Formālas valodas
Neregulāras valodas

Saturs

- Ievads
- Baložu ligzdas princips (Dirihlē princips)
- Pumpējošā lemma

Neregulāras valodas

$$\{a^n b^n : \quad n \geq 0\}$$

$$\{vv^R : \quad v \in \{a,b\}^*\}$$

Regulāras valodas

$$a^*b$$

$$b^*c + a$$

$$b + c(a+b)^*$$

$$u.c.$$

Kā mēs varam pierādīt, ka valoda L nav regulāra?

Jāpierāda, ka neeksistē DFA, kas akceptē L.

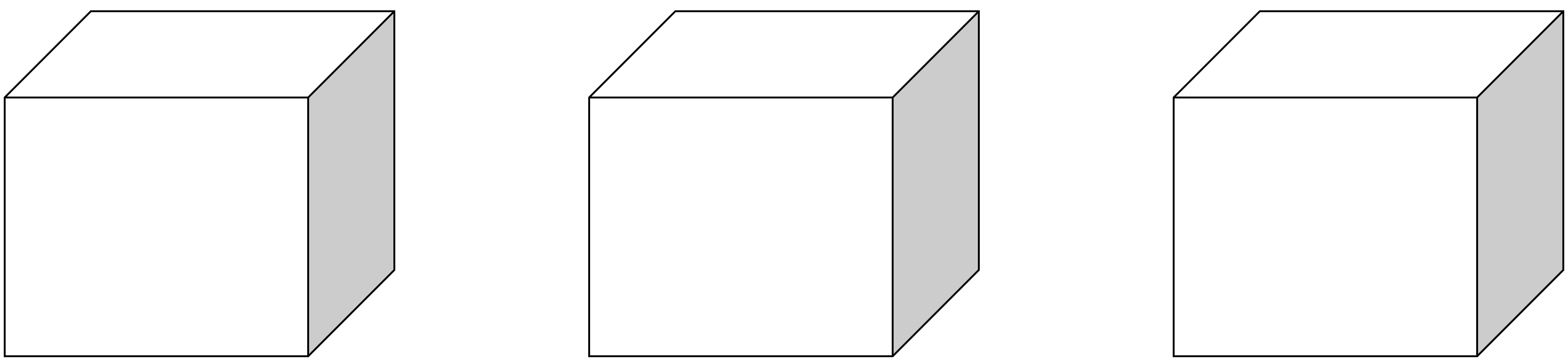
Problēma: to nav tik vienkārši pierādīt.

Risinājums: Pumpējošā lemma !!!

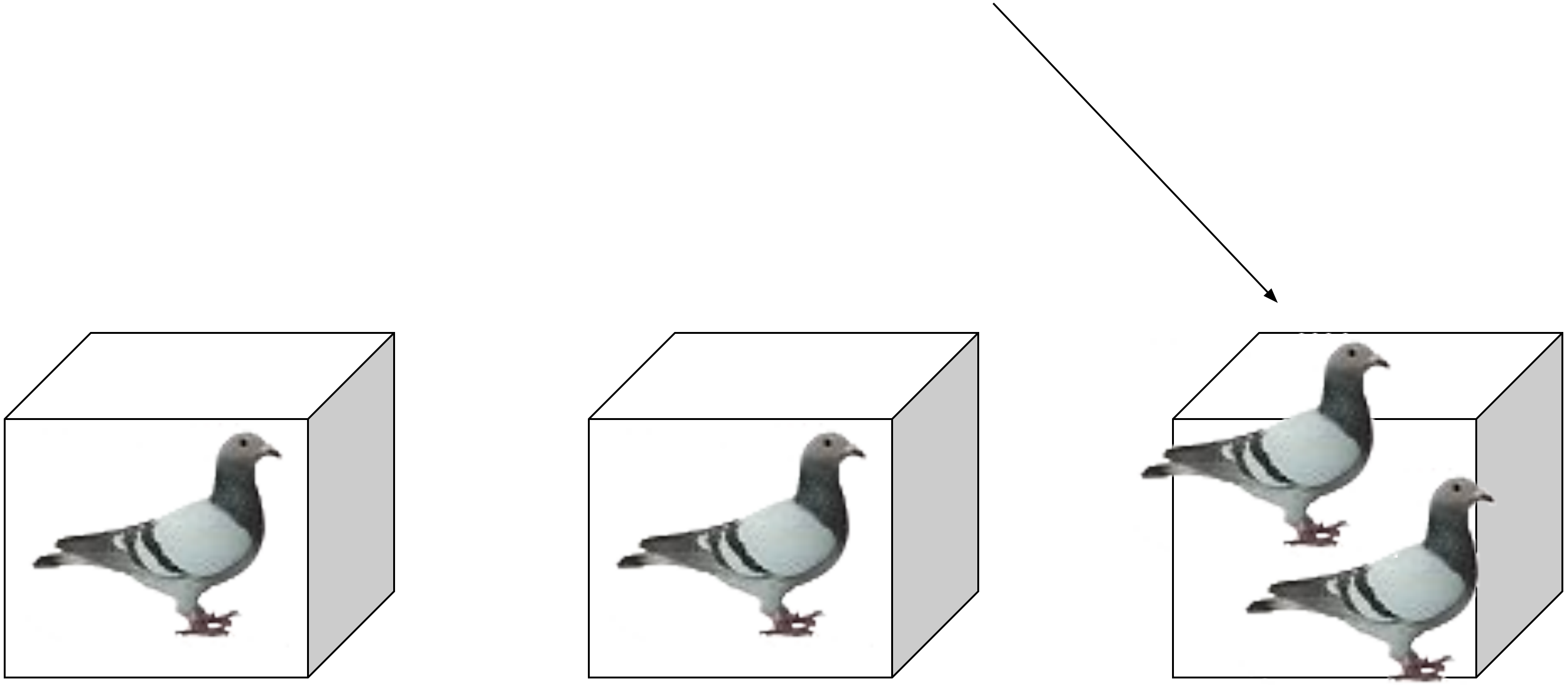
Baložu ligzdas princips

4 baloži

3 baložu ligzdas

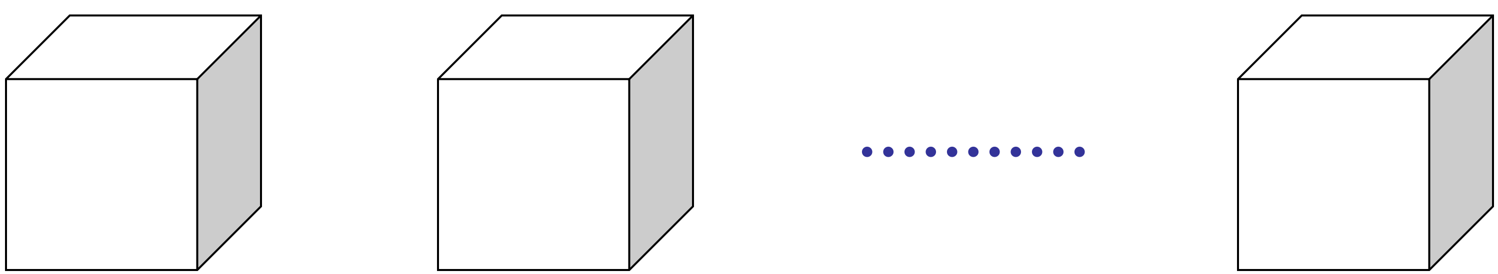


Vienā baložu ligzdā būs 2 baloži



n baloži

m baložu ligzdas $n > m$



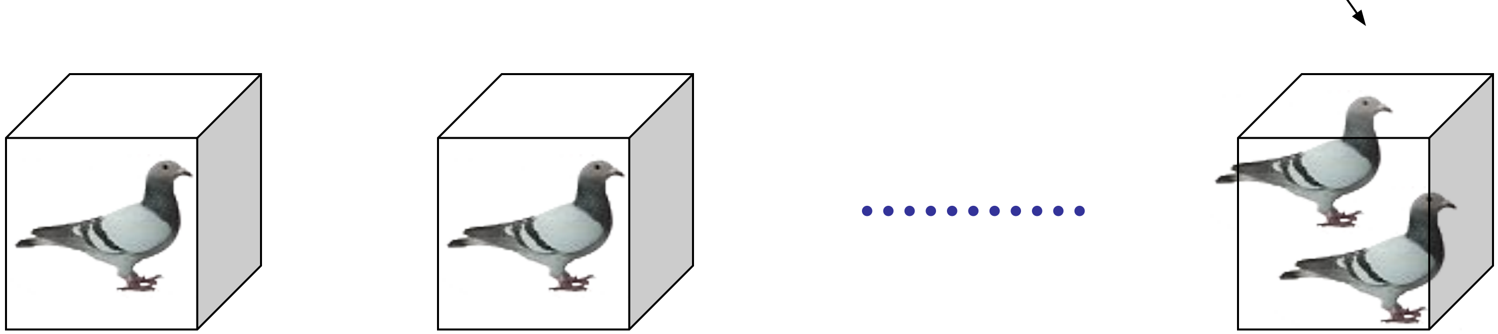
Baložu ligzdas princips

n baloži

m baložu ligzdas

$n > m$

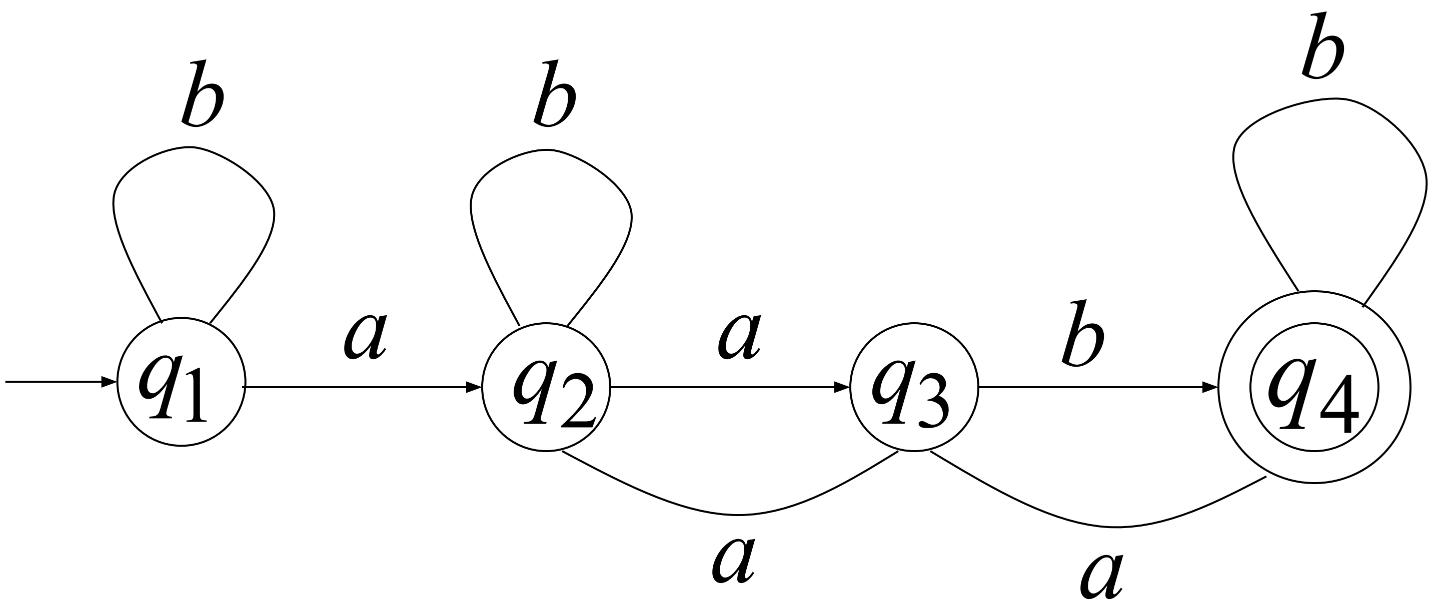
Būs vismaz viena ligzda ar 2 badožiem



Baložu ligzdas princips
un
DFA

Ja dots DFA ar 4 stāvokļiem

DFA ar 4 stāvokļiem

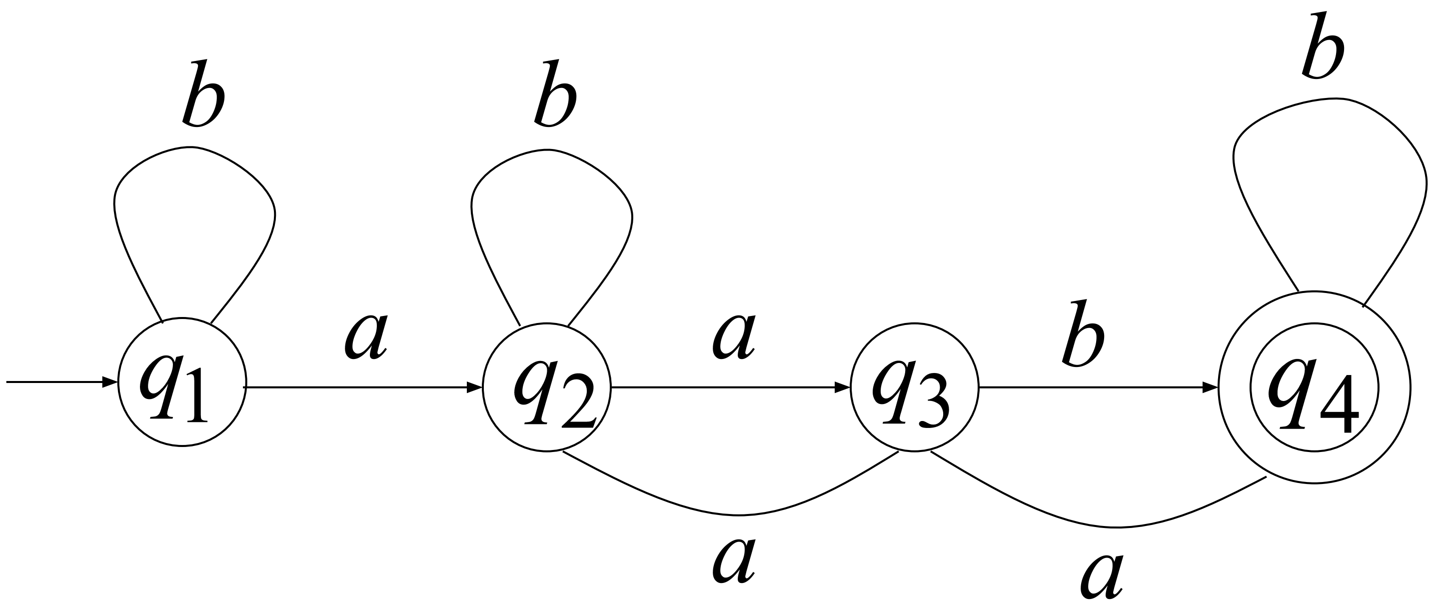


Virknes ceļš: a

aa

aab

stāvokļi neatkārtojas



Virkness ceļš:

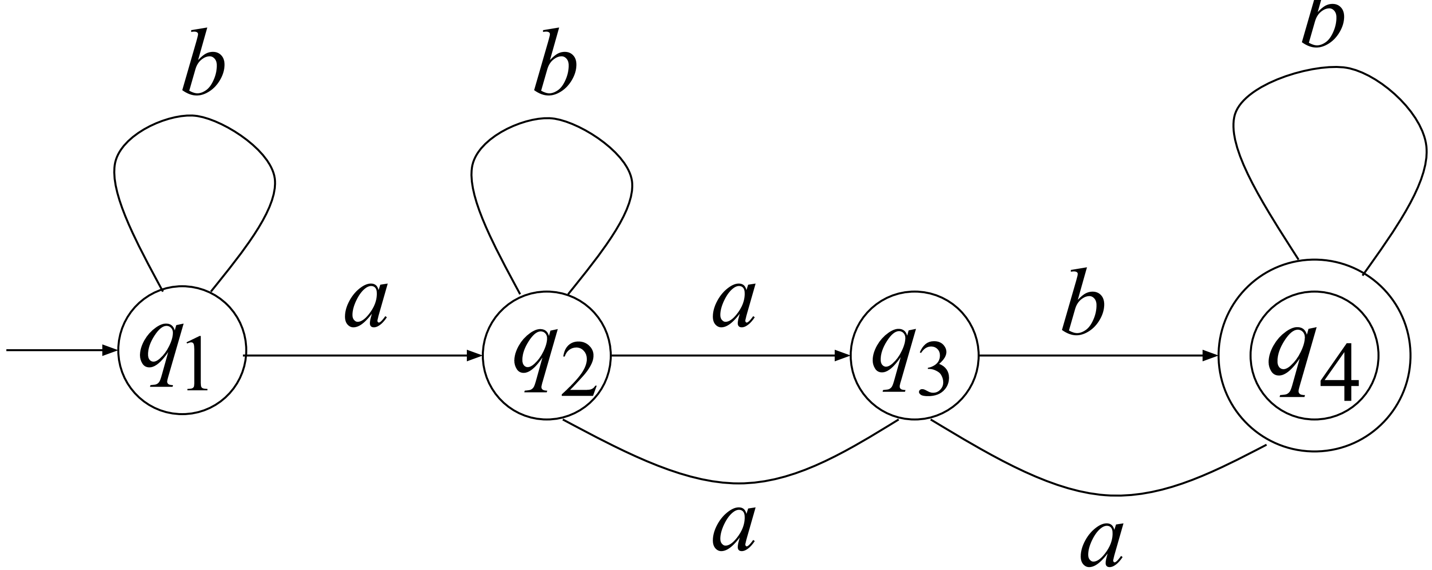
Virkness ceļš: $aabb$

$bbaa$

$abbabb$

$abbbabbabb...$

stāvokļi atkārtojas

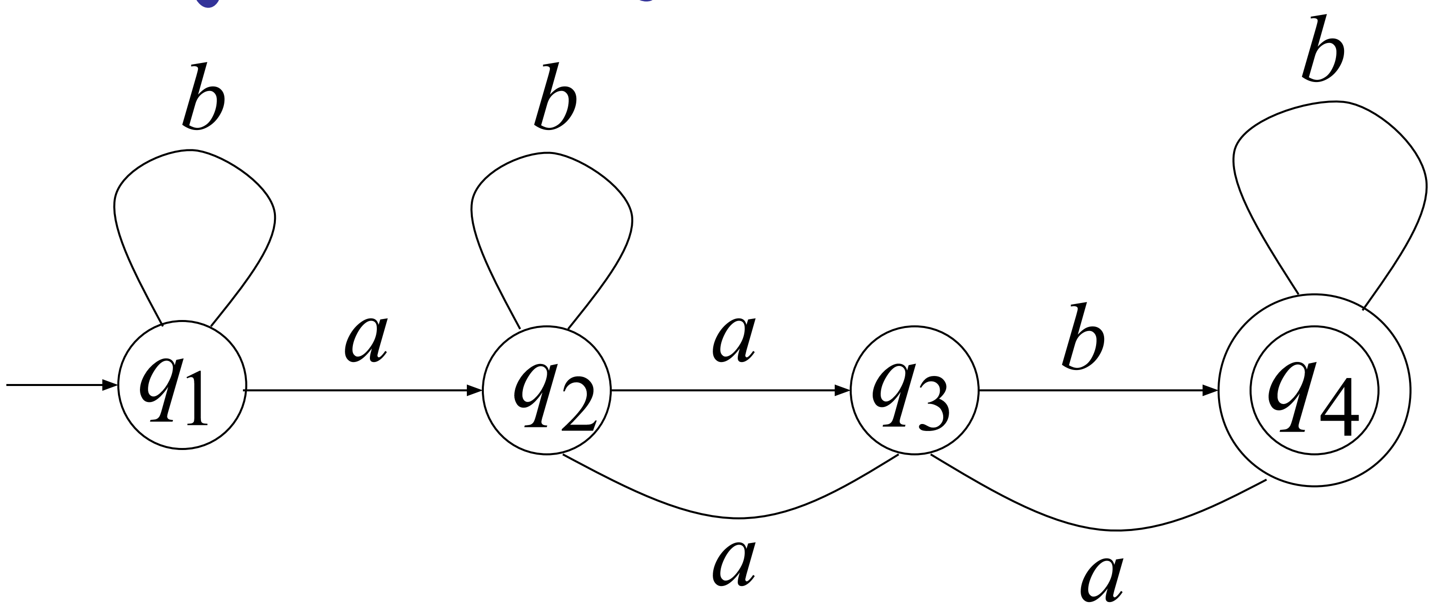


No dotā piemēra

Ja virkne w, kuras garums $|w| \geq 4$:

tad pāreju šai virknei būs vairāk nekā DFA stāvokļu,

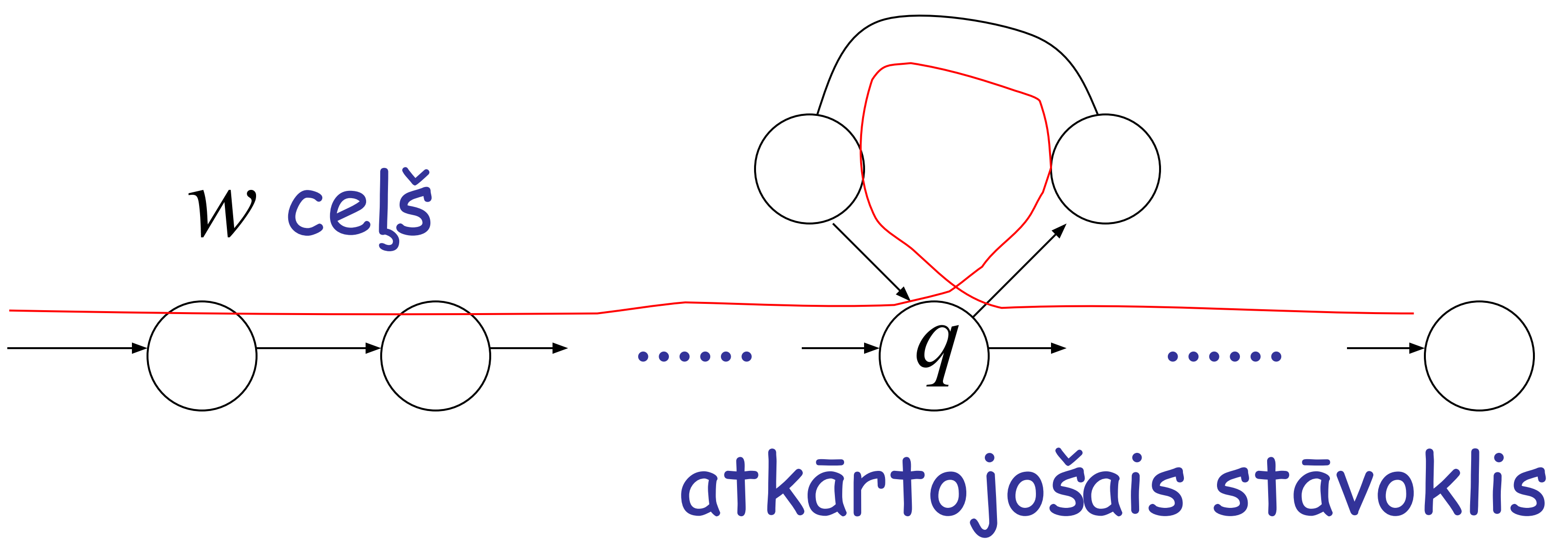
tādejādi stāvokļi sāks atkārtoties.



Jebkuram DFA:

Virkne w, kuras garums $\geq$ stāvokļu skaits

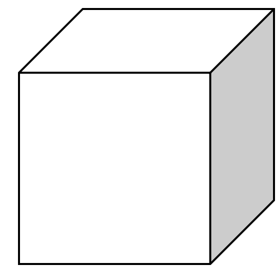
Stāvoklim q nāksies atkārtoties virknes w ceļā.



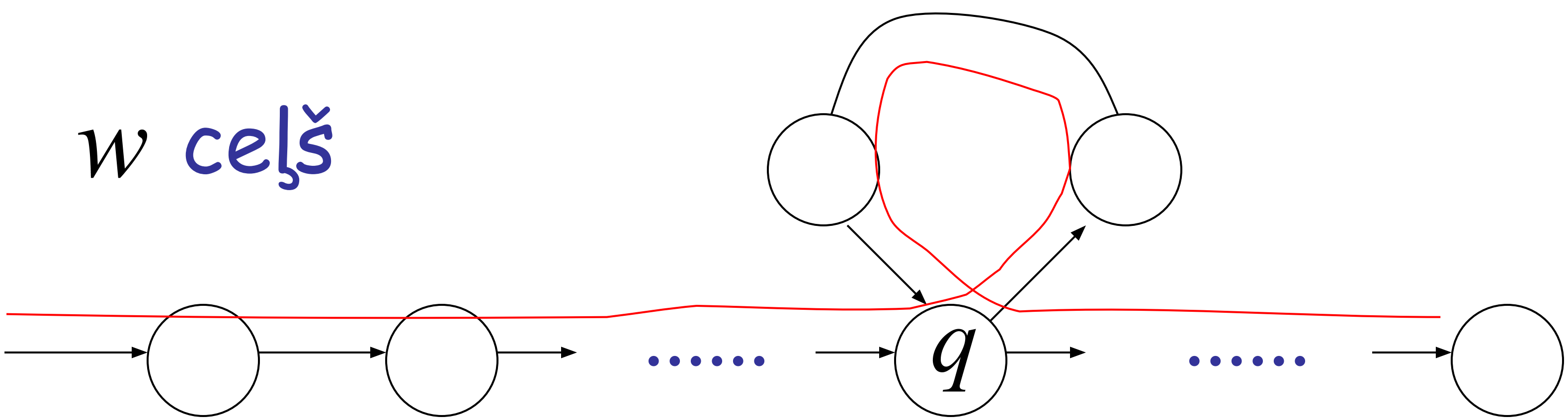
Citiem vārdiem virknei w:

$\xrightarrow{a}$ pārejas ir baloži

q stāvokļi ir baložu ligzdas



w ceļš

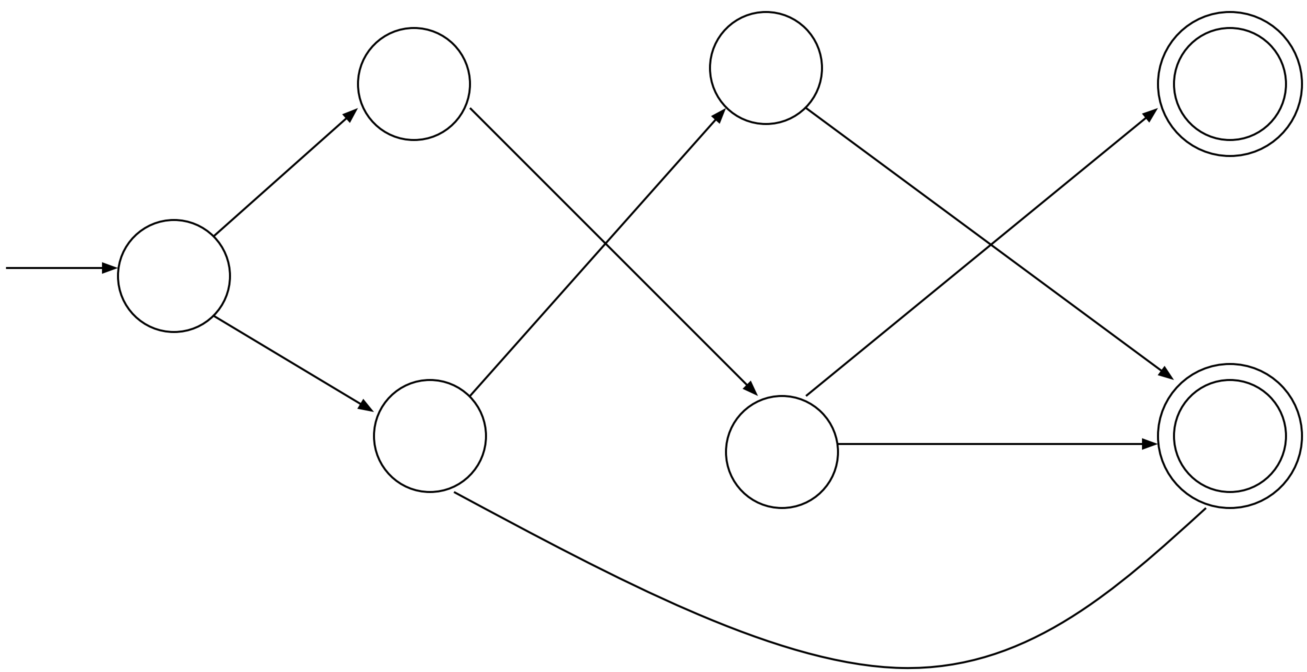


Stāvoklis, kurš atkārtojas

Pumpējošā lemma

Paņemsim neierobežotu valodu L.

Eksistē DFA, kurš akceptē valodu L



m

stāvokļi

Paņemsim virkni w, kura $w \in L$

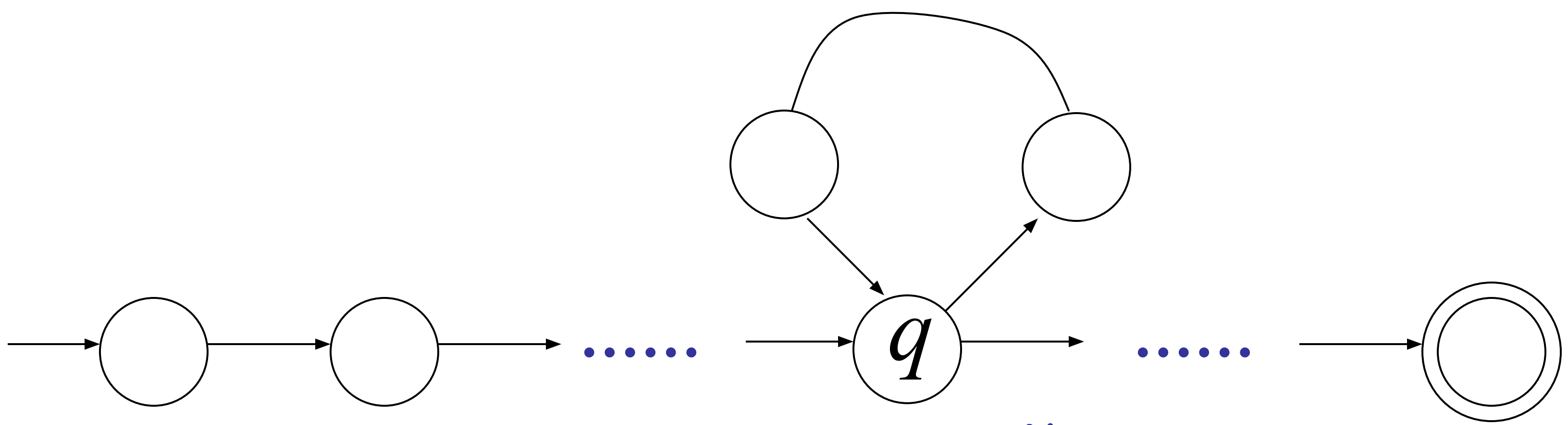
Te parādīts ceļš, kurš tiek veikts apskatot virkni w

walk w

Ja virkne **w**, kuras garums $|w| \geq m$ (DFA stāvokļu skaits)

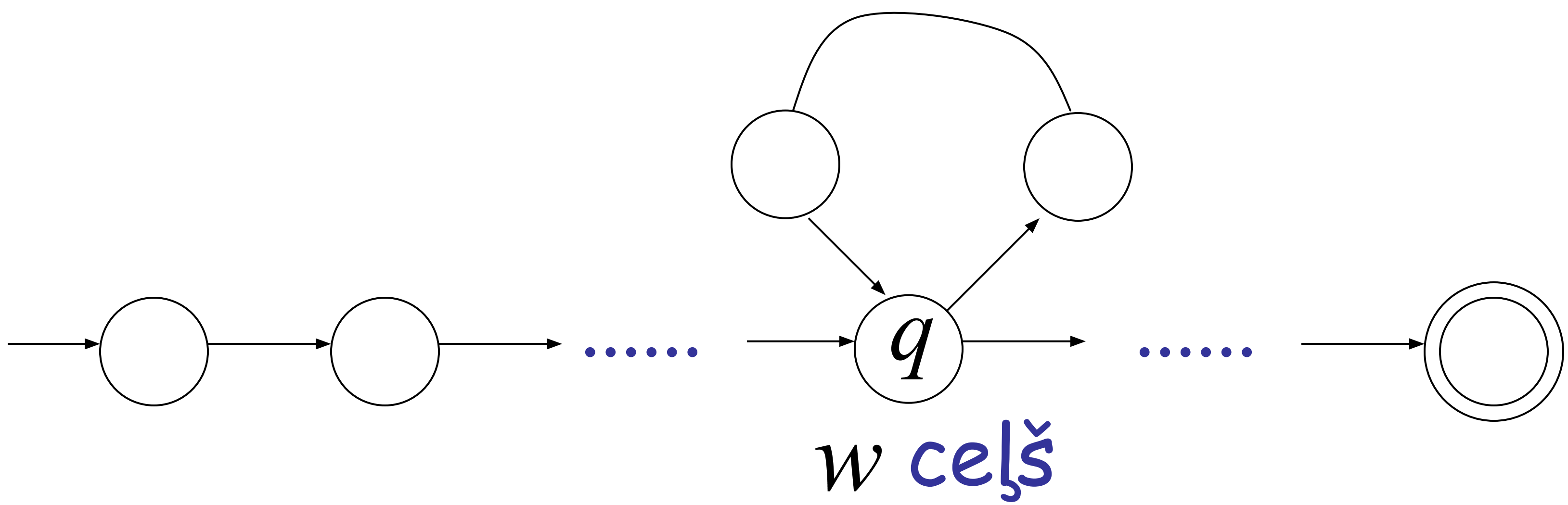
tad, pēc baložu ligzdas principa:

celā **w** stāvoklis **q** atkārtosies

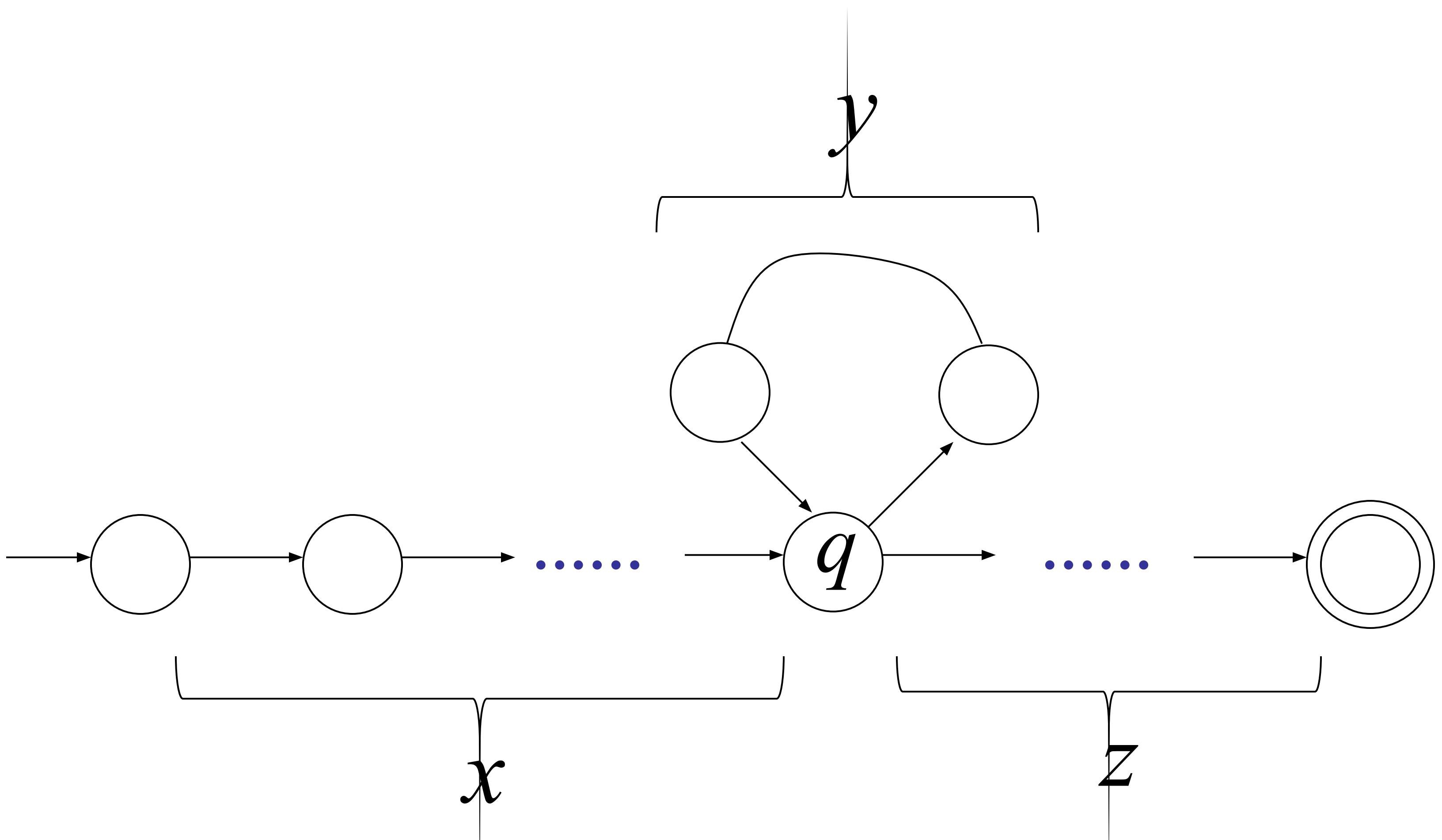


w ceļš

Pieņemsim, ka **q** ir pirmais stāvoklis, kurš sāk atkārtoties **w** ceļā

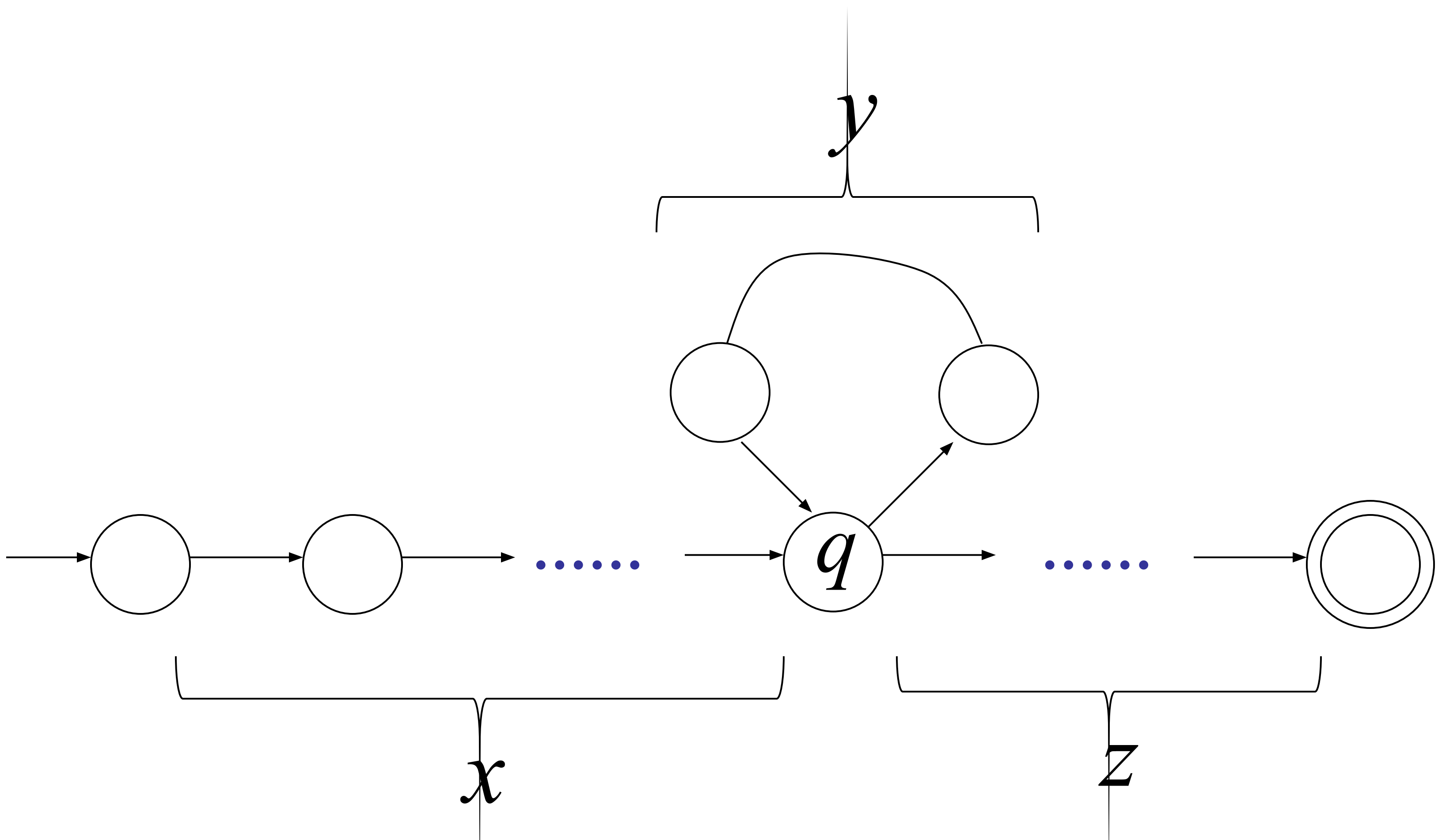


Uzrakstīsim $w = x\ y\ z$

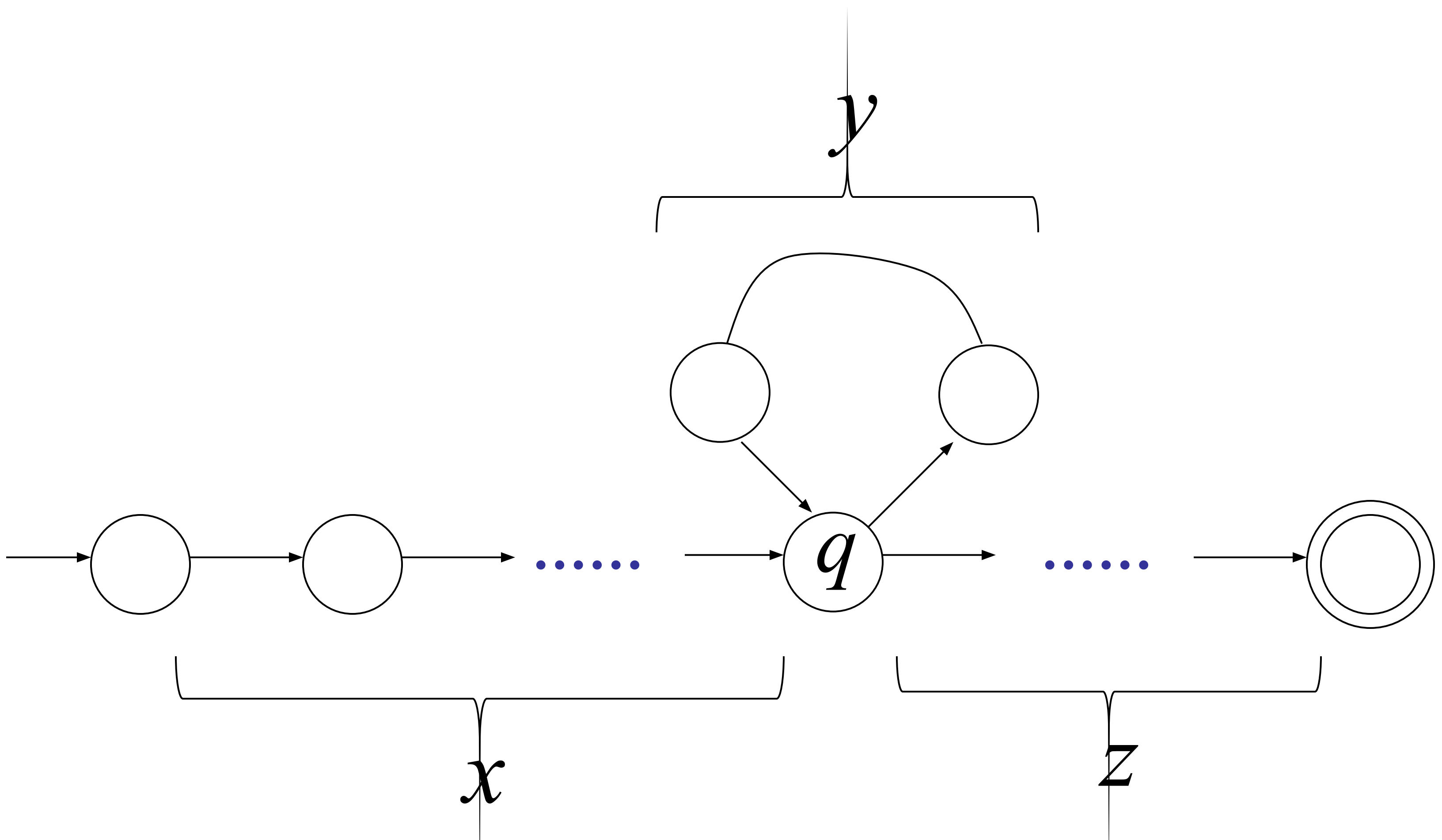


Pie tam: garums $|x\ y| \leq m$ DFA stāvokļu skaits

garums $|y| \geq 1$

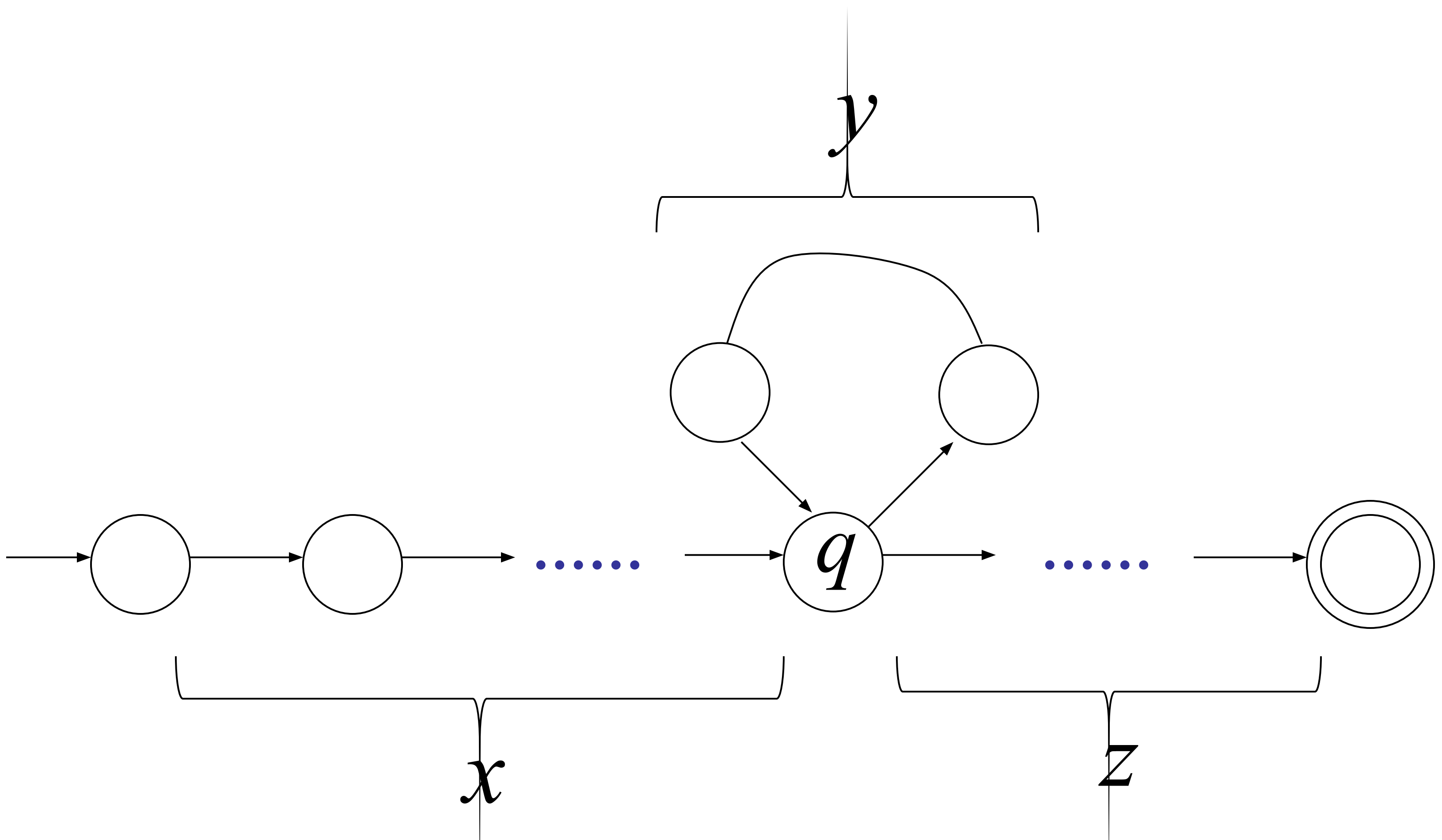


Pie tam: virkne $x\ z$ ir akceptējama



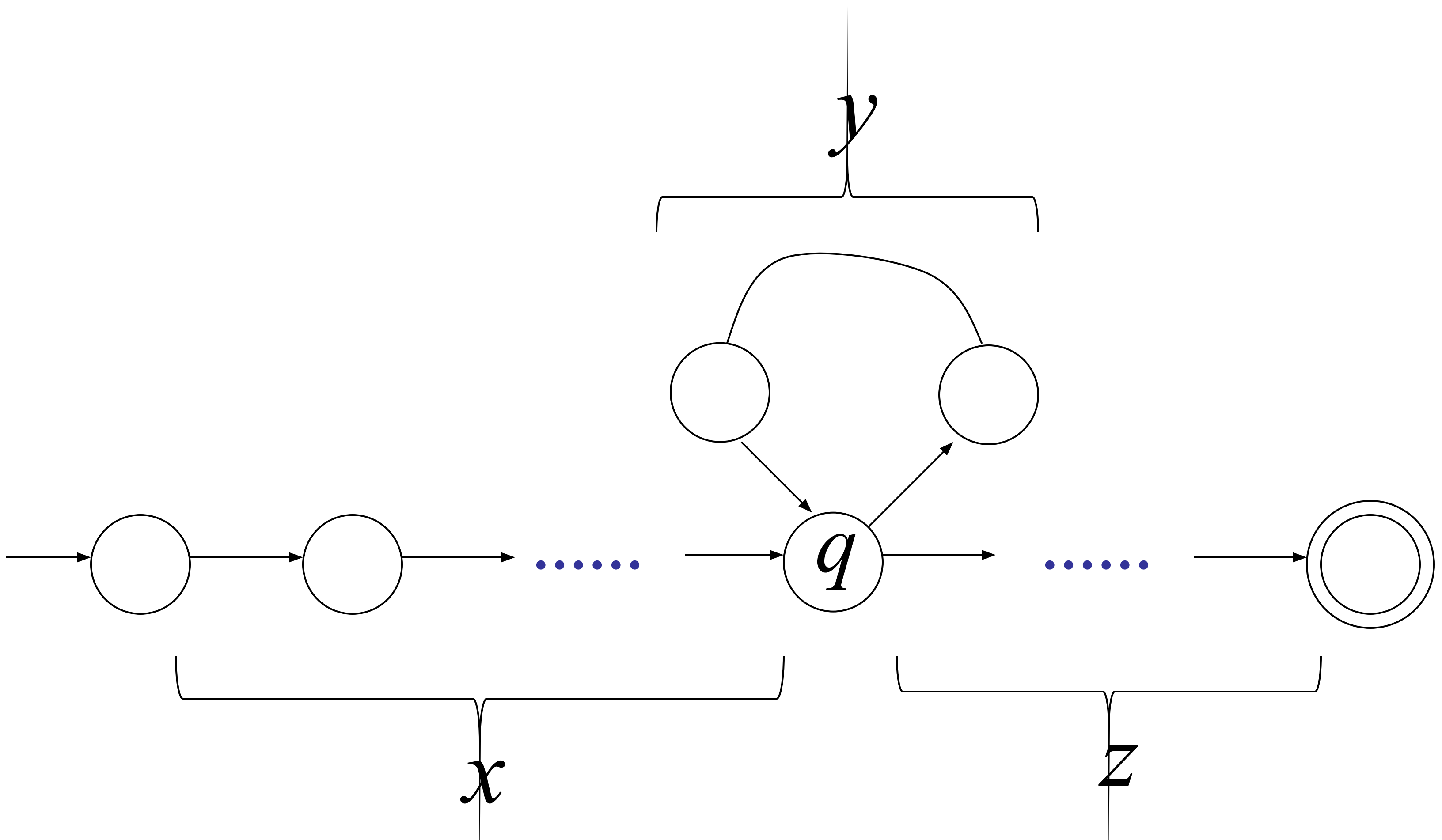
Ievērosim, ka: virkne $x\ y\ y\ z$

ir akceptējama



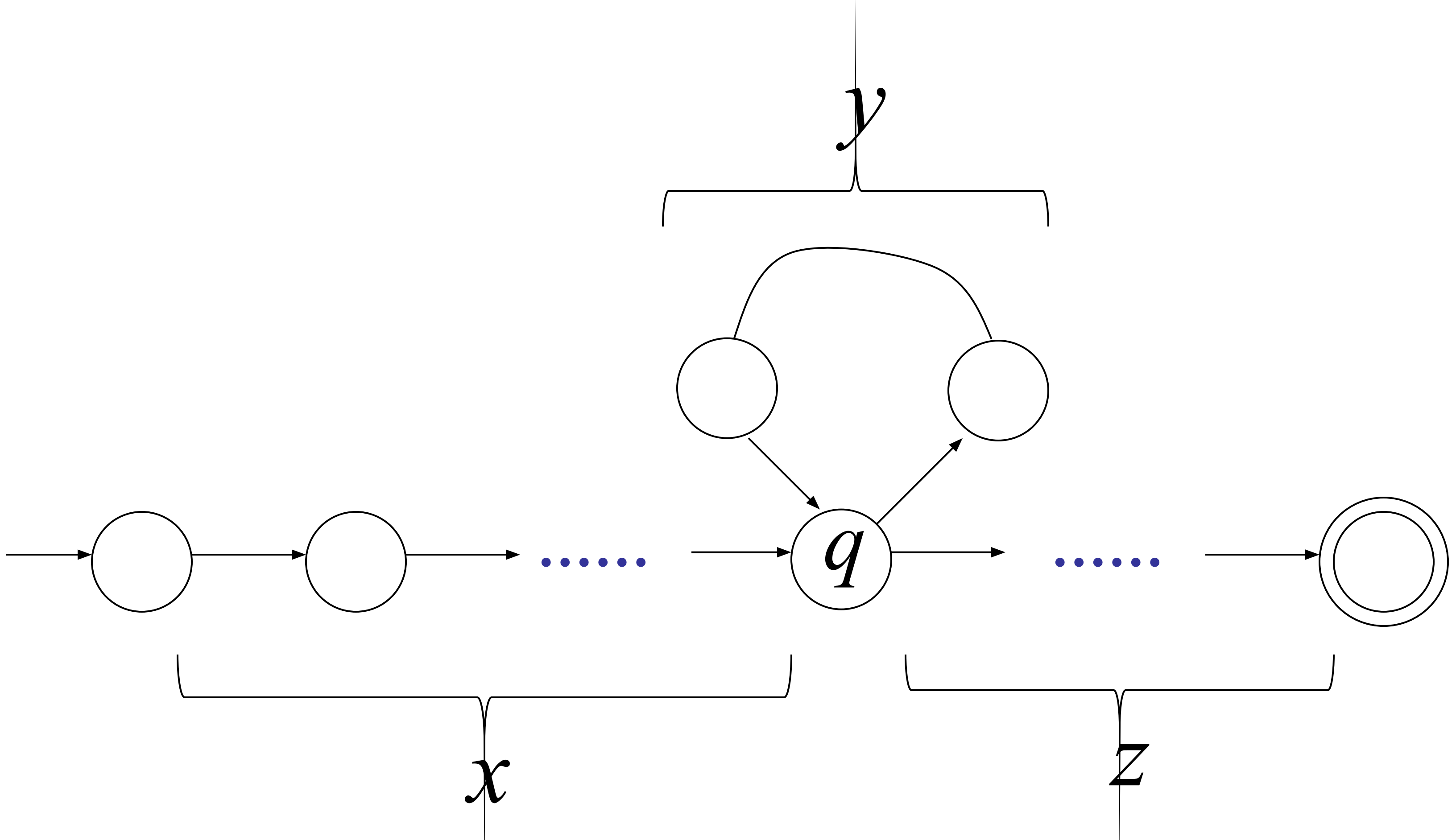
Ievērosim, ka: Virkne $x\ y\ y\ y\ z$

ir akceptējama



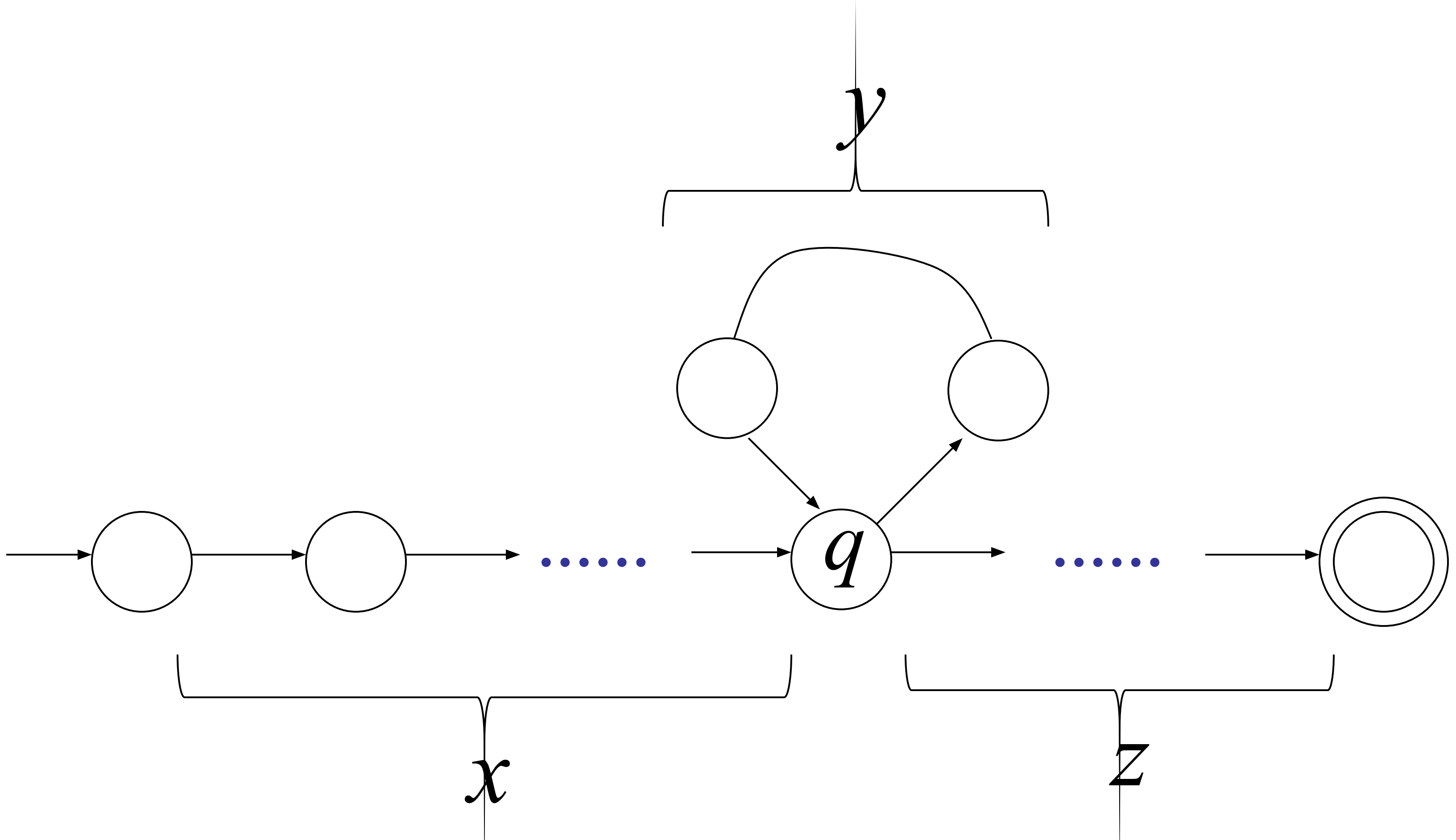
Vispārīgā gadījumā: virkne $x\,y^i\,z$

ir akceptējama $i = 0, 1, 2, \ldots$



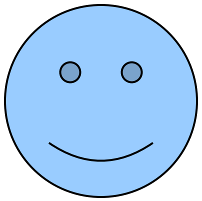
Vispārīgā gadījumā: $x\, y^i\, z \in L \quad i = 0, 1, 2, \ldots$

Valoda, kuru akceptē DFA



Citiem vārdiem, esam aprakstījuši:

Pumpējošo lemmu !!!



Pumpējošā lemma

Ņemot neierobežotu regulāru valodu L

eksistē konstante m, kurai

jebkurai virknei $w \in L$ ar garumu $|w| \geq m$

mēs varam rakstīt $w = x\, y\, z$

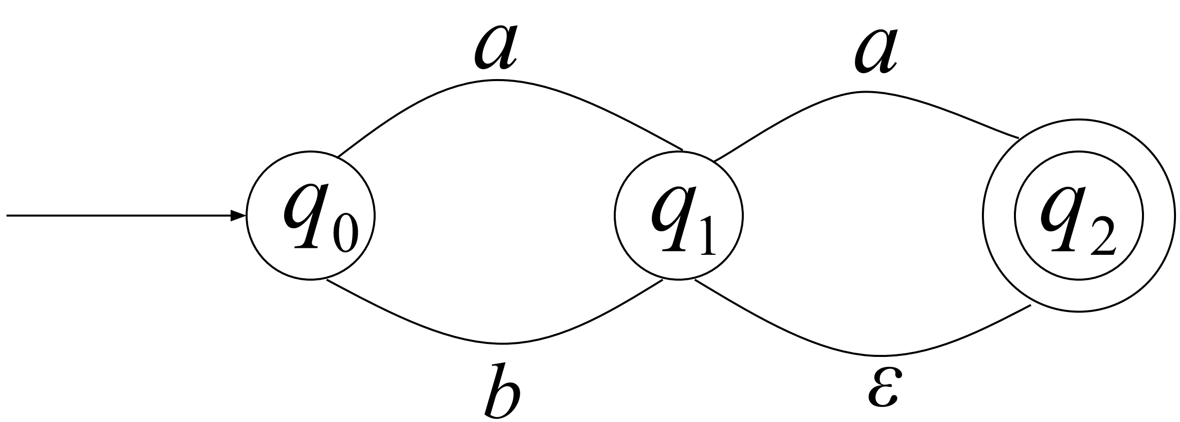
kur $|x\, y| \leq m$ un $|y| \geq 1$

tā ka: $x\, y^i\, z \in L \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$

Piemērs

w = ababaa

x	y	z	atkārtojas
ε	ab	abaa	q_0
a	ba	baa	q_1



Pumpējošās lemmas izmantošana

Teorēma: Valoda $L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$

nav regulāra

Pierādījums: Izmanto Pumpējošo lemmu

$$L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$$

Pieņemsim pretējo, ka

L ir regulāra valoda

Tā kā L ir neierobežota

mēs varam izmantot Pumpējošo lemmu

$$L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$$

Pumpējošā lemmā m ir vesels skaitlis

Izvēlēsimies virkni w, tādu, ka $w \in L$

garums $|w| \geq m$

Pieņemsim $w = a^m b^m$

Rakstām: $a^m b^m = x\, y^k\, z$

No Pumpējošās lemmas

izriet, ka $|x\,y| \le m, \quad |y| \ge 1$

$$xy^k z = a^m b^m \;=\; \overbrace{a\ldots a a\ldots a a\ldots a}^{m}\overbrace{b\ldots b}^{m}$$

$$\underbrace{a\ldots a}_{x}\underbrace{a\ldots a}_{y}\underbrace{a\ldots a b\ldots b}_{z}$$

tādējādi: $x = a^i,\, y = a^j,\, z = a^{m-i-j} b^m,\, j \ge 1$

No Pumpējošās lemmas $\quad x\, y^i\, z \in L$

$$i = 0, 1, 2, \ldots$$

$$x = a^i, \quad y = a^j, \quad z = a^{m-i-j} b^m, \quad j \geq 1$$

$$xy^0 z = a^i (a^j)^0 a^{m-i-j} b^m = a^{m-j} b^m, \quad j \geq 1$$

$$\Downarrow$$

$$a^{m-j} b^m \notin L$$

Pretruna!!!

$$w = a^{m-1}b^{m-1}$$

$a.\quad x = a^{i},\ y = a^{j},\ \ z = a^{m-i-j-1}b^{m-1},\ j > 0$

$b.\quad x = a^{m-1-i},\ y = a^{j}b,\ \ z = b^{m-2},\ j > 0$

$c.\quad x = a^{m-1},\ y = b,\ \ z = b^{m-2}$

$$a.\quad k=0 \Rightarrow xy^0z = a^i(a^j)^0 a^{m-i-j-1}b^{m-1} = a^{m-j-1}b^{m-1},\ j>0$$

$$b.\quad k=2 \Rightarrow xy^2z = a^{m-1-i}(a^jb)^2 b^{m-2} = a^{m-1-i+2j}b^{m},\ j>0$$

$$c.\quad k=0 \Rightarrow xy^0z = a^{m-1}b^0b^{m-2} = a^{m-1}b^{m-2}$$

Tādēļ: Mūsu pieņēmums, ka valoda L ir regulāra ir nepareizs.

Slēdziens: L Ir neregulāra valoda

Neregulāras valodas $\{a^n b^n : \quad n \geq 0\}$

Uzdevumi

Pierādīt, ka valodas ir neregulāras:

$$a.\quad \{vv^R \mid \ v \in \{a,b\}^*\}$$

$$b.\quad \{a^n b^t \mid \ n > t\}$$

$$c.\quad \{v \mid \ v \in \{a,b\}^* \, un \ \ a \ \ ir \ \ maz\bar{a}a\, nek\bar{a} \ \ b\}$$

$$d.\quad \{a^n b^l c^{n+l} \mid \ n, l \geq 0\}$$

$$e.\quad \{a^{n!} \mid \ n \geq 0\} \qquad n! \ = \ 1 \cdot 2 \cdots \ (n-1) \cdot n$$

$$f.\quad \{x \mid x \in \{a,b\}^* un\, x = x^{rev}\}$$

$$g.\quad \{a^{n2} \mid n \geq 1\}$$

$$h.\quad \{a^n b^t \mid n \neq t\} \qquad i.\quad \{x \mid x \in \{a,b\}^*, and\ x \neq x^{rev}\}$$

- Pieņemsim pretējo, ka šī valoda ir regulāra.
- Tad ir spēkā Pumpējošā lemma – eksistē fiksēta konstante m, kas apmierina Pumpējošās lemmas nosacījumus.
- Izvēlēsimies:

$$a.\quad \{vv^R \mid v \in \{a,b\}^*\}$$

- Pieņemsim pretējo, ka šī valoda ir regulāra.
- Tad ir spēkā Pumpējošā lemma – eksistē fiksēta konstante m, kas apmierina Pumpējošās lemmas nosacījumus.
- Izvēlēsimies:

$$w = a^m bba^m$$

$$xyz = a^m bba^m, \quad kur \mid xy \mid \leq m \; un \mid y \mid > 0 \;\; \Rightarrow \;\; xy^k z \in L, \; k \geq 0$$

$$x = a^i, \; y = a^j, \; z = a^{m-i-j} bba^m, \quad kur \;\; j > 0$$

$$xy^0 z = a^i (a^j)^0 a^{m-i-j} bba^m = a^{m-j} bba^m$$

$$a^{m-j} bba^m \notin L$$

- Pieņemsim pretējo, ka šī valoda ir regulāra.

$$b\ \{a^n b^t \mid n \neq t\}$$

- Tad ir spēkā Pumpējošā lemma – eksistē fiksēta konstante m, kas apmierina Pumpējošās lemmas nosacījumus.
- Izvēlēsimies:

  - Pieņemsim pretējo, ka šī valoda ir regulāra.
  - Tad ir spēkā Pumpējošā lemma – eksistē fiksēta konstante m, kas apmierina Pumpējošās lemmas nosacījumus.
  - Izvēlēsimies:

$$w = a^{m+1} b^m$$

$$xyz = a^{m+1} b^m, \quad kur\, |xy| \leq m\ un\ |y| > 0 \ \Rightarrow \ xy^k z \in L,\ k \geq 0$$

K=0

Pieņemsim pretējo, ka šī valoda ir regulāra.

- Tad ir spēkā Pumpējošā lemma – eksistē fiksēta konstante m, kas apmierina Pumpējošās lemmas nosacījumus.

c. $\{v \mid \; v \in \{a,b\}^*, kur\; a\; ir\; mazāk\; nekā\; b$

- Izvēlēsimies:

- Pieņemsim pretējo, ka šī valoda ir regulāra.
- Tad ir spēkā Pumpējošā lemma – eksistē fiksēta konstante m, kas apmierina Pumpējošās lemmas nosacījumus.
- Izvēlēsimies:

$$w = a^m b^{m+1}$$

$$xyz = a^m b^{m+1}, \quad kur\,|\,xy\,| \le m\ un\ |\,y\,| > 0 \;\Rightarrow\; xy^k z \in L,\ k \ge 0$$

K=2