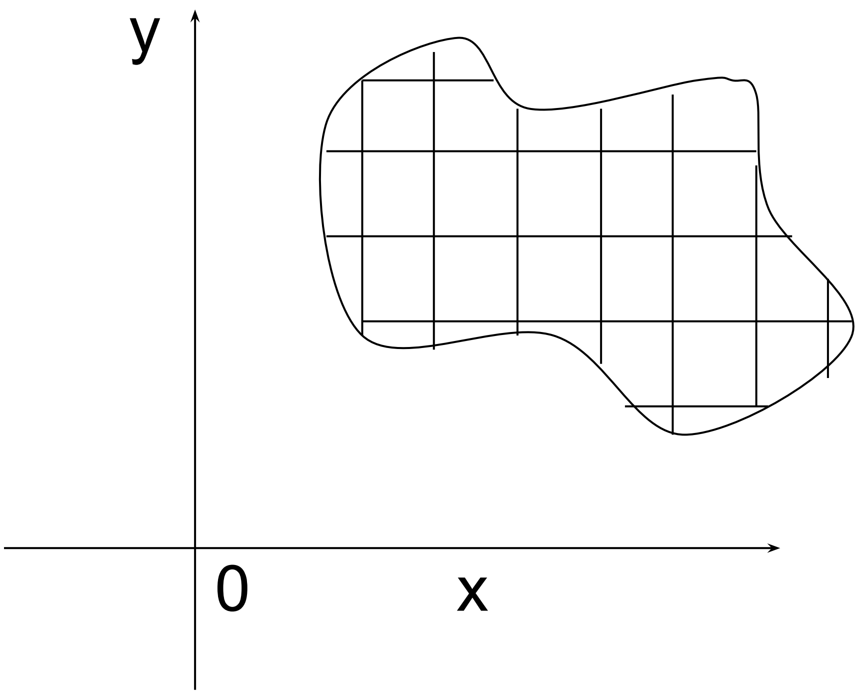
КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Как известно, интегрирование является процессом суммирования. Однако суммирование может производится неоднократно, что приводит нас к понятию кратных интегралов.

Двойные интегралы.



- Рассмотрим на плоскости некоторую замкнутую кривую, уравнение которой $f(x, y) = 0$.
- Совокупность всех точек, лежащих внутри кривой и на самой кривой назовем замкнутой областью Δ. Если выбрать точки области без учета точек, лежащих на кривой, область будет называется незамкнутой областью Δ.
- С геометрической точки зрения Δ - площадь фигуры, ограниченной контуром.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

- Площадь фигуры S делим на элементарные прямоугольники, площади которых равны $S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$
- В каждой частичной области возьмем произвольную точку $P(x_i, y_i)$ и составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) \cdot S_i;$$

- где где f – функция непрерывная и однозначная для всех точек области Δ.
- Если бесконечно увеличивать количество частичных областей Δ_i, тогда, очевидно, площадь каждого частичного участка S_i стремится к нулю.

Определение:

- **Определение:** Если при стремлении к нулю шага разбиения области Δ интегральные суммы $\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) \cdot S_i$ имеют конечный предел, то этот предел называется **двойным интегралом** от функции f(x, y) по области Δ.

т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) S_i = \iint_{\Delta} f(x, y)\,dxdy$$

С учетом того, что $S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$ получаем:

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) S_i = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) \Delta y_i \Delta x_i$$

$$\iint_{\Delta} f(x, y)\,dydx = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \sum \sum_{\Delta} f(x, y) \Delta y \Delta x$$

Условия существования двойного интеграла.

- **Теорема.** *Если функция f(x, y) непрерывна в замкнутой области Δ, то двойной интеграл* $\iint_{\Delta} f(x,y)\,d\Delta$ *существует.*
- **Теорема.** *Если функция f(x, y) ограничена в замкнутой области Δ и непрерывна в ней всюду, кроме конечного числа кусочно – гладких линий, то двойной интеграл* $\iint_{\Delta} f(x,y)\,d\Delta$ *существует.*

Свойства двойного интеграла.

- 1) $\iint\limits_{\Delta}[f_1(x,y)+f_2(x,y)-f_3(x,y)]dydx=\iint\limits_{\Delta} f_1(x,y)dydx+\iint\limits_{\Delta} f_2(x,y)dydx-\iint\limits_{\Delta} f_3(x,y)dydx$

- 2) $\iint\limits_{\Delta} kf(x,y)dydx=k\iint\limits_{\Delta} f(x,y)dydx$

- 3) Если $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$, то

$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)dydx=\iint\limits_{\Delta_1} f(x,y)dydx+\iint\limits_{\Delta_2} f(x,y)dydx$$

- 4) Теорема о среднем. Двойной интеграл от функции f(x, y) равен произведению значения этой функции в некоторой точке области интегрирования на площадь области интегрирования.

$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)dydx= f(x_0,y_0)\cdot S$$

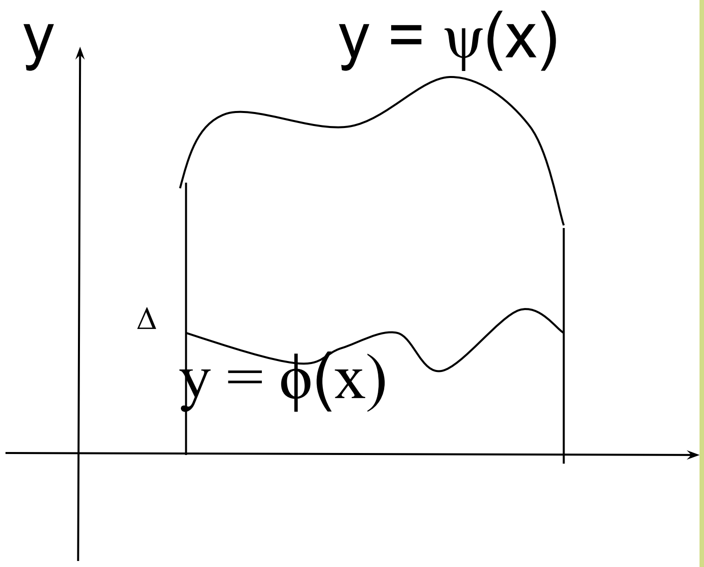
Свойства двойного интеграла.

- 5) Если f(x, y) ≥ 0 в области Δ, то $\iint\limits_{\Delta} f(x, y)\,dydx \geq 0$
- 6) Если $f_1(x, y) \leq f_2(x, y)$, то

$$\iint\limits_{\Delta} f_1(x, y)\,dydx \leq \iint\limits_{\Delta} f_2(x, y)\,dydx$$

- 7) $\left|\iint\limits_{\Delta} f(x, y)\,dydx\right| \leq \iint\limits_{\Delta} |f(x, y)|\,dydx$

Вычисление двойного интеграла.

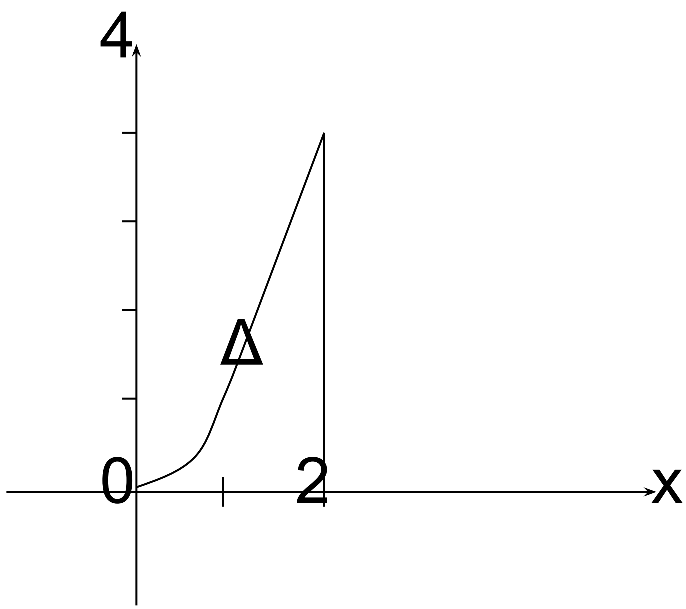


- **Теорема.** *Если функция $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области Δ, ограниченной линиями $x = a$, $x = b$, $(a < b)$, $y = \phi(x)$, $y = \psi(x)$, где ϕ и ψ - непрерывные функции и $\phi \le \psi$, тогда*

$$\iint_{\Delta} f(x, y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy$$

Двойной интеграл повторный интеграл

Пример.



- Вычислить интеграл , $\iint\limits_{\Delta}(x-y)dxdy$ если область Δ ограничена линиями:

  y = 0, y = x^2, x = 2.

Решение:

$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)dxdy = \int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{x^2}(x-y)dy = \int\limits_0^2 \left(xy-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=x^2} dx = \int\limits_0^2 \left(x^3-\frac{x^4}{2}\right)dx = \left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{10}\right)\Bigg|_0^2 =$$

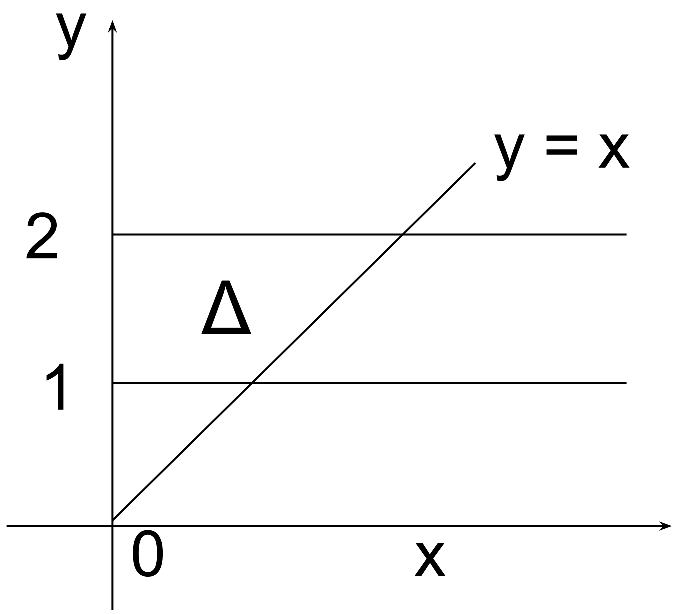
$$= 4-3{,}2 = 0{,}8$$

Вычисление двойного интеграла

- **Теорема.** *Если функция f(x, y) непрерывна в замкнутой области Δ, ограниченной линиями y = c, y = d (c < d), x = Φ(y), x = Ψ(y) (Φ(y) ≤ Ψ(y)), то*

$$\iint\limits_{\Delta} f(x, y)\,dx\,dy = \int_{c}^{d} dy \int_{\Phi(y)}^{\Psi(y)} f(x, y)\,dx$$

Пример:



- Вычислить интеграл , $\iint\limits_{\Delta}(x^2+y^2)dxdy$ если область Δ ограничена линиями

  y = x, x = 0, y = 1, y = 2.

<u>Решение:</u>

$$\iint\limits_{\Delta}(x^2+y^2)dxdy=\int\limits_1^2 dy\int\limits_0^x (x^2+y^2)dx=\int\limits_1^2\left(\frac{x^3}{3}+y^2x\right)\Bigg|_0^y dy=\int\limits_1^2\frac{4}{3}y^3dy=\frac{4}{12}y^4\Big|_1^2=\frac{64}{12}-\frac{4}{12}=5$$

Пример.

- Вычислить интеграл $\iint\limits_{\Delta}(3x^2-2xy+y)dxdy$, если область интегрирования Δ ограничена линиями

  x = 0, x = y^2, y = 2.

- Решение:

$$\iint\limits_{\Delta}(3x^2-2xy+y)dxdy=$$

$$=\int_0^2 dy\int_0^{y^2}(3x^2-2xy+y)dx=\int_0^2 (x^3-yx^2+yx)\Big|_0^{y^2}dy=$$

$$=\int_0^2 (y^6-y^5+y^3)dy=\left(\frac{y^7}{7}-\frac{y^6}{6}+\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^2=\frac{244}{21}$$

Замена переменных в двойном интеграле.

- Рассмотрим двойной интеграл вида $\iint\limits_{\Delta} F(x, y)dydx$, где переменная x изменяется в пределах от a до b, а переменная y – от $y_1(x)$ до $y_2(x)$, т.е.

$$\iint\limits_{\Delta} F(x,y)dydx = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} F(x,y)dy$$

Положим x = x(u, v); y = y(u, v), тогда

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\,|J|\,dudv\,,$$

где $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$.

- Т.к. при первом интегрировании приведенное выше выражение для dx принимает вид $dx = \frac{\partial f}{\partial u} du$ (при первом интегрировании полагаем v = const,

  dv = 0), то при изменении порядка интегрирования, получаем соотношение:

$$\iint\limits_{\Delta} F(x, y) dy dx = \int\limits_{V_1}^{V_2} dv \int\limits_{\Theta_1(v)}^{\Theta_2(v)} F(f(u, v), \varphi(u, v)) \cdot |i| \cdot du$$

Двойной интеграл в полярных координатах.

- Воспользуемся формулой замены переменных:

$$\iint\limits_{\Delta} F(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{\Delta} F(f(u,v),\varphi(u,v))\,|i|\,dudv$$

При этом известно, что $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$

В этом случае Якобиан имеет вид:

$$|i| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta = \rho$$

Тогда $\iint\limits_{\Delta} F(x,y)dxdy = \iint\limits_{\tau} F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta = \iint\limits_{\tau} f(\rho,\theta)\rho d\rho d\theta$

Здесь τ - новая область значений,

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \qquad \theta = arctg\frac{y}{x};$$

Тройной интеграл.

$$\iiint\limits_{r} f(x,y,z)dxdydz = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0\\ \Delta z\to 0}} \sum\sum_{v}\sum \quad f(x,y,z)\Delta x\Delta y\Delta z$$

- Единственное отличие заключается в том, что при нахождении тройного интеграла интегрирование ведется не по двум, а по трем переменным, а областью интегрирования является не часть плоскости, а некоторая область в техмерном пространстве.
- Суммирование производится по области v, которая ограничена некоторой поверхностью $\phi(x, y, z) = 0$.

$$\iiint\limits_{r} f(x,y,z)dxdydz = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} f(x,y,z)dzdydx$$

Здесь x_1 и x_2 – постоянные величины, y_1 и y_2 – могут быть некоторыми функциями от x или постоянными величинами, z_1 и z_2 – могут быть функциями от x и y или постоянными величинами.

Пример.

- Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} \int\limits_0^{xy} x^2 yzdzdydx$

Решение:

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} \int\limits_0^{xy} x^2 yzdzdydx = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} x^2 y \left(\frac{z^2}{2} \Big|_0^{xy} \right) dydx = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} x^2 y x^2 y^2 dydx =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} x^4 y^3 dydx = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 x^4 \left(\frac{y^4}{4} \Big|_0^{x^2} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \frac{x^4 x^8}{4} dx = \frac{1}{8} \int\limits_0^1 x^{12} dx = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{13} x^{13} \Big|_0^1 = \frac{1}{104}.$$

Замена переменных в тройном интеграле.

- Операция замены переменных в тройном интеграле аналогична соответсвующей операции для двойного интеграла.

  Можно записать:

$$\iiint_{r} F(x, y, z)\,dxdydz =$$

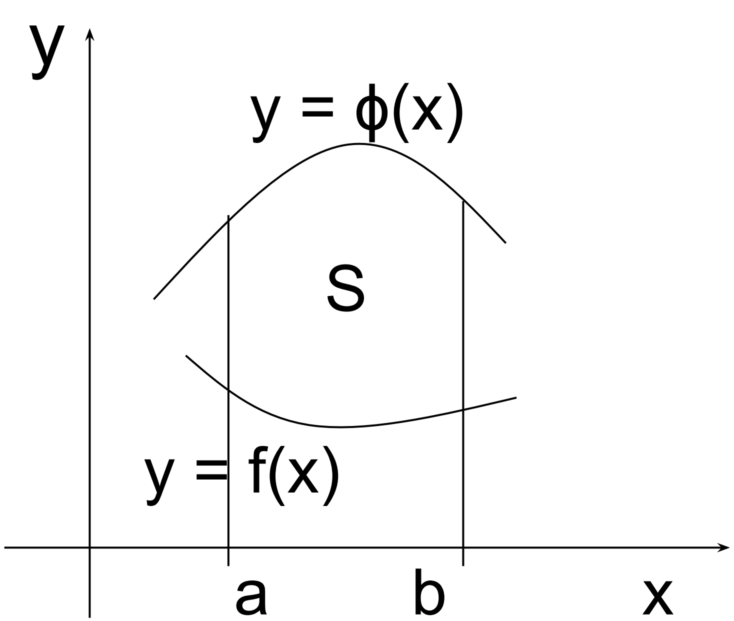
$$= \iiint_{r} F(f(u, v, w), \varphi(u, v, w), \psi(u, v, w)) \cdot |i| \cdot dudvdw$$

где

$$|i| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Геометрические и физические приложения кратных интегралов.

1) Вычисление площадей в декартовых координатах.



Площадь S, показанная на рисунке может быть вычислена с помощью двойного интеграла по формуле:

$$S = \int_a^b \int_{f(x)}^{\varphi(x)} dy dx$$

- Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

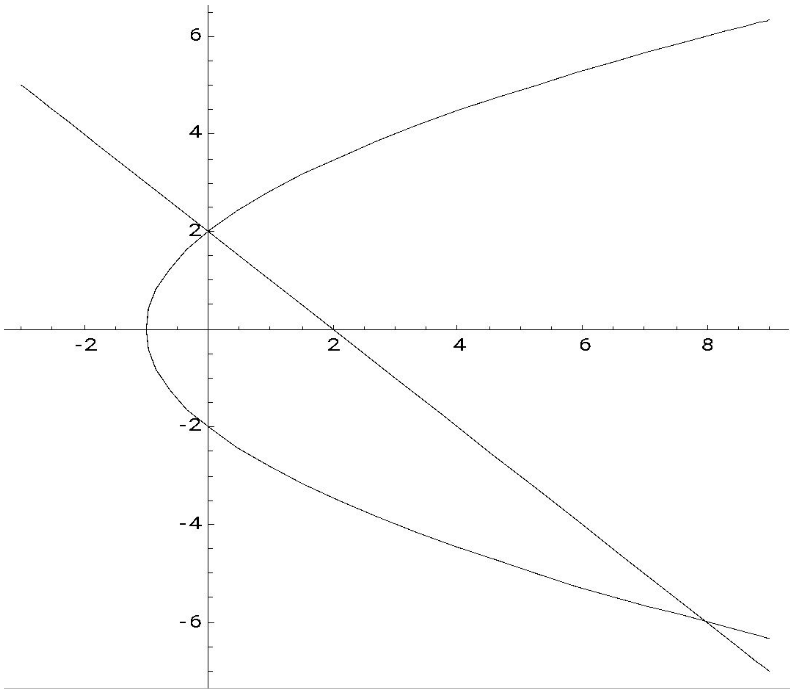
  $y^2 = 4x + 4$; $x + y - 2 = 0$.

  <u>**Решение:**</u> построим графики заданных функций:

  Линии пересекаются в двух точках – (0, 2) и (8, -6). Таким образом, область интегрирования ограничена по оси Ох графиками кривых от до

  $x = 2 - y$, а по оси

  Оу – от –6 до 2.



Тогда искомая площадь равна:

S = $\int\limits_{-6}^{2}\int\limits_{\frac{y^2-4}{4}}^{2-y} dxdy = \int\limits_{-6}^{2}\left(2-y-\frac{y^2-4}{4}\right)dy =$

$$= \int\limits_{-6}^{2}\left(\frac{8-4y-y^2+4}{4}\right)dy = \frac{1}{4}\int\limits_{-6}^{2}\left(-y^2-4y+12\right)dy =$$

$$= \frac{1}{4}\left(-\frac{y^3}{3}-\frac{4y^2}{2}+12y\right)\Bigg|_{-6}^{2} =$$

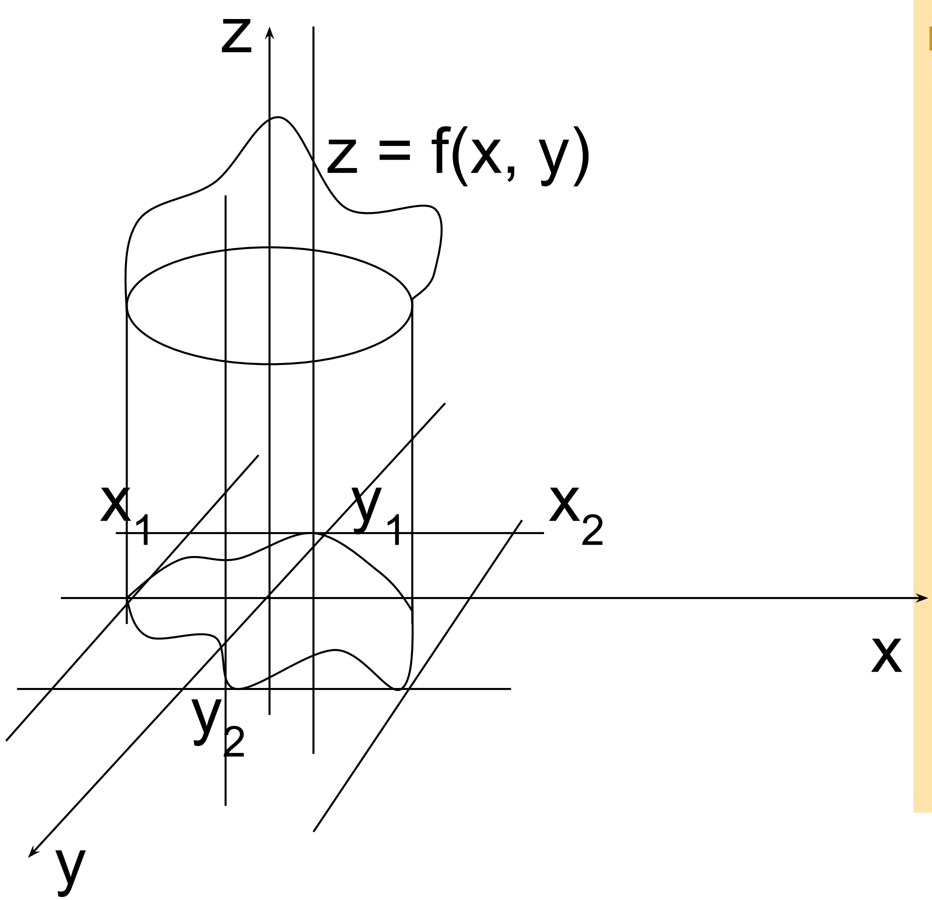
$$= \frac{1}{4}\left(-\frac{8}{3}-8+24-\left(\frac{36\cdot 6}{3}-\frac{4\cdot 36}{2}-12\cdot 6\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left(88-\frac{8}{3}\right) = 21\frac{1}{3}$$

2) Вычисление площадей в полярных координатах.

$$S = \iint_{\tau} \rho d\rho d\theta = \iint_{\Delta} dydx = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{f(\theta)}^{\varphi(\theta)} \rho d\rho d\theta$$

3) Вычисление объемов тел.



- Пусть тело ограничено снизу плоскостью xy, а сверху– поверхностью z = f(x,y), а с боков – цилиндрической поверхностью. Такое тело называется **цилиндроид.**

$$V = \lim_{\Delta x\to 0}\sum\sum_{\Delta} z\Delta y\Delta x = \iint_{\Delta} zdydx = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} zdydx$$

Пример.

- Вычислить объем, ограниченный поверхностями: $x^2 + y^2 = 1$;

  $x + y + z = 3$ и плоскостью XOY.

  Пределы интегрирования: по оси OX:

  $y_1 = -\sqrt{1-x^2}; \quad y_2 = \sqrt{1-x^2};$

  по оси OY: $x_1 = -1$; $x_2 = 1$;

  Решение:

$$V = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (3 - x - y)\,dy\,dx = 3\pi;$$

4) Вычисление площади кривой поверхности.

- Если поверхность задана уравнением: f(x, y, z) = 0, то площадь ее поверхности находится по формуле:

$$S = \iint_{\Delta} \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}{\frac{\partial f}{\partial z}} dydx$$

Если поверхность задана в неявном виде, т.е. уравнением z = ϕ(x, y), то площадь этой поверхности вычисляется по формуле:

$$S = \iint_{\Delta} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dydx$$

5) Вычисление объемов тел с помощью тройного интеграла.

- Если поверхность тела описывается уравнением f(x, y, z) = 0, то объем тела может быть найден по формуле:

$$V = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} dzdydx$$

при этом z_1 и z_2 – функции от x и y или постоянные, y_1 и y_2 – функции от x или постоянные, x_1 и x_2 – постоянные.