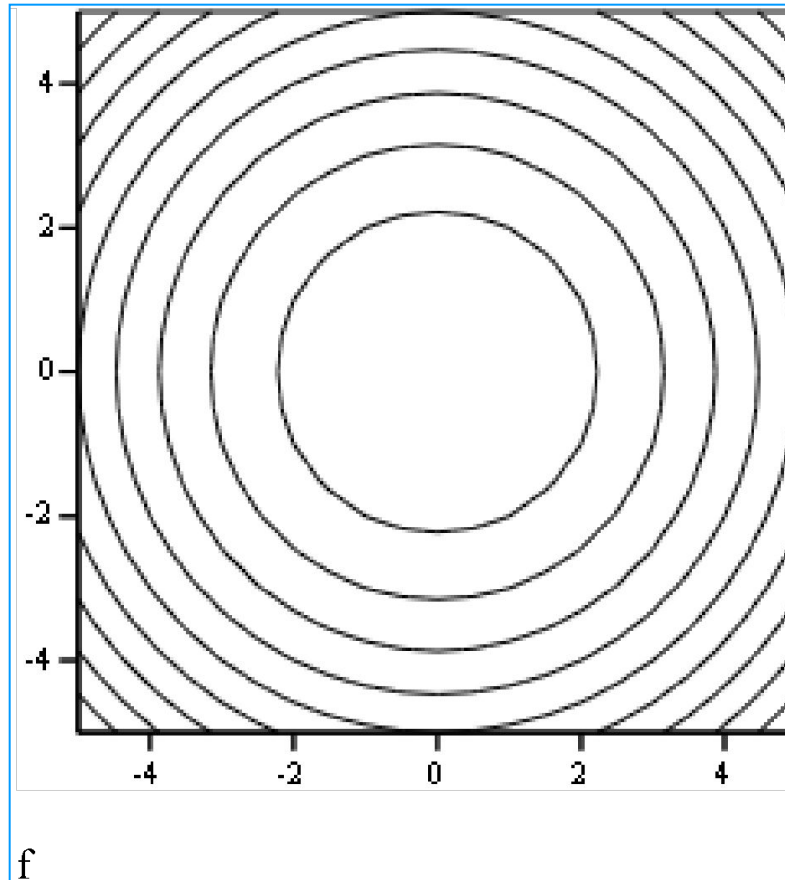
$$f(x, y) := x^2 + y^2$$



f

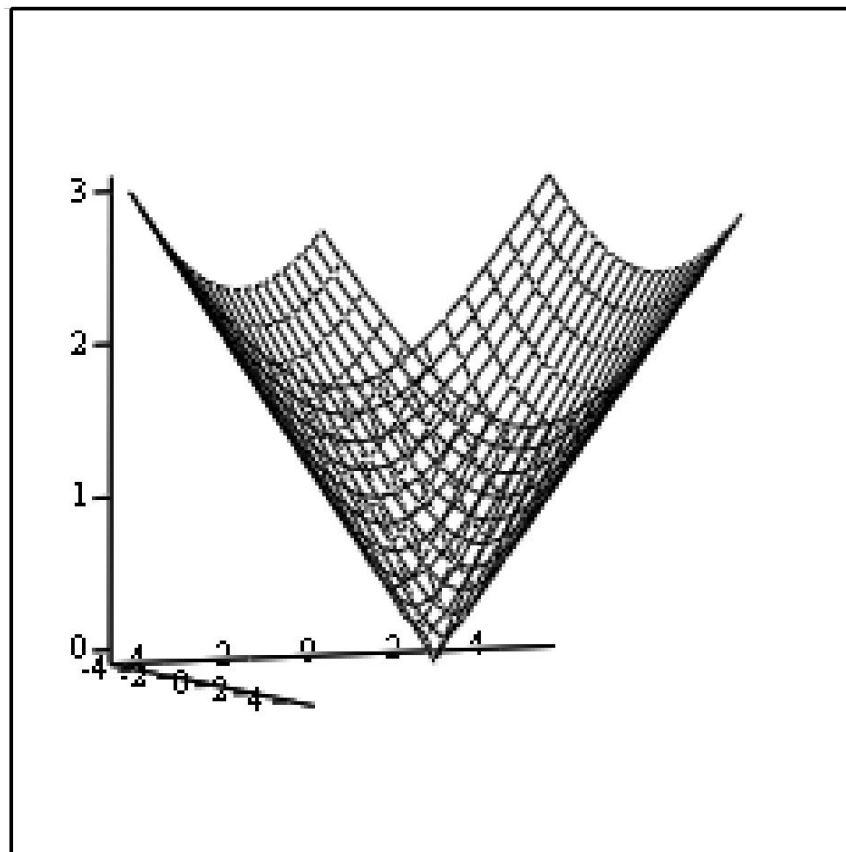
# Линии уровня

Пусть  $z = x^2 + y^2$ . Линии уровня этой поверхности имеют вид



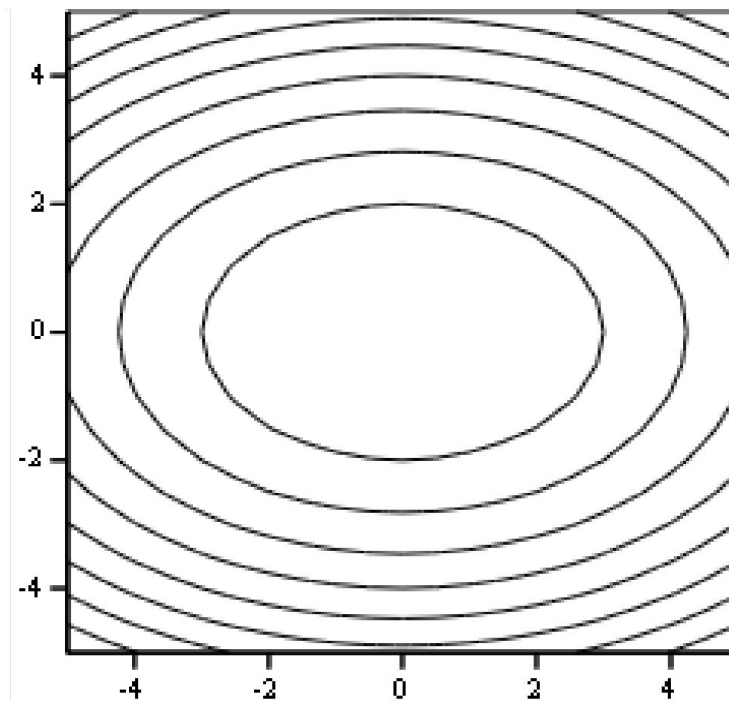
Пусть дан конус

$$f(x, y) := \left( \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}}$$



f

# *Линии уровня конуса*



f

Пусть задана дифференцируемая функция  $u = u(x, y, z)$  скалярного поля.

Рассмотрим точку  $P(x, y, z)$  этого поля и луч  $\vec{r}$ , выходящий из точки  $P$  в направлении единичного вектора

$$\vec{r}^0 = (\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma),$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  — углы, образованные вектором  $\vec{r}^0$  с осями координат.



# Определение

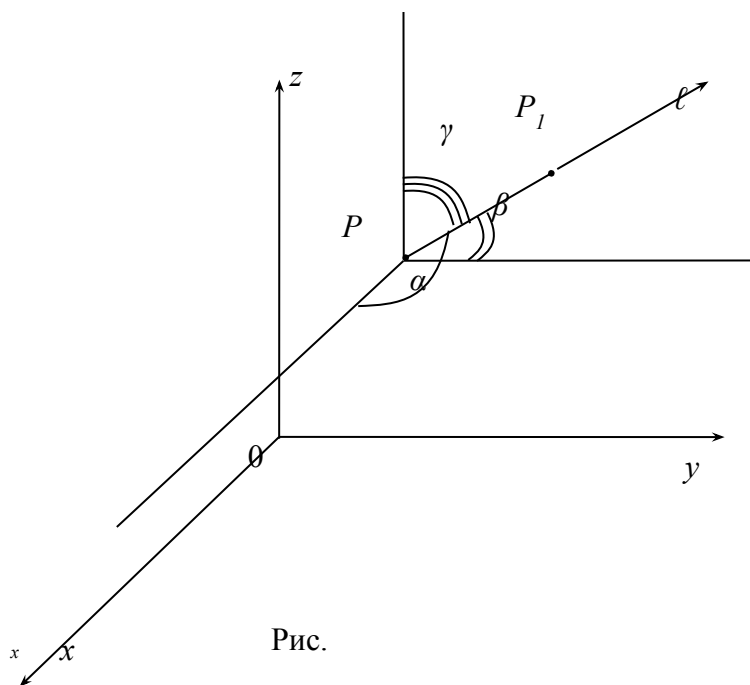


Рис.

Пусть  $P_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$   
– какая-нибудь другая  
точка этого луча.

Обозначим

$$\Delta r = PP_1 = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

– расстояние между  
точками  $P$  и  $P_1$ ;  $\Delta r$   
называют *величиной*  
*перемещения*.

*Приращением функции*  
*в направлении*  $\vec{r}$

назовем разность  
$$\Delta_{\vec{r}} u = u(P_1) - u(P)$$

Производной функции  $u = u(x, y, z)$   
 в точке  $P$  по направлению  $\vec{n}$   
 называется предел отношения  
 приращения функции в направлении  $\vec{n}$   
 к величине перемещения  $\Delta r$   
 при  $\Delta r \rightarrow 0$  :

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta_{\vec{n}} u}{\Delta r}$$

# Вычисление производной по направлению

Формула вычисления производной по направлению:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma, \quad \text{где}$$

$$\cos \alpha = \frac{l_x}{|l|}, \quad \cos \beta = \frac{l_y}{|l|}, \quad \cos \gamma = \frac{l_z}{|l|},$$

$$|l| = \sqrt{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2}.$$

# Градиент скалярного поля

**Градиентом** скалярного поля  $u=u(x,y,z)$ , где  $u=u(x,y,z)$ - дифференцируемая функция, называется вектор с координатами

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \quad .$$

Таким образом,  $grad u = \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right)$

или  $grad u = \frac{\partial u}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \bar{k} \quad .$

# Пример

Найти градиент функции  $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  в точке  $M(6, 2, 3)$ .

**Решение.** Вычислим градиент функции.

$$u'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad u'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$u'_z = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\text{Тогда } \text{grad } u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \bar{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \bar{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \bar{k}$$

$$\text{А в точке } M \quad \text{gradu} = \frac{6}{7} \bar{i} + \frac{2}{7} \bar{j} + \frac{3}{7} \bar{k}.$$

# *Направление градиента*

***Теорема.*** Производная  $u'_l$  функции по направлению равна проекции градиента этой функции на данное направление (в соответствующей точке).

# *Направление градиента*

Так как производная по направлению представляет собой скорость изменения функции в данном направлении, а проекция вектора на другой вектор имеет максимальное значение, если оба вектора совпадают по направлению, то градиент функции в данной точке указывает направление наиболее быстрого возрастания функции.

# **Величина градиента плоского скалярного поля**

Величина градиента плоского скалярного поля, т.е.

$$|\text{grad } u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}$$

обозначается  $\text{tg}\phi$  и определяет крутизну наибольшего ската или подъема поверхности  $u = f(x, y)$ .



Градиент скалярного поля в данной точке по величине и направлению равен максимальной скорости изменения поля в этой точке, т. е.

$$\max_l \frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial l^*} = |\mathit{gradu}|$$

где  $\overline{l^*} \uparrow \mathit{gradu}$  .

# Направление градиента

Точка  $P$ , в которой  $\text{gradu}(P)=0$ , называется *особой* точкой скалярного поля. В противном случае эту точку называют *неособой* или *обыкновенной* точкой поля.

*Теорема.* Во всякой неособой точке плоского скалярного поля градиент поля направлен по нормали к линии уровня, проходящей через эту точку, в сторону возрастания поля.