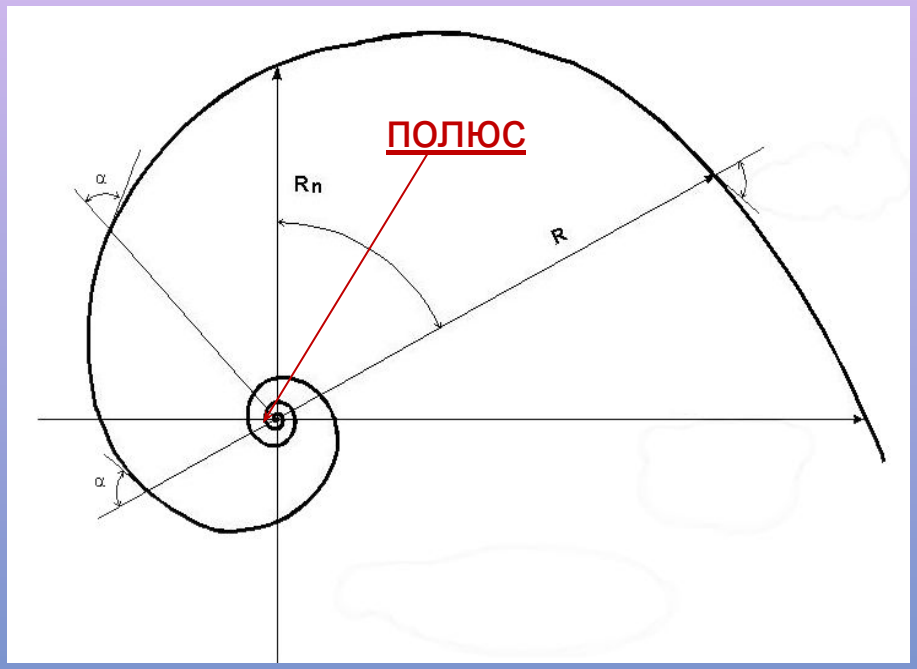
ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ

Практичне застосування логарифмічної і показникової функцій

Рівняння логарифмічної спіралі



$$\rho = a^{\varphi}, \quad a > 0$$

ρ - відстань від полюсу до довільної точки на спіралі

φ – кут повороту відносно полюсу

a – стала

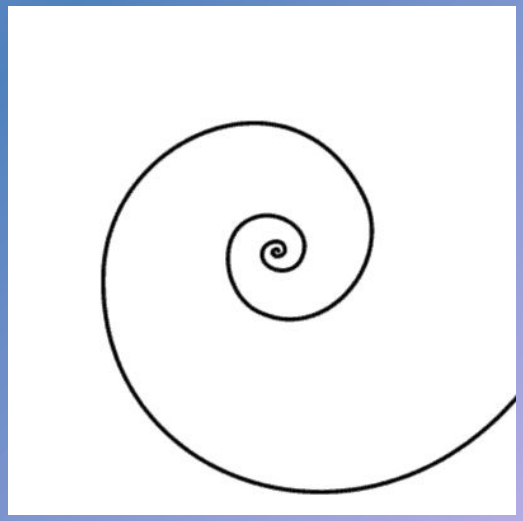
чи $\varphi = log_a \rho$

Спіраль називається логарифмічною, так як логарифмічна відстань ($log_a \rho$) зростає пропорційно куту повороту φ

Властивість

Якщо обертати спіраль навколо полюса за годинниковою стрілкою, то можно спостерігати *ростяг* спіралі.

Якщо обертати спіраль навколо полюса проти годинникової стрілки, то можна спостерігати ***стиснення*** спіралі.



Логарифми в природі

Спіралі широко представлені в живій природі. Спірально завертаються вусики рослин, за спираллю відбувається ріст тканин у стовбурах дерев.

У соняшнику насіння розташоване по дугам, близьким до **логарифмічної спіралі**

Роги тварин ростуть лише з одного кінця. Цей ріст відбувається по **логарифмічній спіралі**. Наприклад, роги баранів, кіз, антилоп і інших рогатих тварин.

Мушлі морських тварин можуть рости лише в одному напрямку. Щоб занадто не розтягуватись в довжину, їм доводиться скручуватися, до того ж кожний наступний завиток схожий на попередній. Через це мушлі багатьох молюсків, равликів закручені **по логарифмічній спіралі.**

По логарифмічній спіралі формується тіло циклону

Логарифми в електроосвітленні

- Причиною того, що наповнені газом лампочки дають більш яскраве світло, ніж пустотні з металевою ниткою із такого ж матеріалу, є різна температура нитки розжарювання. За правилом, встановленим в фізиці, спільна кількість світла, испускаемое при білому накалюванні, зростає пропорційно 12-ій степені абсолютної температури.

Музика і логарифми

Граючи на клавішах сучасного роялю, музикант, чесно кажучи, грає на логарифмах

«… Даже изящные искусства питаются ею
Разве музыкальная гамма не есть -
Набор передовых логарифмов?»

Из «Оды экспоненте»

Банк – таке місце, де вам позичають парасольку в ясний день, а потім вимагають повернути, коли починається дощ.

Р. Фрост

Банківські розрахунки

Задача 1. Вкладник поклав на рахунок 1500 грн. Яка сума буде в нього через 5 років, якщо відсоткова ставка 10% річних.

I спосіб	II спосіб
1) 1500 · 0,1 = 150 (грн) – 10% від суми на рахунку 2) 1500 + 150 = 1650 (грн) – на рахунку через рік 3) 1650 + 1650 · 0,1 = 1815 (грн) – через 2 роки на рахунку 4) 1815 + 1815· 0,1 = 1996,5 (грн) – через 3 роки на рахунку 5) 1996,5 + 1996,5· 0,1 = 2196,15 (грн) – через 4 роки 6) 2196,15 + 2196,15· 0,1 = 2415,765 (грн) – через 5 років	Через рік початкова сума 1500 грн збільшиться на 10%, тому нова сума складе 110% від початкової, таким чином початкова сума збільшиться в 1,1 рази. В наступному році сума теж збільшиться в 1,1 рази, таким чином через 2 роки початкова сума збільшиться в $1{,}1^2$ рази. Тому через 5 років на рахунку буде: $1{,}1^5 \cdot 1500 = 1{,}61051 \cdot 1500 =$ $=2415{,}765$ (грн)
В загальному вигляді задачу можна розв'язати за формулою:	

$$S_n = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n S$$

p% – нараховує банк річних; *S – сума, яку вніс вкладник;*

S_n – сума, яку отримає вкладник через n років.

Банківські розрахунки

Задача 2. При оформлені кредиту в розмірі 10 000 тис. грн на півроку під 10% річних були утримані комісійні в розмірі 1% від суми кредиту. Яка фактично використана сума кредиту і під який відсоток річних був фактично оформлений кредит.

1) 10 000 тис. грн · 0,01 = 100 тис. грн – сума комісійних

2) 10 000 тис. грн – 100 тис. грн = 9 900 тис. грн – фактично використана сума кредиту

3) 10 000 тис. грн · 0,05 = 500 тис. грн – за використання кредиту в розмірі 9900 тис. грн на протязі півроку нараховане відсотків

4) 9 900 тис. грн - 100%
500 тис. грн - x %

$$x = \frac{500\,тис.грн \cdot 100\%}{9900\,тис.грн} = 5{,}05\%$$

- фактична ставка банківського відсотку за надання кредиту в розмірі 9900 тис. грн на півроку

5) 5,05 · 2 = 10,1% - фактичний відсоток річних, під який був отриманий кредит

Банківські розрахунки

Задача 3. 1 січня 2012 року бізнесмен вирішив питання про придбання копіювально-розмножувальної техніки на суму 55 млн. грн. Термін придатності техніки – 3 роки, після чого вона повністю зношується. Щорічний прибуток від використання – 25 млн. грн. Щорічні витрати на її використання розподіляються за роками наступним чином: 2, 3 та 4 млн. грн. При цьому прибуток отримуємо в кінці року, а відповідні витрати на використання виплачуються відразу при отриманні прибутку. Техніку, що придбали продати не можливо. Чи є глузд у придбанні техніки при умові, що ставка банківського прибутку за депозитом (виплачується один раз на рік) до 1 січня 2015 року буде постійною та складає 10% на рік? Інфляція у розрахунок не приймається.

1) $55 \cdot (1 + 0{,}1)^3 = 73{,}205$ (млн. грн) – на депозиті через 3 роки
2) $25 - 2 = 23$ (млн. грн) – дохід на 1 січня 2013 року, якщо купити техніку
3) $23 \cdot 1{,}1 + (25 - 3) = 47{,}3$ (млн. грн) – на депозиті на 1 січня 2014 року
4) $47{,}3 \cdot 1{,}1 + (25 - 4) = 73{,}030$ (млн. грн) – на депозиті на 1 січня 2015 року

Відповідь: Більш вигідніше покласти гроші на депозит, ніж придбання техніки. Поклавши гроші на депозит, на 1 січня 2015 р. маємо більшу суму грошей у порівнянні з тою, що отримаємо від придбання та використання техніки.

Банківські розрахунки

Задача 4. Вкладник поклав до банку 10 000 грн під 12% річних. Через скільки років сума на рахунку подвоїться?

Гроші накопичуються на рахунку за формулою:

$$S = A \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

S - кінцева сума вкладу; ***A*** – початкова сума вкладу; ***p*** – річні відсотки; ***n*** – термін зберігання вкладу в роках

$$20000 = 10000 \cdot \left(1 + \frac{12}{100}\right)^n \Rightarrow 2 = (1 + 0{,}12)^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \log_{1{,}12} 2 = \frac{\lg 2}{\lg(1{,}12)} \approx \frac{0{,}3012}{0{,}04692} \approx 6{,}11$$

Вклад подвоїться через 6 років

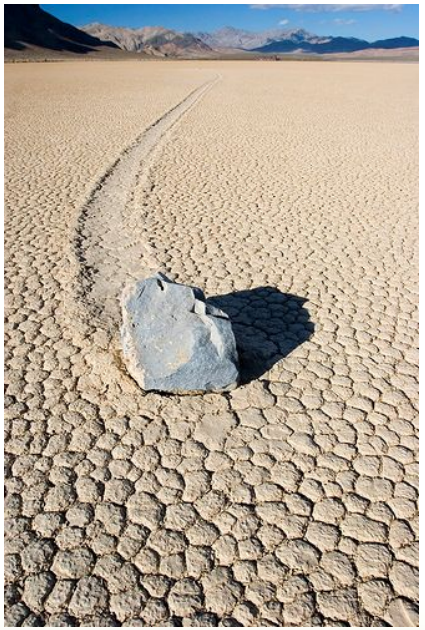
$$S = A \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Логарифмуємо це рівняння за основою 10 (даною основою зручно користуватися під час розрахунків)

$$\lg S = \lg\left(A \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n\right) \Rightarrow \lg S = \lg A + \lg\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lg S - \lg A = n \cdot \lg\left(1 + \frac{p}{100}\right) \Rightarrow n = \frac{\lg S - \lg A}{\lg\left(1 + \frac{p}{100}\right)}$$

Географія



«Без знань математики не можна зрозуміти ні основ сучасної техніки, ні того, як вчені вивчають природні і соціальні явища»

А.М. Колмогоров

Географія

Задача 1. Населення міста зростає щорічно на 3%. Через скільки років населення міста збільшиться у 5 разів.

Застосуємо формулу складних відсотків:

$$A = a \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

a – населення міста
A – 1,5 a
x – кількість років

$$1{,}5a = a\left(1 + \frac{3}{100}\right)^x \Rightarrow 1{,}5 = \left(1 + \frac{3}{100}\right)^x \Rightarrow (1{,}03)^x = 1{,}5$$

прологарифмуємо

$$x \lg 1{,}03 = \lg 1{,}5 \Rightarrow x = \frac{\lg 1{,}5}{\lg 1{,}03}$$

$$x = \frac{0{,}1761}{0{,}0128} = \frac{1761}{128} \approx 14$$

Відповідь:
приблизно через 14 років

Географія

Задача 2. Якою була чисельність населення міста 10 років тому, якщо в даний час проживає 300 тис. чоловік, а щорічний приріст населення складає 3,5%.

$$A = a \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

a – чисельність населення 10 років тому назад;
A – 300 тис. чоловік; x – 10 років; p – 3,5%.

$$300 = a\left(1 + \frac{3{,}5}{100}\right)^{10} \Rightarrow 300 = a\left(1{,}035\right)^{10} \Rightarrow a = \frac{300}{1{,}035^{10}} \approx 212{,}7\ тис.чоловік$$

Відповідь:

Чисельність населення 10 років тому 212,7 тис. чоловік

Географія

Задача 3. Обчислити яким буде атмосферний тиск на вершині Ельбрусу, висота якого 5,6 км, якщо залежність атмосферного тиску p від висоти (вираженої у кілометрах) h над рівнем моря виражається формулою:

$$p = 76 \cdot (2{,}7)^{\frac{h}{8}}$$

$$p = 76 \cdot (2{,}7)^{\frac{5{,}6}{8}} \approx 37{,}92 \text{ мм рт.ст.}$$

На вершині Ельбрусу

Географія

Задача 4. Альпіністи, які підкорювали пік Перемоги, досягли висоти, де тиск був рівний 304 мм рт. ст. обчислити на якій висоті находяться альпіністи, якщо $p_0 = 760$ рт. ст.

Пік Перемоги

Висота над рівнем моря обчислюється за формулою:

$$h = \frac{8000}{0{,}4343} \lg \frac{p_0}{p}$$

p_0 – тиск над рівнем моря;
p – тиск на висоті h м.

$$h = \frac{8000}{0{,}4343} \lg \frac{760}{304} \approx 7330{,}2\ м$$

Виробництво

«Перш за все, візьмемо математику. Спільний відділ її, який має справу з цифрами дає допомогу у всій промисловості»

Г.Спенсер

Виробництво

Задача 1.

Обчислити вартість обладнання в гривнах через 5 років, якщо його початкова вартість $4{,}68 \cdot 10^5$ грн, а щорічний відсоток амортизації 5,7%.

Вартість обладнання через n років можна знайти за формулою:

$$B_n = B_0\left(1 - \frac{p}{100}\right)^n$$

B_0 - початкова вартість

p – щорічний процент амортизації

B_n – вартість обладнання через n років

$$B_n = 4{,}68 \cdot 10^5 \cdot \left(1 - \frac{5{,}7}{100}\right)^5 \approx 3{,}49 \cdot 10^5 \ грн$$

Виробництво

Задача 2.

Вартість обладнання дорівнює 500 тис. грн. відомо, що через 10 років вартість цього обладнання внаслідок амортизації буде рівна 200 тис. грн. Знайти відсоток щорічної амортизації обладнання.

B_0 = 500 тис. грн
n =10 років
B_n = 200 тис. грн

$$B_n = B_0\left(1-\frac{p}{100}\right)^n$$

$$200 = 500\cdot\left(1-\frac{p}{100}\right)^{10}$$

$$\frac{2}{5} = (1-0{,}01p)^{10}$$

$$0{,}4^{0{,}1} = 1-0{,}01p$$

$$p = \frac{1-0{,}4^{0{,}1}}{0{,}01} \approx 8{,}76\%$$

Відповідь: щорічний процент амортизації 8,76%.

Виробництво

Задача 3.

Ділянка лісництва складає 65000 м^3 лісу. Скільки буде лісу на цій ділянці через 10 років, якщо його щорічний приріст складає в середньому 2%.

$$S = A \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

S - результат
A – початкова к-ть товару
p – відсоток збільшення
n – кількість років

$$S = 6500 \cdot \left(1 + \frac{2}{100}\right)^{10} \approx 7923{,}46\,м^3$$

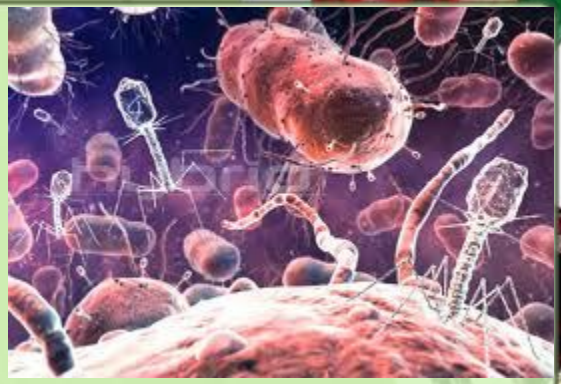
Відповідь: 7923,46 м^3.

Біологія

«В наше сучасне життя втручається математика з її особливим стилем мислення, яке стає зараз обов'язковим і для інженера і для біолога»

Б.В. Гнеденко

Біологія



Задача 1.

Початкова кількість бактерій в колонії складала 8, а через 2 години після того як їх розмістили в сприятливе середовище, число збільшилось до 100. Через який період часу можна очікувати колонію в 500 бактерій.

$$x = \frac{t \cdot (\lg B - \lg Q)}{\lg P}$$

Q – початкова кількість
t - час
B – кінцеве значення
P – зміна кількості в k разів

$$x = \frac{2 \cdot (\lg 500 - \lg 8)}{\lg \frac{100}{8}} \approx \frac{2 \cdot 1{,}7959}{1{,}0970} = 3{,}27\,(год)$$

Відповідь: приблизно через 3 год 15 хв

Біологія

Задача 2.

Чисельність популяції складає 5000 останнім часом вона щорічно зменшувалась на 8%. Коли чисельність популяції досягне 2000 вона почне вимирати. Скільки років залишилось існувати популяції?

$$S = S_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

S = 2000
S_0 = 5000
p = 8%

$$2000 = 5000 \cdot \left(1 + \frac{8}{100}\right)^n \Rightarrow \frac{2}{5} = (1{,}08)^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \log_{1{,}08} 0{,}4 \Rightarrow n = \frac{\lg 0{,}4}{\lg 1{,}08} \approx 11 (\textit{років})$$

Відповідь: приблизно через 11 років

Біологія

Задача 3.

Прикладом швидкого розмножування бактерій є виготовлення дріжджів, під час якого по мірі росту бактерій проводиться відповідне додавання цукрової маси. Знайти масу дріжджів, якщо початкова маса складає 10 кг, а тривалість процесу 9 год.

Збільшення маси дріжджів виражається формулою показникової функції:

$$m = m_0 1{,}2^t$$

m_0 – початкова маса дріжджів
t – час бродіння в годинах
m – маса дріжджів в процесі бродіння

$$m = 10 \cdot 1{,}2^9 \approx 51{,}6\,кг$$

Відповідь: маса отриманих дріжджів 51,6 кг

Біологія

Задача 4.

Відомо, що відношення між вуглеводом C^{12} і його радіоактивним ізотопом C^{14} в живому організмі постійне. Період напіврозпаду вуглеводу C^{14} складає 5760 років. Визначте вік залишків мамонта, знайдених у вічній мерзлоті на Таймирі, якщо відносний склад в них ізотопа C^{14} складає 26% від його кількості в живому організмі.

m = q
t = 5760
p = ½
B = 0,26 m

$$x = \frac{t \cdot (\lg B - \lg q)}{\lg p} = \frac{5760(\lg(0{,}26m) - \lg m)}{\lg \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{5760 \cdot \lg 0{,}26}{-\lg 2} = -\frac{5760 \cdot (-0{,}5850)}{0{,}3010} \approx 11200$$

Відповідь: вік залишків мамонта складає близько 11200 років

фізика

“Математичні методи стають не тільки методами, які використовуються в механіці, фізиці, але загальними методами для всієї науки в цілому”

С.Л.Соболєв

Фізика

Задача 1.

Чому дорівнює маса йоду, в кінці 4 діб з початку спостереження, якщо в початковий момент його маса складала 1 г.

m_0 =1 г маса в початковий момент
t = 4 доби
T = 8 діб
m – ?

$$m = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

$$m = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{8}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 0{,}7\ г$$

Відповідь: маса йоду 0,7 грама

Фізика

Задача 2.

Перший міжнародний еталон радію був виготовлений Марією Кюрі в серпні 1911 року, і складав 16,74 мг чистого радію. Яка кількість радію міститься в еталоні в 1991 року?

m_0 =16,74 мг
T = 1600 років
t – час який пройшов після 1911 р.
m – ?

$$m = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

$$m = 16{,}74 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{80}{1600}} \approx 16{,}17\ мг$$

Відповідь: маса радію 16,17 мг.

Астрономія

Збільшення діаметра об’єктива телескопа дозволяє бачити кількість зірок, які не можна розрізнити простим оком. При цьому гранична «зіркова величина» k зірок, які можна побачити через телескоп, обчислюється за формулою $k = 7{,}5 + 5 \lg D$, де D – діаметр об’єктива телескопа в сантиметрах.

Якщо D = 16 см, то $k = 7{,}5 + 5 \lg 16 \approx \approx 13{,}5$ (см)

Хімія

Задача 1. Обчисліть pH розчину соляної кислоти, якщо с=0,003 моль/г

Розв'язання

Для сильних кислот можна вважати, що степінь іонізації їх в розбавленому розчині дорівнює 1, тоді $c(H_2O^+) = c(HB)$, тобто

$$pH = -\lg c(HB) = -\lg c(HCl) = -\lg 0{,}003 = 2{,}52$$

Відповідь: pH = 2,52

Хімія

Задача 2.

На скільки градусів треба підвищити температуру для прискорення хімічної реакції в 5900 раз, якщо швидкість реакції зростає в геометричної прогресії зі знаменником, що дорівнює 3 при підвищенні температури на кожні 10^0.

Розв'язання

$$3^x = 5900$$

$$\lg 3^x = \lg 5900$$

$$x \lg 3 = 5900$$

$$x = \frac{\lg 5900}{\lg 3} = \frac{4,7709}{0,4771} \approx 10$$

$$10^o \cdot x = 100^o$$

Відповідь:

Потрібно підвищити температуру на 100 для прискорення хімічної реакції

Література

1. Алгебра и элементарные функции. 10 класс. В.К. Совайленко, О.В. Лебедева. Ростов на Дону «Феликс», 1998 г.
2. Процентные вычисления. 10 – 11 классы. «Дрофа», Москва, 2003 г.
3. Полный курс логарифмов. Естественнонаучный профиль. П.И. Самсонов, Школьная пресса. Москва, 2005 г.
4. Школьникам о математике и математиках. М.М. Лиман, Просвещение, Москва, 1981 г.