Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ «РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(РГГМУ)

Кафедра высшей математики
и теоретической механики

Механика жидкости и газа

РГГМУ

Санкт – Петербург
2016

- Презентация курса лекций по механике жидкости и газа. СПб, РГГМУ, 2016 – 115 слайдов.
- Курс лекций содержит описание основных теоретических положений по разделам курса механики жидкости и газа на английском языке.
- Курс лекций предназначен для студентов, обучающихся по специальности «Прикладная метеорология» на втором курсе метеорологического факультета РГГМУ.
- Одобрено методической комиссией РГГМУ.
- Составитель: О.М.Покровский
- Ответственный редактор: А.Д.Егоров.

ЛЕКЦИЯ 1.
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЙ В МЕХАНИКЕ ЖИДКОСТИ

ВВЕДЕНИЕ

Понятие о частицах жидкости, которым широко оперирует механика жидкости и газа, неразрывно связано с понятием о физически бесконечно малом объеме. Это объем, размеры которого пренебрежимо малы по сравнению с характерными размерами объекта, но он содержит в себе настолько много молекул, что его средние характеристики (например, плотность) становятся устойчивыми по отношению к изменению объема. Поэтому, например, фраза «объем стягивается в точку» означает, что он стремится не к нулю, а к физически бесконечно малому объему. Следует твердо усвоить, что все законы механики жидкости справедливы до тех пор, пока справедлива модель сплошной среды. Количественно это можно оценить по величине **числа Кнудсена,** представляющего отношение **длины свободного пробега молекул *l к характерному размеру течения L, т.е.***

$$Kn=l/L \qquad (1.1)$$

Принято считать, что законы механики жидкости справедливы, если .
Kn<001

1.1. Векторы и операции над

Единичные векторы (орты) в декартовой системе координат будем обозначать $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$. Тогда вектор $\vec{u}$ может быть представлен как

$$\vec{u} = \vec{e}_x u_x + \vec{e}_y u_y + \vec{e}_z u_z \qquad (1.2)$$

где u_x, u_y, u_z - проекции (компоненты) вектора на соответствующие оси координат.

Скалярное произведение двух векторов дает скалярную величину

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |u||v| \cos\alpha \qquad (1.3)$$

где α - угол между векторами.

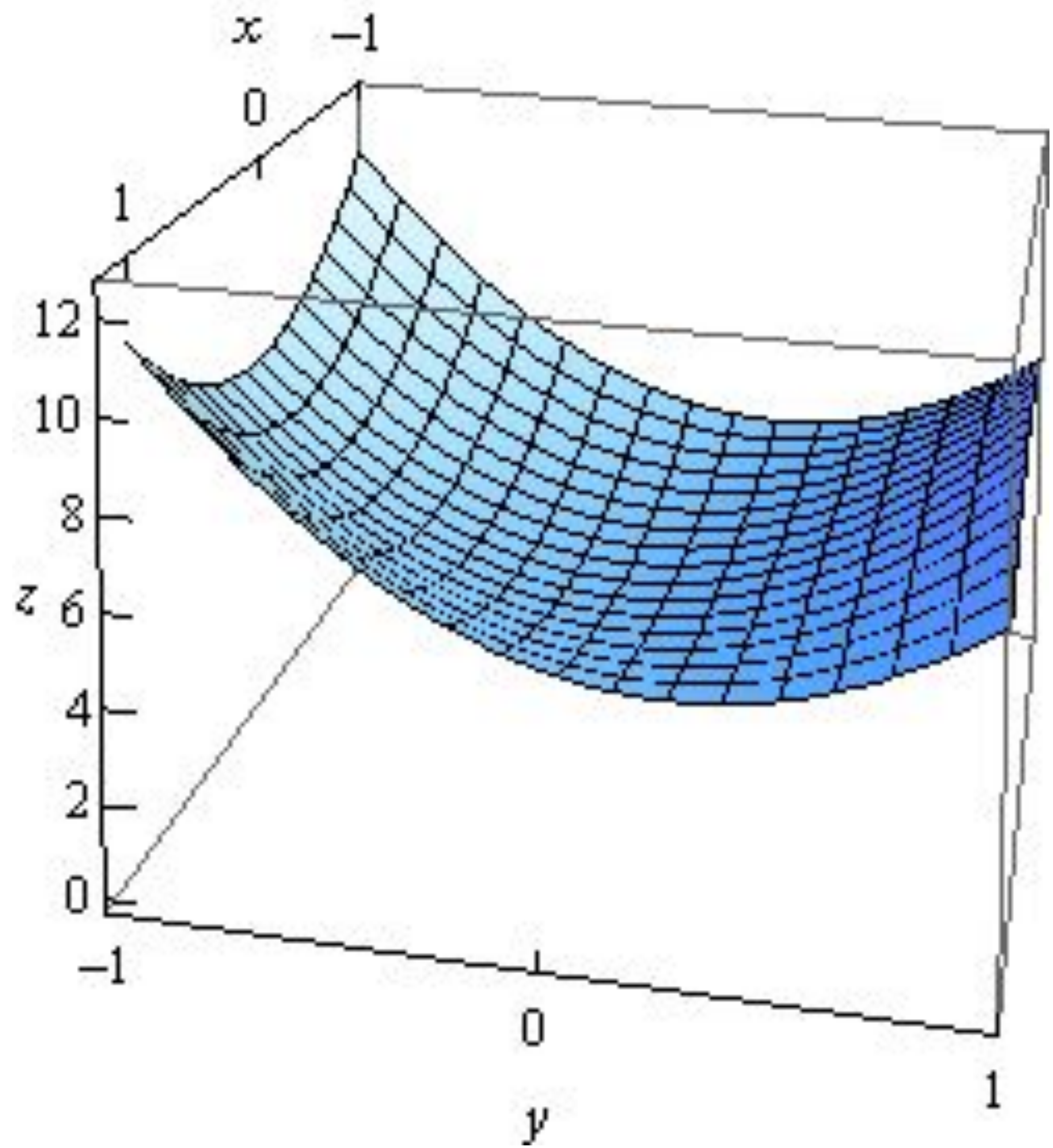
1. Векторное произведение двух векторов.

В противоположность скалярному произведению, здесь первое слово указывает на то, что результат действия есть вектор. Векторное произведение может быть записано в виде определителя третьего порядка

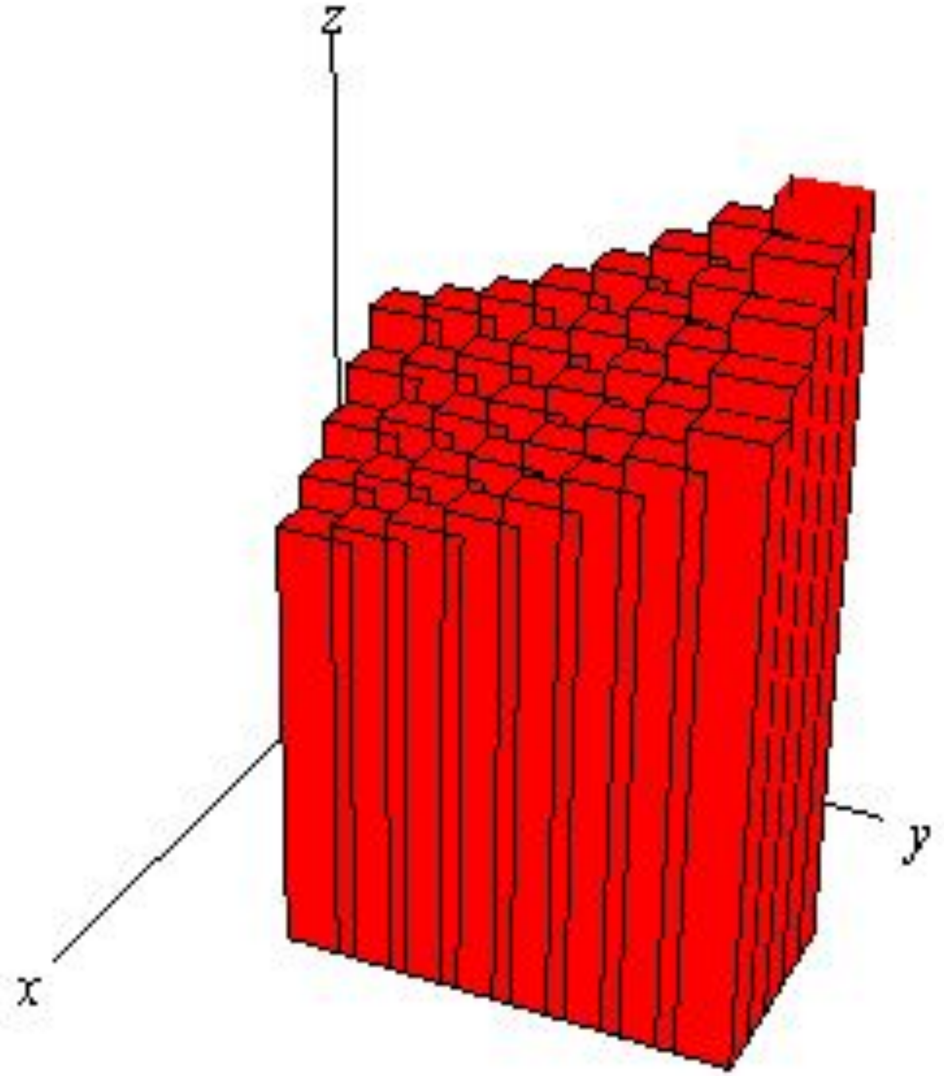
$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \qquad (1.4)$$

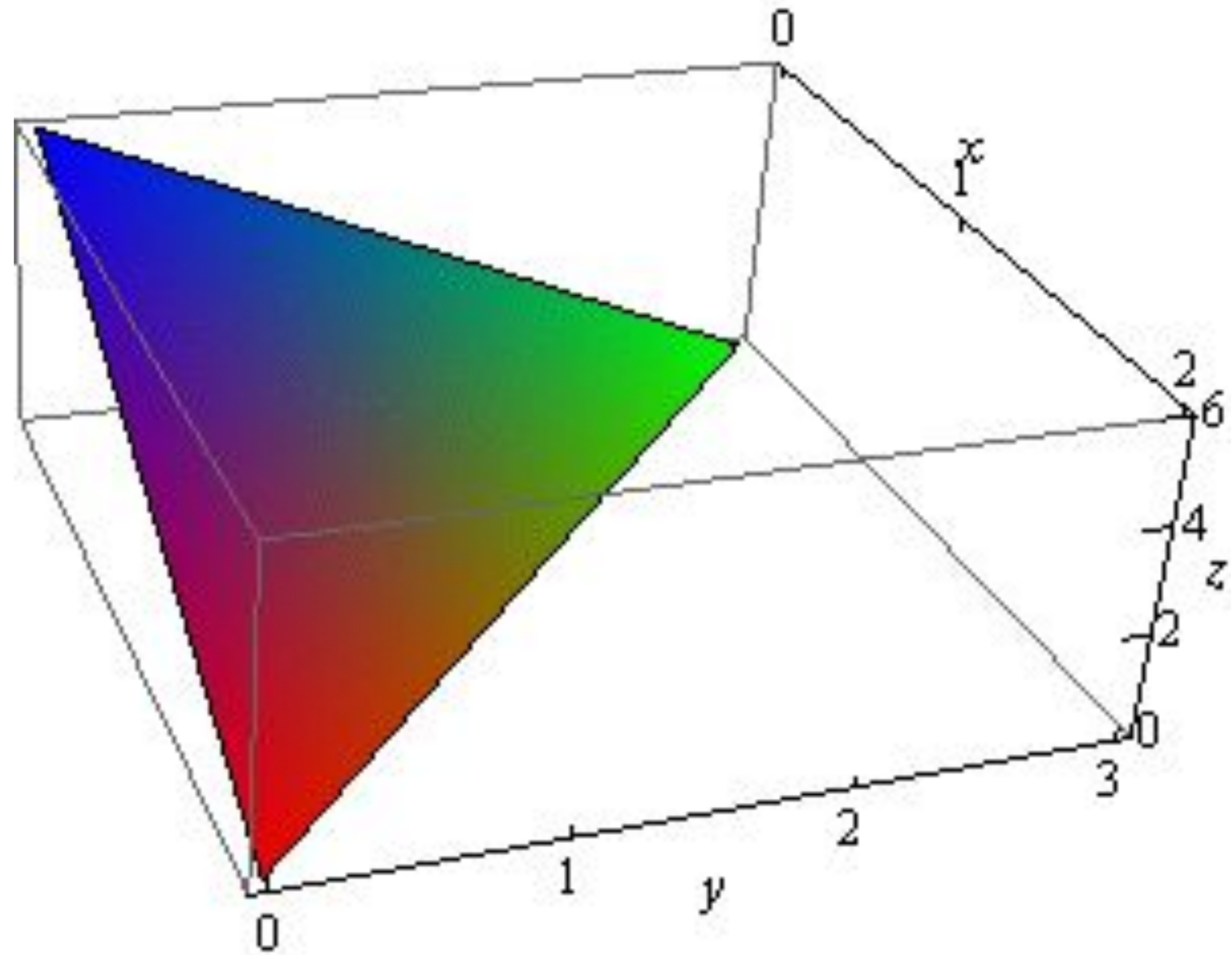
Раскрывая определитель по общим правилам, получаем:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{e}_x (u_y v_z - u_z v_y) - \vec{e}_y (u_x v_z - u_z v_x) + \vec{e}_z (u_x v_y - u_y v_x) \qquad (1.5)$$



x
−1
0
1
12
10
8
z
6
4
2
0
−1
0
1
y


z
x
y



0
x
1
2
6
4
z
2
0
3
2
1
y
0

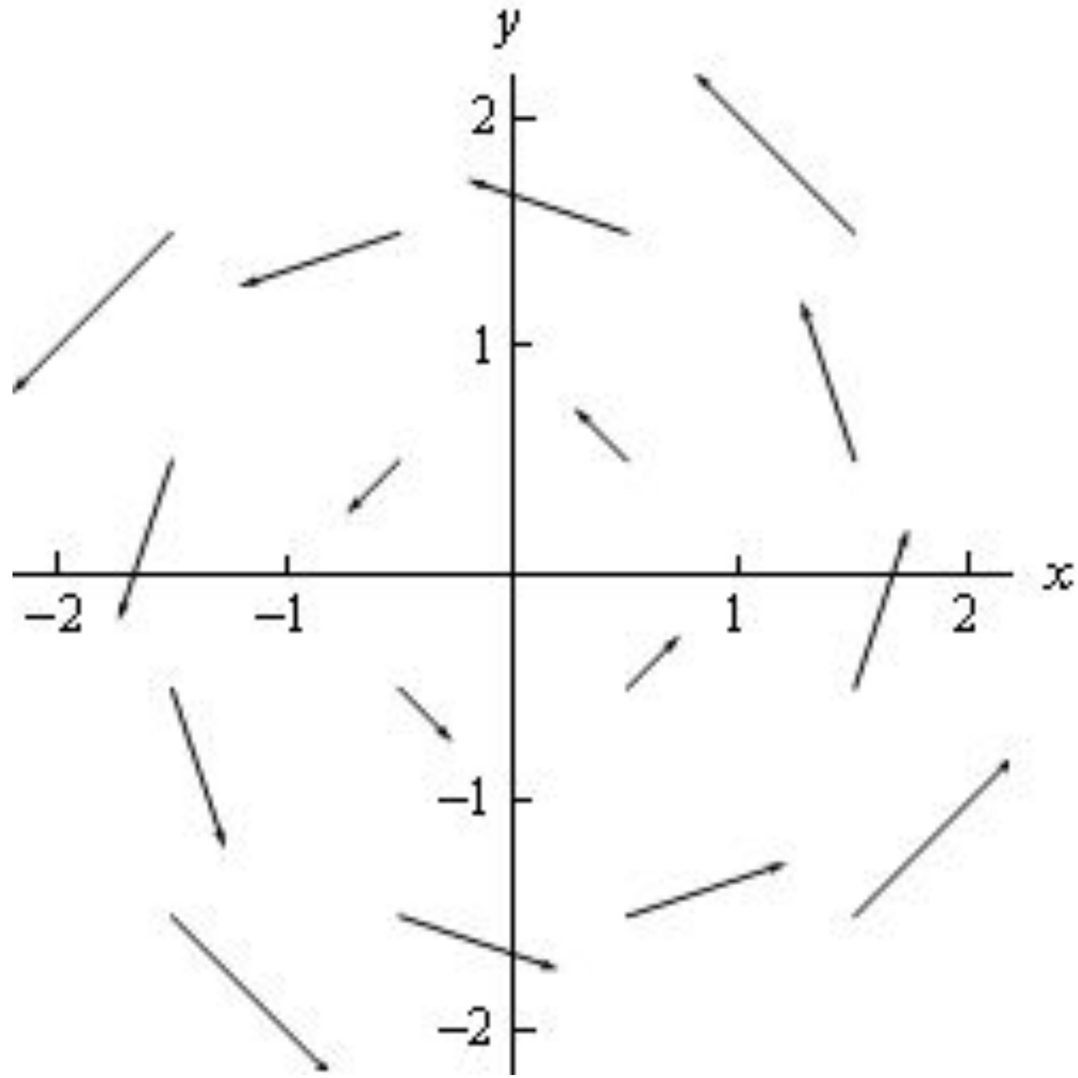
ПРИМЕРЫ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

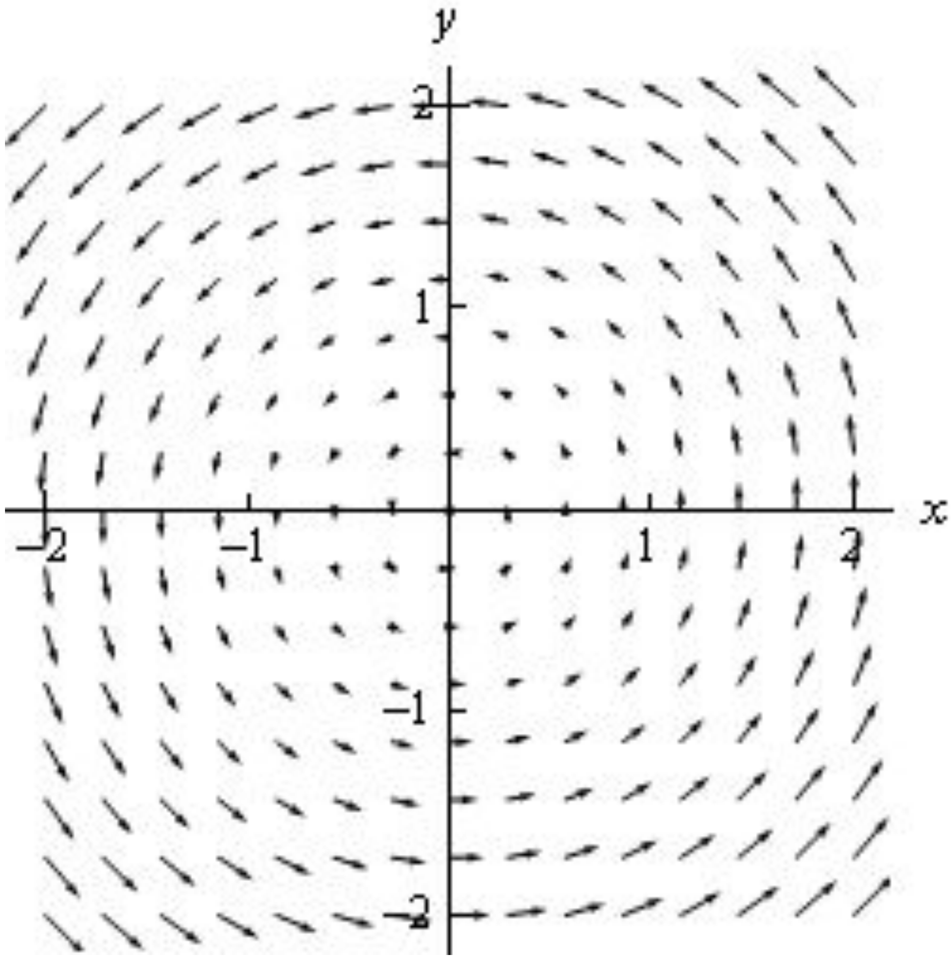
$$\vec{F}(x,y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$$

$$\vec{F}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$$

$$\vec{F}\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) = -\left(-\frac{1}{2}\right)\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$$

$$\vec{F}\left(\frac{3}{2},\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j}$$


y
2
1
−1
−2
x
−2
−1
1
2

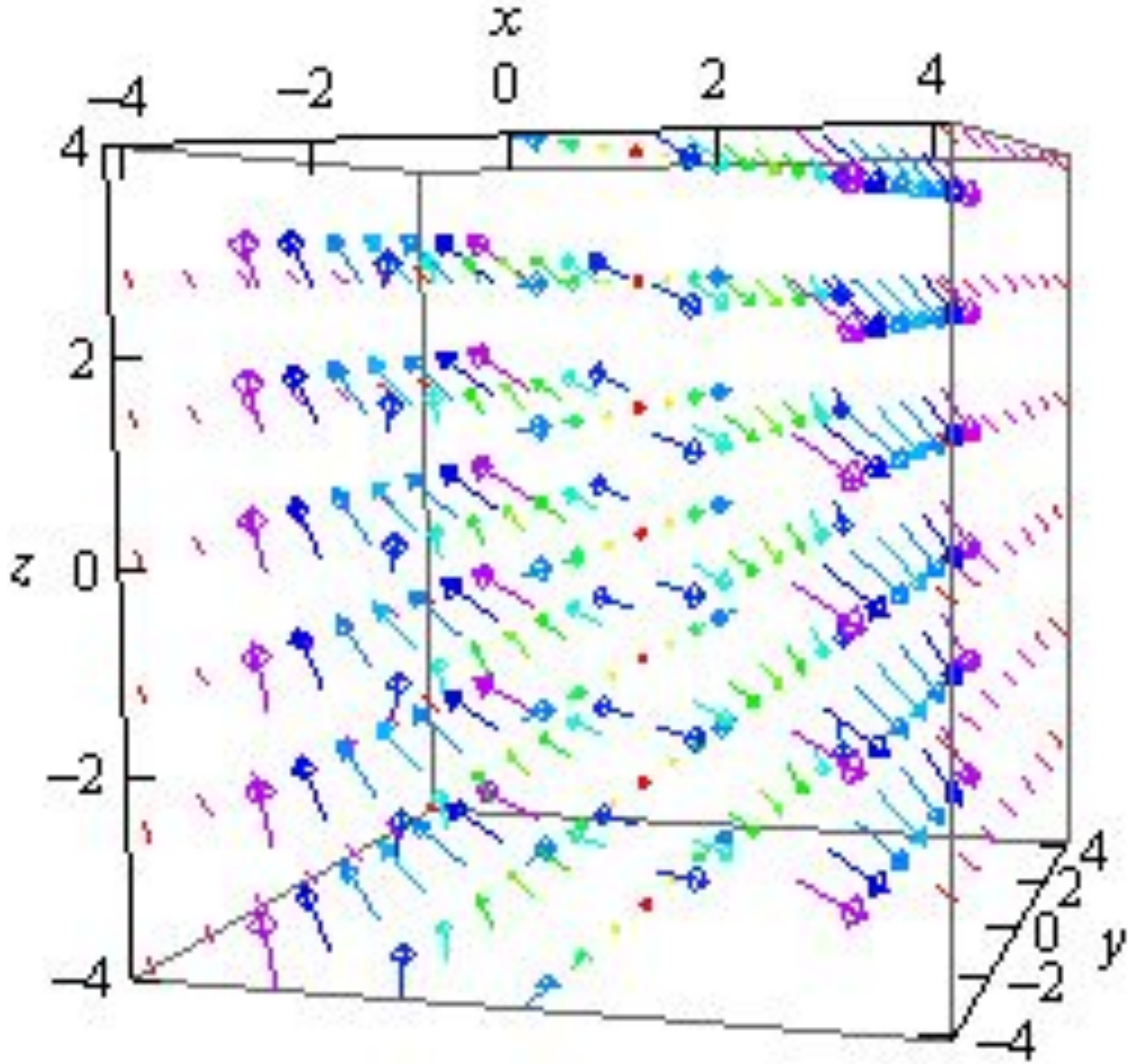


y
x
−2
−1
1
2
1
−1
−2
2

$$\vec{F}(x, y, z) = 2x\,\vec{i} - 2y\,\vec{j} - 2x\,\vec{k}$$

$$\vec{F}(1, -3, 2) = 2\vec{i} + 6\,\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\vec{F}(0, 5, 3) = -10\,\vec{j}$$



x
−4
−2
0
2
4
z
4
2
0
−2
−4
y
4
2
0
−2
−4

1.2. Операции первого порядка (дифференциальные характеристики поля).

Градиент какой-то скалярной функции $\varphi(x,y,z)$ есть вектор, образующийся в результате выполнения следующих действий:

$$\operatorname{grad}\varphi = \vec{e}_x \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial\varphi}{\partial z} \qquad (1.6)$$

Физически градиент есть вектор, в направлении которого функция в данной точке поля изменяется с максимальной скоростью.

Дивергенцией вектора $\vec{u}$ называется выражение вида

$$\operatorname{div}\vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \qquad (1.7)$$

Следовательно, любое векторное поле дает некоторое скалярное поле, а именно поле своей дивергенции (расходимости). Если $\operatorname{div}\vec{u} = 0$, то поле называют соленоидальным.

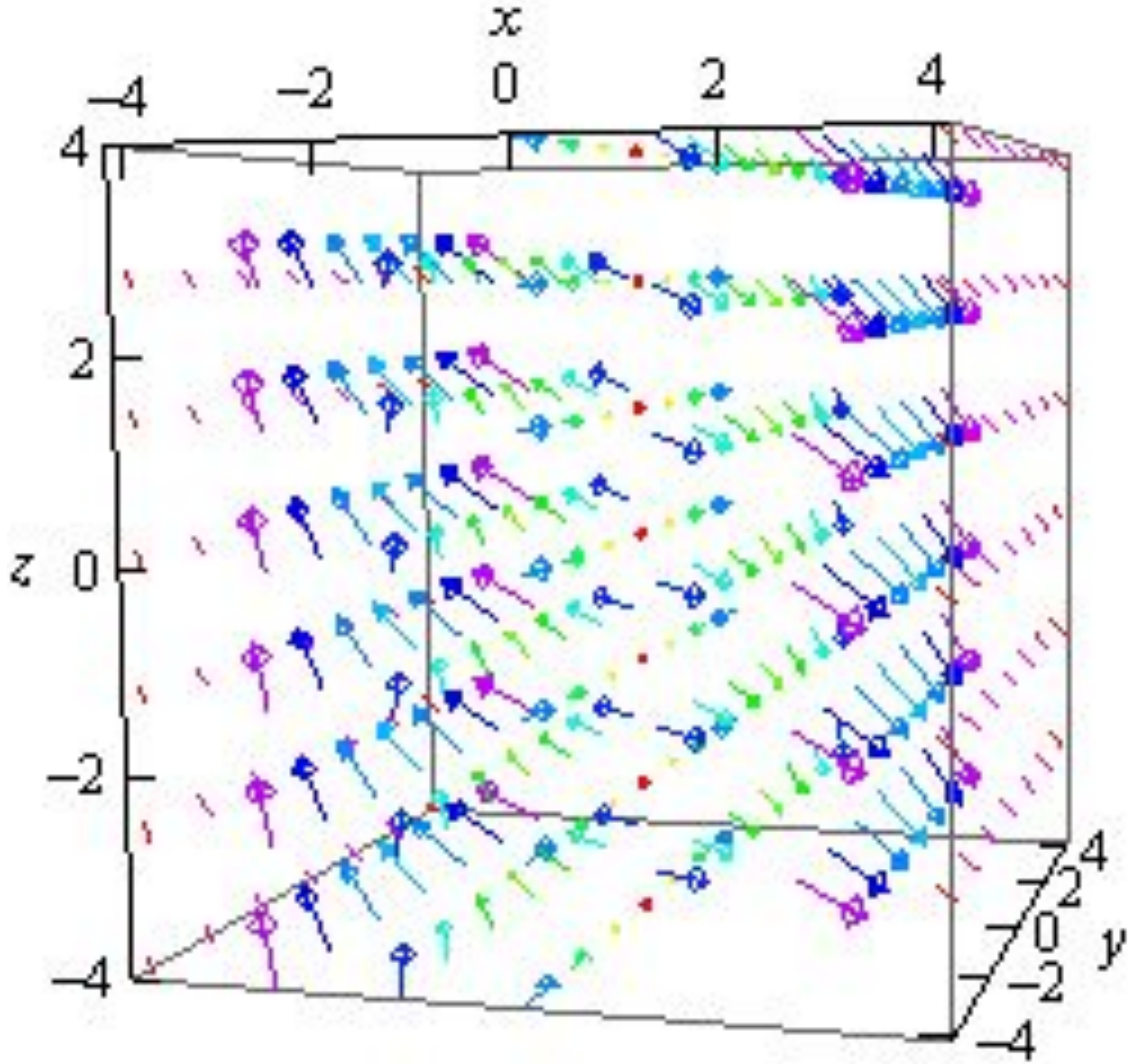
Вихрь поля (ротор) - это вектор, образующийся при выполнении операции

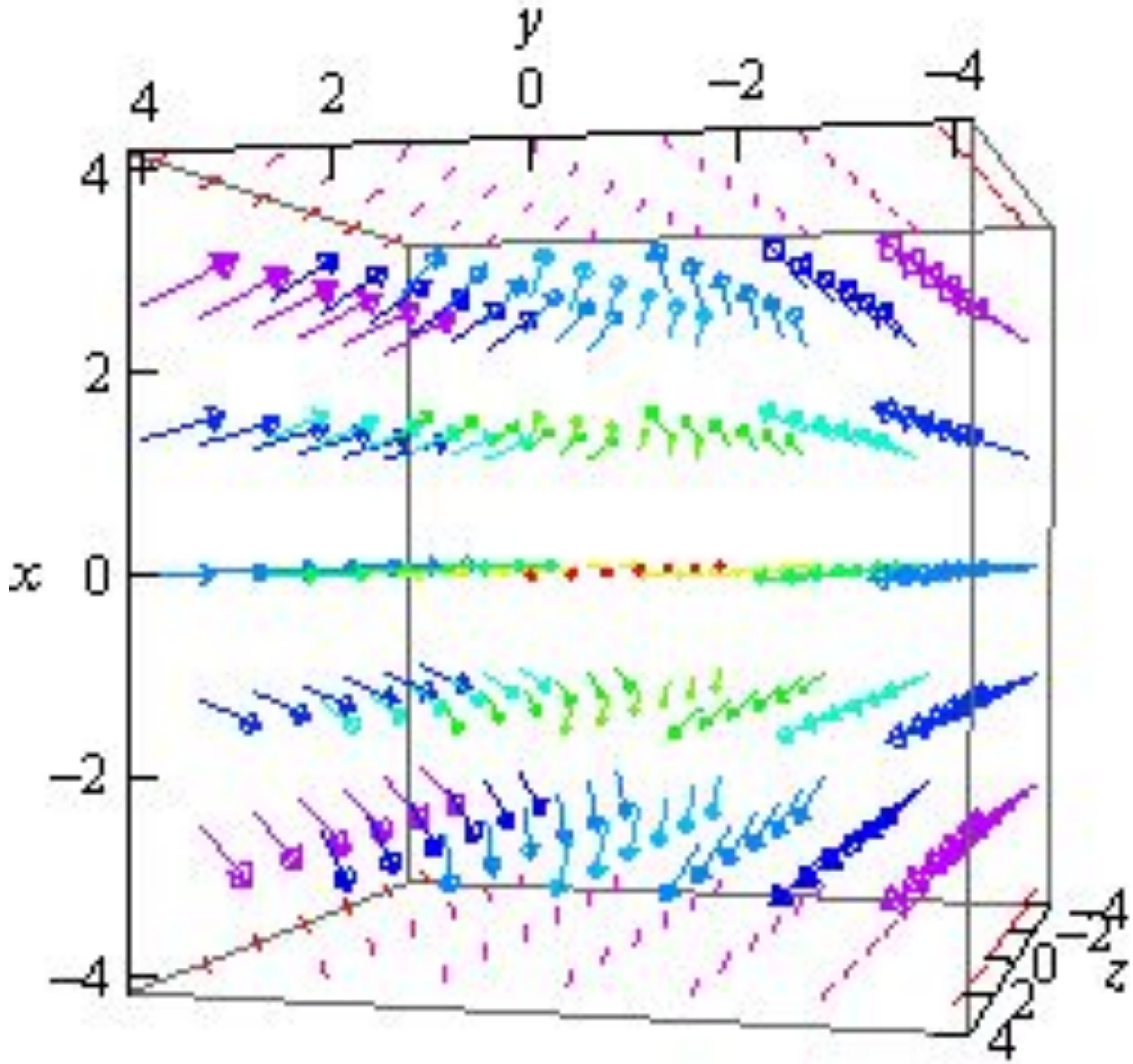
$$\operatorname{rot}\vec{u} = \vec{e}_x\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) + \vec{e}_y\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) + \vec{e}_z\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \qquad (1.8)$$

Если $\operatorname{rot}\vec{u} = 0$, то поле называют безвихревым.

$$\operatorname{div}\vec{F} = \nabla \bullet \vec{F}$$

$$\operatorname{curl}\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$


x
−4
−2
0
2
4
z
4
2
0
−2
−4
y
4
2
0
−2
−4

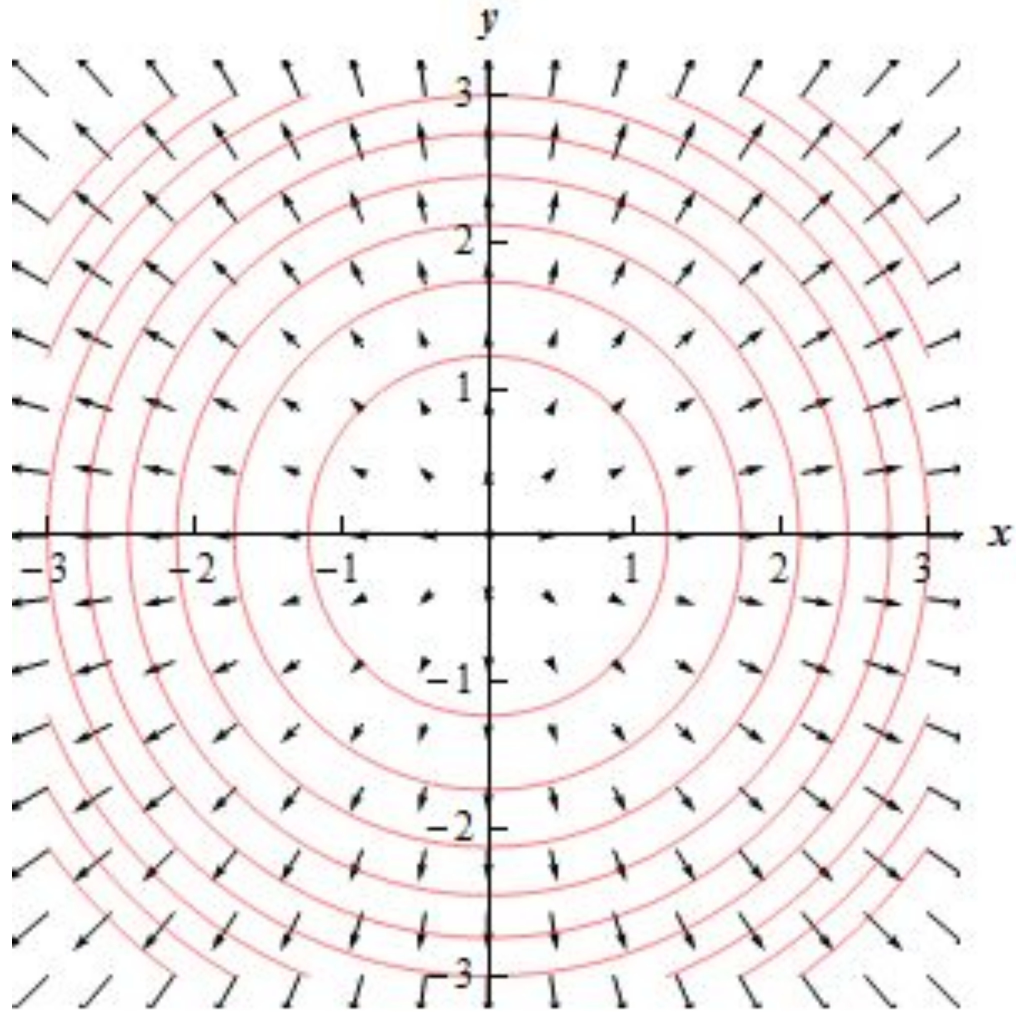

y
4
2
0
−2
−4
x
4
2
0
−2
−4
z
−4
−2
0
2
4

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

$$f(x,y) = k$$

$$\nabla f(x,y) = 2x\vec{i} + 2y\vec{j}$$

$$\vec{F} = \nabla f$$



y
x
3
2
1
−1
−2
−3
−3
−2
−1
1
2
3

1.3. Операции второго порядка.

Операции $\operatorname{grad}\varphi$, $\operatorname{div}\vec{u}$, $\operatorname{rot}\vec{u}$, переводящие скаляр в вектор, вектор в скаляр и вектор в вектор порождают пять операций второго порядка:

- превращение скалярной величины в векторную

$$\operatorname{grad}(\operatorname{div} u);$$

- превращение векторной величины в скалярную

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi);$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{u});$$

- превращение одной векторной величины в другую

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi);$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{u}).$$

В теории поля показывается, что два из этих пяти соотношений тождественно равны нулю: $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{u})\equiv 0$ и $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi)\equiv 0$. Операция $\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi)$ носит название оператора Лапласа для скалярного поля и имеет вид

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi)=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \tag{1.9}$$

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$$

$$\vec{n} = \frac{y'(t)}{\left\|\vec{r}'(t)\right\|}\vec{i} - \frac{x'(t)}{\left\|\vec{r}'(t)\right\|}\vec{j}$$

$$f(x,y,z) = z - g(x,y)$$

$$\vec{n} = \frac{\nabla f}{\left\|\nabla f\right\|} = \frac{-g_x\,\vec{i} - g_y\,\vec{j} + \bar{k}}{\sqrt{\left(g_x\right)^2 + \left(g_y\right)^2 + 1}}$$

$$\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\left\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\right\|}$$

1.4. Интегральные соотношения теории поля.

1.4.1. Поток векторного поля.

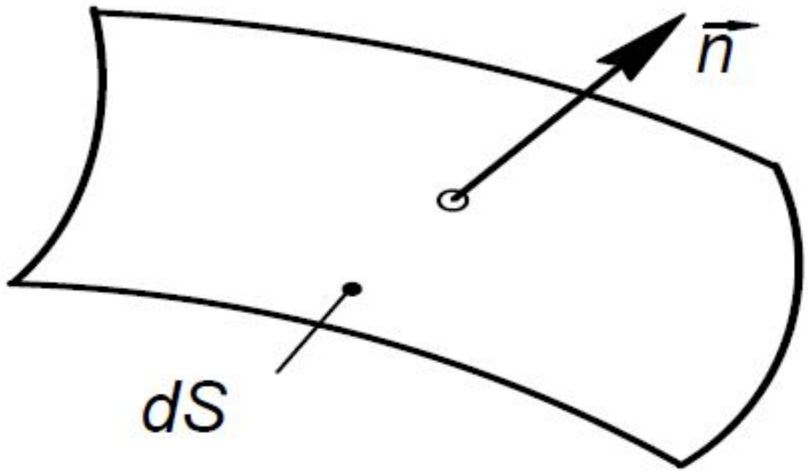


Рис. 1.1

Пусть dS (рис. 1.1) - элемент поверхности, а $\vec{n}$ - единичный вектор, направленный по внешней нормали. Потоком векторного поля (например, $\vec{u}$) называют поверхностный интеграл вида

$$\iint_S \vec{u} \cdot \vec{n} dS \qquad (1.10)$$

Если рассматривается векторное поле ротора ($\operatorname{rot} \vec{u}$), то поток этого поля представляется как

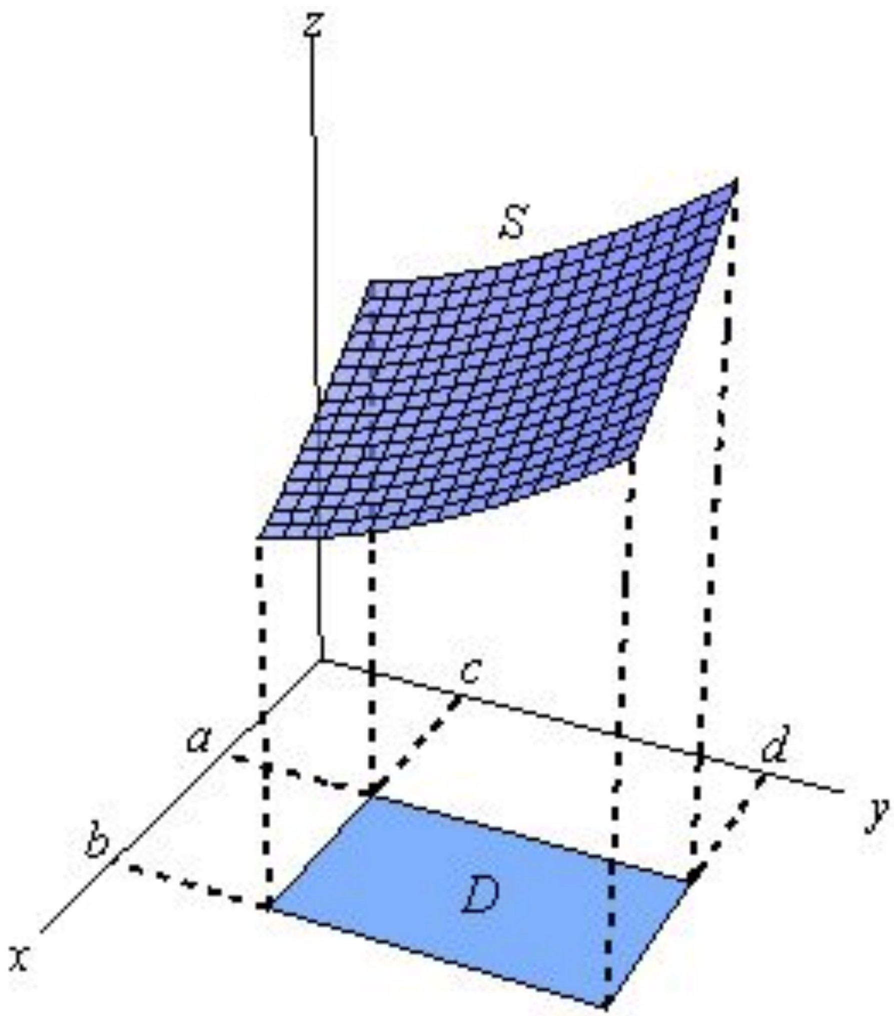
$$\iint_S (\operatorname{rot} \vec{u}) \vec{n} dS \qquad (1.11)$$

1.4.2. Циркуляция векторного поля.

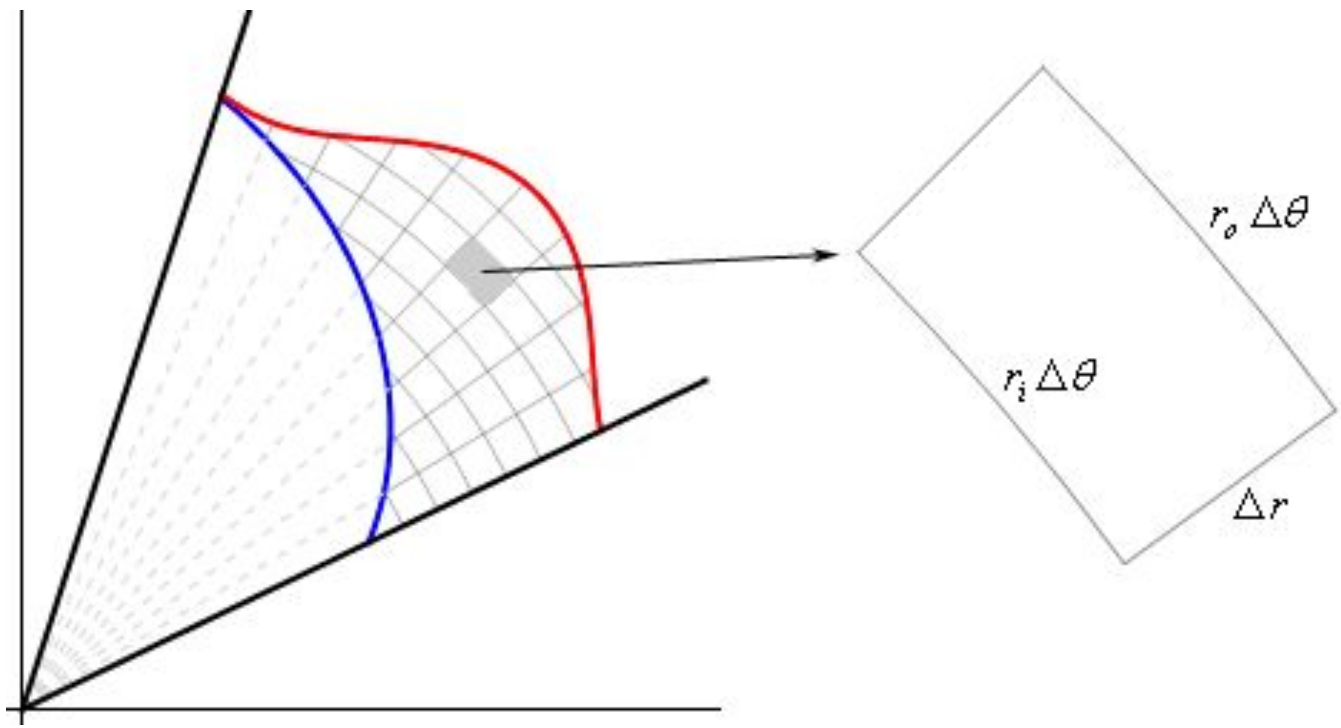
Пусть рассматривается векторное поле какой-то величины $\vec{u}$. Циркуляцией вектора $\vec{u}$ вдоль контура L называют криволинейный интеграл вида

$$\Gamma = \int_L \vec{u} \cdot d\vec{l} \qquad (1.12)$$

Иногда этот интеграл интерпретируется как «работа» векторного поля вдоль контура L. Если циркуляция векторного поля вдоль замкнутого пути (контура) равна нулю, то поле называют потенциальным.



z
S
c
a
d
y
b
D
x



$r_o\,\Delta\theta$
$r_i\,\Delta\theta$
Δr

$$\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$$

$$\iint_S \vec{F} \bullet d\vec{S} = \iint_S \vec{F} \bullet \vec{n}\, dS$$

$$= \iint_D \left(P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}\right) \bullet \left(\frac{-g_x\vec{i} - g_y\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{(g_x)^2 + (g_y)^2 + 1}} \right) \sqrt{(g_x)^2 + (g_y)^2 + 1}\, dA$$

1.4.3. Формула Стокса.

Эта формула позволяет преобразовать криволинейный интеграл вдоль замкнутой пространственной кривой в поверхностный интеграл по поверхности, натянутой на эту кривую, т.е.

$$\oint_L \vec{u} \cdot d\vec{l} = \iint_S \left(\operatorname{rot} \vec{u}\right) \cdot \vec{n} dS \qquad (1.13)$$

т.е. циркуляция вектора поля вдоль контура равна потоку вихря через поверхность, ограниченную этим контуром.

1.4.4. Формула Гаусса-Остроградского.

Это соотношение, часто называемое преобразованием Гаусса-Остроградского, связывает поверхностный интеграл по замкнутой поверхности с тройным интегралом по области, ограниченной этой поверхностью

$$\iint_S \vec{u} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{u} dV \qquad (1.15)$$

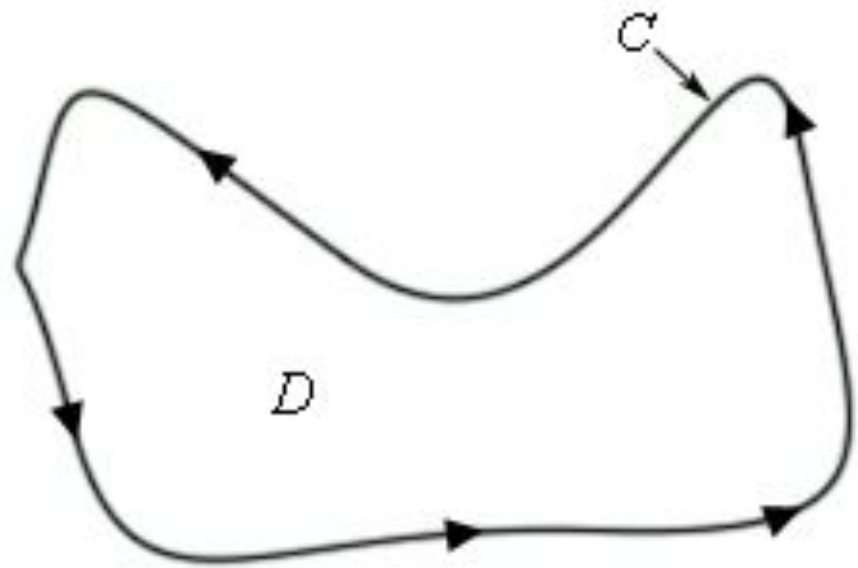
Формула показывает, что поток векторного поля через замкнутую поверхность равен тройному интегралу от дивергенции поля по объему, ограниченному этой поверхностью.

В механике жидкости широко используется формула, являющаяся следствием формулы Гаусса-Остроградского для скалярного поля

$$\iint_S \varphi \vec{n} dS = \iiint_V \operatorname{grad} \varphi dV \qquad (1.16)$$

где φ - какая-то скалярная функция.

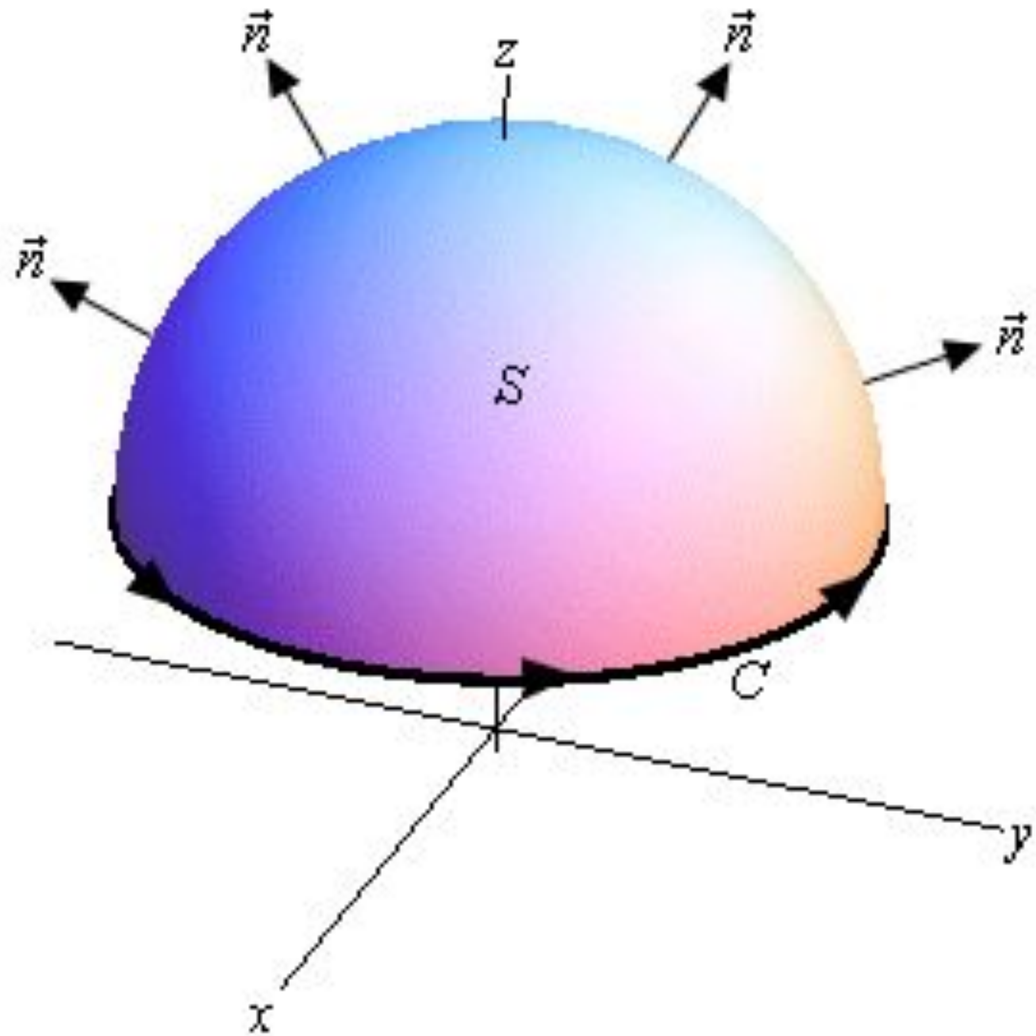
ТЕОРЕМА ГРИНА



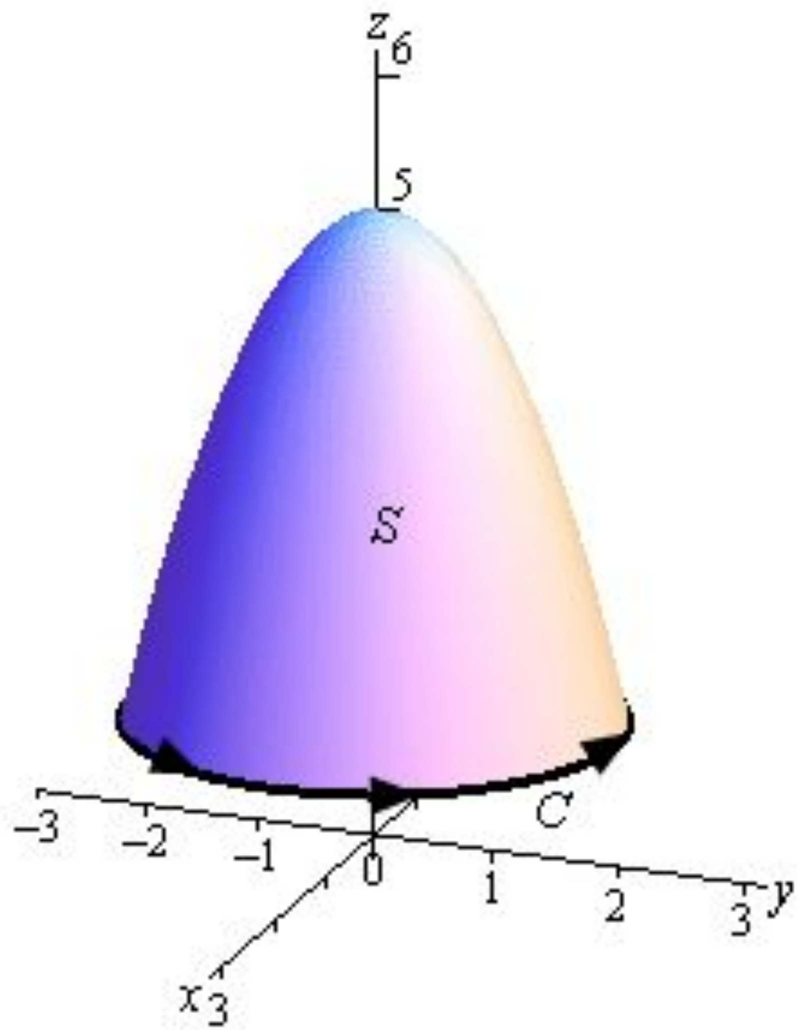
Green's Theorem

Let C be a positively oriented, piecewise smooth, simple, closed curve and let D be the region enclosed by the curve. If P and Q have continuous first order partial derivatives on D then,

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$



$\vec{n}$
$\vec{n}$
z
$\vec{n}$
$\vec{n}$
S
C
y
x



z
6
5
S
C
-3
-2
-1
0
1
2
3
y
x
3

ЛЕКЦИЯ 2.

ОСНОВНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА И ПАРАМЕТРЫ ЖИДКОСТИ. СИЛЫ И НАПРЯЖЕНИЯ.

2.1. Плотность.

Под средней плотностью, либо, что то же, плотностью физически бесконечно малого объема, понимают частное от деления его массы на объем, т.е.

$$\rho = \frac{M}{V} \qquad (2.1)$$

Плотность выражается в кг/м^3.

В литературе часто оперируют понятием удельного веса, т.е. частного от деления веса частицы на ее объем

$$\gamma = \frac{G}{V} = \frac{gM}{V} \qquad (2.2)$$

Как следует из (2.2), удельный вес выражается в Н/м^3. Заменяя в (2.2) M/V его значением из (2.1), получаем связь между плотностью и удельным весом:

$$\gamma = \rho g \qquad (2.3)$$

Таким образом, в международной системе (СИ) плотность воды при $t = 4^0 C$ $\rho = 1000$ кг/м^3, а ее удельный вес $\gamma = 9800$ Н/м^3.

2.2. Вязкость.

Под вязкостью понимают свойство жидкости оказывать сопротивление перемещению ее частиц. Физической причиной вязкости является молекулярное взаимодействие. Вследствие различия в молекулярной структуре капельных жидкостей и газов различна и природа их вязкостей. В жидкостях вязкость есть проявление сил сцепления между молекулами, в газах она - результат взаимодействия, обусловленный хаотическим движением молекул. Поэтому при повышении температуры в газах вязкость увеличивается за счет более интенсивного движения молекул. Наоборот, в капельных жидкостях повышение температуры приводит к снижению вязкости, т.к. происходит увеличение среднего расстояния между молекулами.

Равновесное состояние вещества характеризуется распределением его параметров в пространстве. Если за счет какого-либо воздействия окажется, что в каком-то месте пространства возникла неравновесность, то в веществе начинает происходить механический или тепловой обмен, который стремится сгладить неравномерность. В общем случае этот обмен называют процессом переноса. В различных явлениях можно наблюдать процессы переноса энергии, массы (вещества) и количества движения. Как будет показано ниже, вязкость обусловлена процессом переноса количества движения.

Для уяснения того, как проявляются силы вязкости, рассмотрим течение жидкости в круглой трубе. Будем считать, что векторы скоростей частиц параллельны оси x. Забегая вперед, отметим, что такое течение существует в природе и носит название ламинарного.

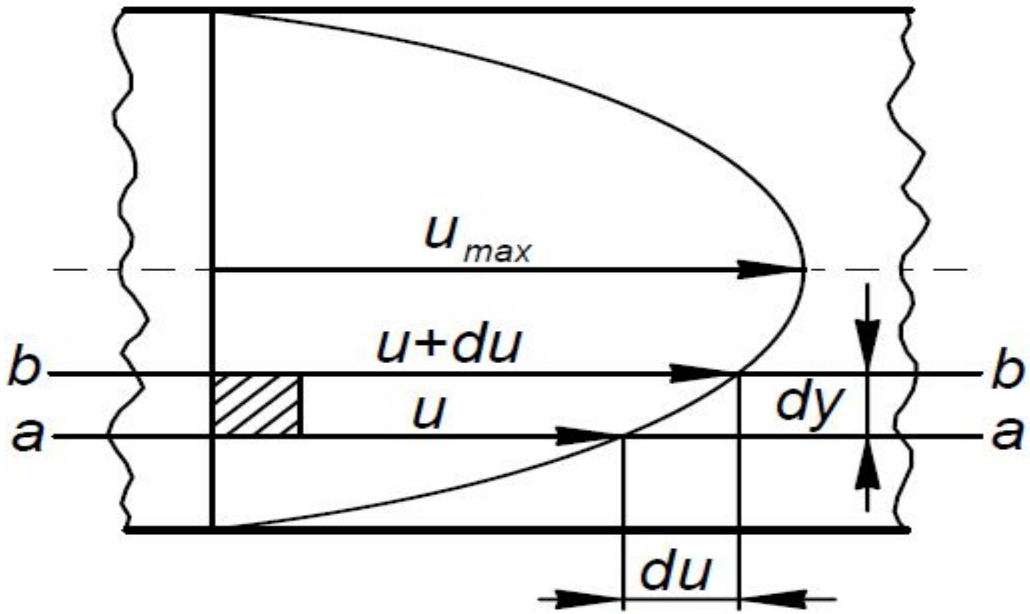


Рис. 2.1

Пользуясь чисто интуитивными представлениями, установим вид распределения скоростей в поперечном сечении потока. Сразу же отметим, что графическое изображение распределения скоростей в поперечном сечении называют эпюрой скоростей (либо полем скоростей). Очевидно, что скорости частиц, находящихся на стенках трубы, равны нулю и возрастают по мере приближения к оси (на оси $u = u_{\max}$) как это показано на рис. 2.1.

Рассмотрим два слоя жидкости (a-a и b-b), расположенные на расстоянии dy. Пусть слой a-a движется со скоростью u, тогда, как следует из эпюры, слой b-b имеет скорость $u+du$. Таким образом, на верхней и нижней гранях прямоугольной жидкой частицы, расположенной между слоями, скорости различны, что в соответствии с законами механики должно привести к ее деформации. Заметим, что такое движение в гидромеханике называют простым сдвигом, либо течением чистого сдвига.

Взаимодействие молекул через этот элемент приводит к появлению касательной составляющей напряжения. При этом знак этой составляющей, т.е. ее направление, таково, что оно соответствует уменьшению разности скоростей по обе стороны рассматриваемого элемента. Величина силы трения, возникающая между слоями движущейся жидкости, определяется по формуле, предложенной Ньютоном и подтвержденной многочисленными и тщательно поставленными опытами нашего соотечественника профессора Н.П.Петрова. Эта формула имеет вид:

$$F_{\square\text{р}} = \mu \frac{du}{dy} S \qquad (2.4)$$

где S - площадь поверхности соприкасающихся слоев;

μ - динамическая вязкость, зависящая от физической природы жидкости, ее агрегатного состояния и температуры, и практически не зависящая от давления. Динамическая вязкость выражается в Па·с.

В технических приложениях часто используется не динамическая, а кинематическая вязкость, представляющая собой отношение

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \qquad (2.5)$$

Кинематическая вязкость выражается в м^2/с.

Величина $\frac{du}{dy}$ характеризует изменение скорости в направлении нормали к ней, либо, если говорить об эпюре - темп изменения скорости. Иногда эту величину называют поперечным градиентом скорости.

Разделим правую и левую части (2.4) на S. Отношение $F_{тр}/S$ есть не что иное, как касательное напряжение τ, т.е.

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \tag{2.6}$$

Таким образом, можно сказать, что вязкость жидкости - это способность ее оказывать сопротивление касательным напряжениям.

Из (2.6) можно сделать еще один важный вывод. Если жидкость находится в состоянии покоя, то $u = 0$ и, следовательно, $\tau = 0$, т.е. в покоящейся жидкости силы вязкости не проявляются. Это согласуется и с обычными житейскими представлениями. Действительно, для того, чтобы ответить на вопрос о том, является ли вязкой среда, налитая в сосуд, например, стакан, стоящий на столе, необходимо либо попытаться перелить ее в другой сосуд, либо, обмакнув в нее какой-то предмет, посмотреть, как она стекает с него. Смысл этих действий в том, что мы интуитивно чувствуем, что требуется наблюдать движение этой среды.

Выше было высказано предположение, что вязкость обусловлена переносом количества движения. Для того, чтобы убедиться в этом, рассмотрим формулу Ньютона с позиций физических величин, входящих в нее

$$[\tau] \to Па \to \frac{Н}{м^2} \to \frac{кг \cdot м}{с^2 \cdot м^2} \to \frac{кг \cdot м/с}{м^2 с}$$

В числителе - количество движения, т.е. τ - это количество движения, переносимое через единицу поверхности в единицу времени.

И, наконец, установим физический смысл поперечного градиента скорости, для чего рассмотрим жидкую частицу, показанную на рис. 2.2. Вследствие разности скоростей на верхней и нижней гранях, первоначально прямоугольная частица будет деформироваться и превращаться в параллелограмм.

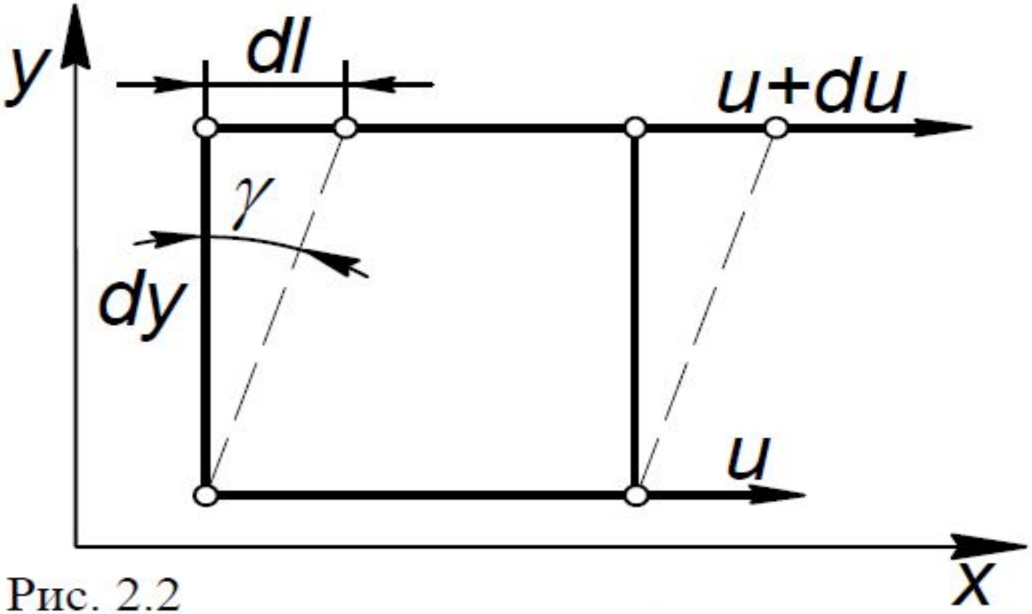


Рис. 2.2

Отрезок dl характеризует величину деформации за время dt, т.е. $dl = du \cdot dt$, тогда $\frac{du}{dy} = \frac{dl}{dt \cdot dy}$, но $\frac{dl}{dy} = \operatorname{tg}\gamma$, тогда $\frac{du}{dy} = \frac{\operatorname{tg}\gamma}{dt}$. Следовательно, поперечный градиент скорости представляет собой скорость относительной деформации сдвига. Таким образом, касательное напряжение в жидкости линейно зависит от скорости относительной деформации. В этом принципиальное отличие жидкости от твердого тела, в котором касательные напряжения зависят от величины деформации, а не от ее скорости.

Жидкости, удовлетворяющие (2.6) называются ньютоновскими, а не подчиняющиеся этой формуле - неньютоновскими. К числу последних относятся растворы полимеров и др.

2.3. Классификация сил.

Как и в механике твердого тела, в гидромеханике силы классифицируются по разным признакам: внутренние и внешние, сосредоточенные и распределенные.

2.3.1. Массовые силы

Массовыми называют силы, величина которых пропорциональна массе рассматриваемого объема. Важнейшей особенностью является то, что они действуют на все частицы жидкости. В общем случае это силы, подчиняющиеся второму закону Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$. В проекциях на декартовы оси координат можно записать: $F_x = ma_x$; $F_y = ma_y$; $F_z = ma_z$. В гидромеханике вместо a_x, a_y, a принято писать X, Y, Z. Поделив обе части записанных выражений на массу получим $\frac{F_x}{m} = X$; $\frac{F_y}{m} = Y$; $\frac{F_z}{m} = Z$.

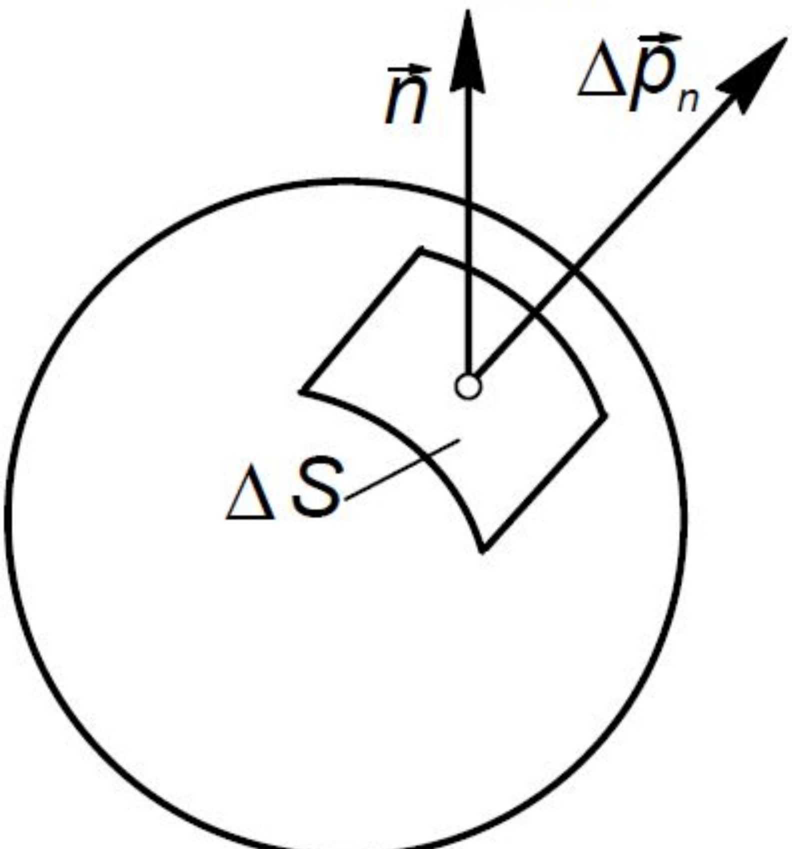
Таким образом, X, Y и Z есть проекции единичных массовых сил на соответствующие координатные оси, иногда их называют напряжениями массовых сил. Если в жидкости выделить элементарный объем dV, то его масса - ρdV. В общем случае массовая сила, действующая на этот объем $\rho\vec{F}dV$, а главный вектор массовых сил, действующих на весь объем, представляется как

$$\iiint_V \rho\vec{F}dV \qquad (2.7)$$

2.3.2. Поверхностные силы.

В отличие от массовых, поверхностные силы действуют лишь на частицы, находящиеся на поверхности жидкого объема.

Выделим на поверхности жидкого объема элементарную площадку ΔS, ориентация этой площадки в пространстве задается внешней нормалью $\vec{n}$. Обозначим через $\Delta\vec{p}_n$ поверхностную силу, приложенную к площадке ΔS. Предел отношения $\lim\limits_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta\vec{p}_n}{\Delta S}=\vec{p}_n$ называют напряжением поверхностной силы.



Таким образом, первое, что необходимо усвоить при рассмотрении этого вопроса - это то, что под действием внешних сил в жидкости возникают напряжения. И второе по порядку, но не менее важное по существу. В общем случае $\vec{p}_n$ не является обычным вектором. Его величина зависит от ориентации площадки в пространстве. Это означает, что если через данную точку пространства провести одинаковые по величине, но различно ориентированные площадки, то действующие на них напряжения поверхностных сил будут различны.

Рис. 2.3

Физическая величина, характеризуемая в данной точке вектором $\bar{p}_n$, принимающим бесконечное множество значений в зависимости от ориентации площадки, называется тензором напряжений.

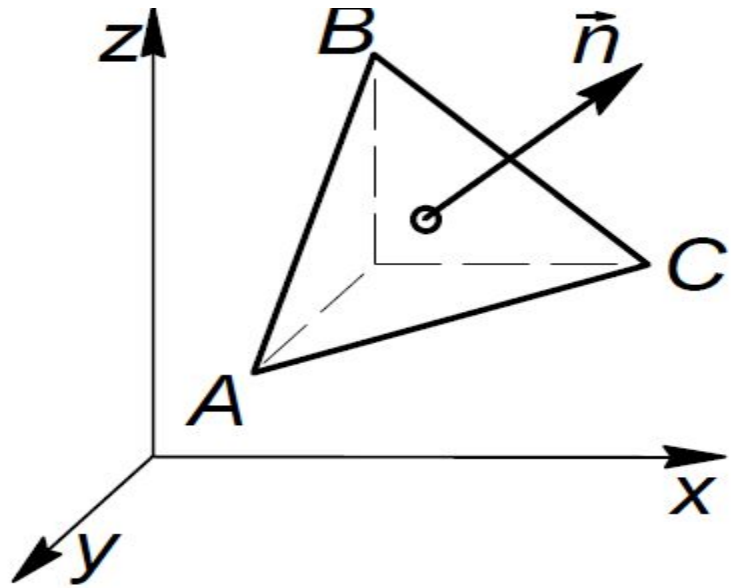
Таким образом, на площадку dS действует поверхностная сила $\bar{p}_n dS$, а на всю поверхность, ограничивающую объем V

$$\iint_S \bar{p}_n dS \qquad (2.8)$$

Проекция $\bar{p}_n$ на направление нормали называется нормальным напряжением, а проекция на площадку действия - касательным напряжением.

2.3.3. Тензор напряжения.

Для уяснения дальнейшего необходимо подробней рассмотреть вектор $\vec{p}_n$.



В движущейся среде мысленно выделим частицу в форме жидкого тетраэдра. Пусть $\vec{n}$ - внешняя нормаль к четвертой (наклонной) грани тетраэдра, а площадь этой грани dS (см. рис. 2.4).

Площади других граней - соответственно dS_x, dS_y, dS_z, т.к. их можно рассматривать как проекции грани ABC на координатные оси. Следовательно, $dS_x = dS\cos(\vec{n},\vec{x}) = n_x dS$, где n_x обозначает направляющий косинус. Аналогично, $dS_y = n_y dS$, $dS_z = n_z dS$. Обозначим объем тетраэдра dV, тогда действующая на него массовая сила $\rho\vec{F}dV$, а массовая сила инерции $\rho\vec{a}dV$, где $\vec{a}$ вектор ускорения жидкого тетраэдра. Поверхностная сила, действующая на наклонную грань - $\vec{p}_n dS$. Для трех других граней можем записать:

$$-\vec{p}_x dS_x = -\vec{p}_x n_x dS$$

$$-\vec{p}_y dS_y = -\vec{p}_y n_y dS$$

$$-\vec{p}_z dS_z = -\vec{p}_z n_z dS$$

Знаки минус, т.к. векторы $\vec{p}_x$, $\dot{p}_y$ и $\vec{p}_z$ направлены в стороны, противоположные координатным осям.

Запишем уравнение движения тетраэдра, которое в соответствии с общими законами механики должно иметь вид:

Масса · ускорение = (результирующая массовых сил) +
+ (результирующая поверхностных сил).

Имеем:

$$\rho\vec{a}dV = \rho\vec{F}dV + \vec{p}_n dS - \vec{p}_x n_x dS - \vec{p}_y n_y dS - \vec{p}_z n_z dS$$

Слагаемые $\rho\vec{a}dV$ и $\rho\vec{F}dV$ есть величины третьего порядка малости, а остальные - второго, поэтому ими можно пренебречь, что дает

$$\vec{p}_n = n_x\vec{p}_x + n_y\vec{p}_y + n_z\vec{p}_z \qquad (2.9)$$

Из этого равенства следует, что напряжение $\vec{p}_n$ при произвольной ориентации нормали может быть определено, если известны напряжения в той же точке для площадок, внешние нормали которых параллельны осям Ox, Oy и Oz.

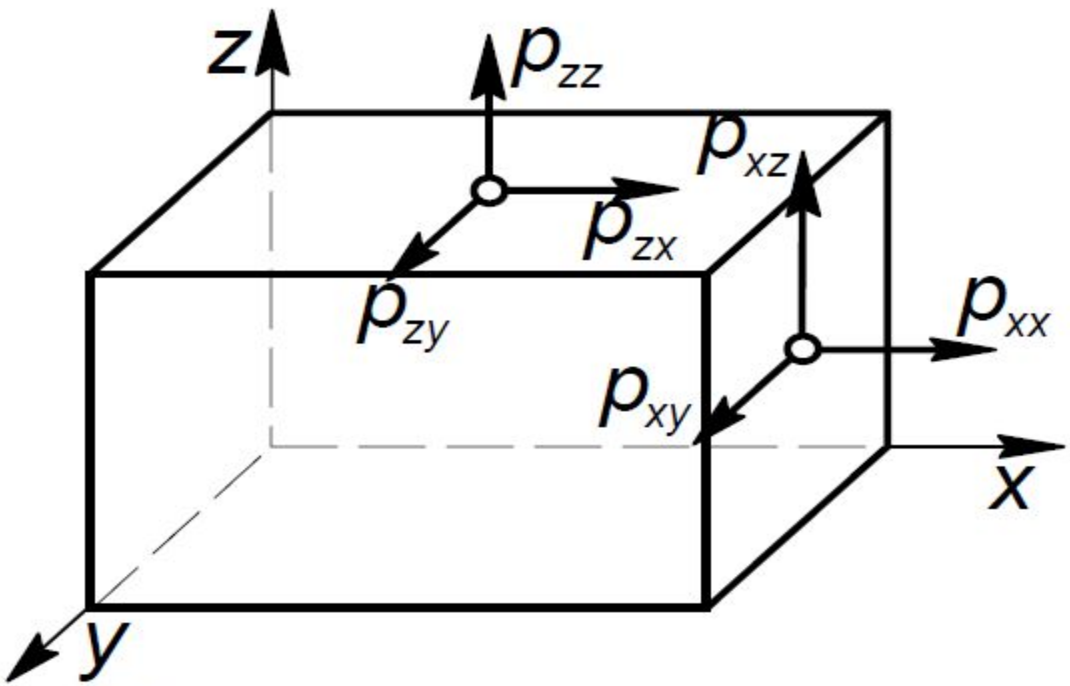


Рис. 2.5

Проекции векторов $\vec{p}_x$, $\vec{p}_y$ и $\vec{p}_z$ на координатные оси x, y, z обозначаются:

$$\begin{matrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{matrix}$$

Первый подстрочный индекс указывает ось, перпендикулярную ориентации площадки, второй - ось, на которую спроектировано напряжение.

Для уяснения ориентации рассмотрим параллелепипед, выделенный в движущейся жидкости и показанный на рис. 2.5.

Из рисунка, в частности, видно, что напряжения с одинаковыми индексами являются нормальными, а с разными - касательными. В проекциях на декартовы оси координат выражение (2.9) может быть записано как

$$\begin{aligned} p_{nx} &= n_x p_{xx} + n_y p_{yx} + n_z p_{zx} \\ p_{ny} &= n_x p_{xy} + n_y p_{yy} + n_z p_{zy} \\ p_{nz} &= n_x p_{xz} + n_y p_{yz} + n_z p_{zz} \end{aligned} \qquad (2.10)$$

Совокупность этих девяти составляющих компонентов напряжения образует тензор напряжения. В матричной форме он записывается в следующем виде:

$$\Pi = \begin{Vmatrix} p_{xx} & p_{yx} & p_{zx} \\ p_{xy} & p_{yy} & p_{zy} \\ p_{xz} & p_{yz} & p_{zz} \end{Vmatrix}$$

В тензорном анализе доказывается, что тензор напряжений является симметричным. Это означает, что величины, расположенные симметрично главной диагонали, равны ($p_{yx} = p_{xy}$; $p_{xz} = p_{zx}$; $p_{zy} = p_{yz}$). Следовательно, для определения тензора напряжений достаточно знать не девять, а шесть скалярных величин.

Следует учесть одно обстоятельство. Векторы напряжений $\vec{p}_x$, $\vec{p}_y$, $\vec{p}_z$ в соотношении (2.9), носящем имя Коши, и приложенные к координатным площадкам, не имеют объективного физического смысла, т.к. зависят от выбора системы координат. Поэтому такие величины причисляются к так называемым «квазивекторам», хотя к ним и можно применять все операции, применимые к физическим векторам.

К понятию тензора можно подойти и другим путем, который, возможно, покажется более простым. Поэтому целесообразно хотя бы кратко остановиться на нем. Для наглядности тензор можно представить как какой-то оператор, с помощью которого можно преобразовывать векторы в векторы. Упрощая и сводя математический аппарат к механическому, оператор можно представить как какую-то «машину», которая по определенным правилам перерабатывает вводимые в нее векторы. Зная принцип работы этой «машины», можем знать и вектор, который появляется на выходе. Можно записать

$$\vec{a} = \vec{A} \cdot \vec{B}$$

где $\vec{a}$ - входной вектор;

$\vec{B}$ - выходной вектор;

$\vec{A}$ - оператор, который и называют тензором.

И в заключение еще несколько замечаний. Выше уже отмечалось, что одно из фундаментальных свойств жидкости - ее вязкость - не проявляется, если она находится в состоянии равновесия, т.е. в этом случае касательные компоненты тензора равны нулю и действуют лишь нормальные p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, ориентированные по внешним нормалям (см. рис. 2.5). При этом ясно, что они являются растягивающими напряжениями. Как показывает опыт, в отличие от твердого тела, которое может воспринимать как растягивающие (положительные нормальные напряжения), так и сжимающие (отрицательные нормальные напряжения) напряжения без разрыва сплошности, жидкое тело способно воспринимать лишь сжимающие усилия. Можно показать, что при отсутствии касательных напряжений $p_{xx} = p_{yy} = p_{zz}$, из чего следует, что нормальные напряжения в данной точке не зависят от ориентации площадки. Величины, численно равные нормальным напряжениям, но взятые с противоположным знаком, в гидромеханике называют давлениями, либо более полно - гидростатическими давлениями. Гидростатическое давление обозначают буквой p, т.е.

$$p = -p_{xx} = -p_{yy} = -p_{zz}$$

Таким образом, гидростатическое давление, являясь скалярной величиной (как компонента тензора) не зависит от ориентации площадки, на которую оно действует.

Получим наиболее общее уравнение, связывающее поверхностные и массовые силы - так называемое уравнение движения в напряжениях. Для вывода уравнения проанализируем движение жидкой частицы, масса которой ρdV и поверхность dS. Аналогично тому, как это было сделано для тетраэдра, можем записать уравнение движения в виде

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} dV = \rho \vec{F} dV + \vec{p}_n dS \tag{2.11}$$

Для всего движущегося объема (V), поверхность которого S, имеем

$$\iiint\limits_V \rho \frac{d\vec{u}}{dt} dV = \iiint\limits_V \rho \vec{F} dV + \iint\limits_S \vec{p}_n dS \tag{2.12}$$

Преобразуем поверхностный интеграл в правой части в объемный с учетом того, что, как было показано, тензор напряжений имеет вид

$$\vec{p}_n = n_x \vec{p}_x + n_y \vec{p}_y + n_z \vec{p}_z$$

где n_x, n_y, n_z - направляющие косинусы.

Воспользуемся известными из векторного анализа и справедливыми для любых векторов формулами:

$$\iint\limits_S n_x \vec{R} dS = \iiint\limits_V \frac{\partial \vec{R}}{\partial x} dV$$

$$\iint\limits_S n_y \vec{R} dS = \iiint\limits_V \frac{\partial \vec{R}}{\partial y} dV\,; \tag{2.13}$$

$$\iint\limits_S n_z \vec{R} dS = \iiint\limits_V \frac{\partial \vec{R}}{\partial z} dV$$

Применяя эти формулы к тензору $\vec{p}_n$, получаем:

$$\iint_S \vec{p}_n dS = \iiint_V \left(\frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \right) dV \tag{2.14}$$

Подставляя это выражение в исходное уравнение, получаем:

$$\iiint_V \left[\rho \frac{d\vec{u}}{dt} - \rho \vec{F} - \left(\frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \right) \right] dV = 0$$

Но так как $dV \neq 0$, а объем V выбран произвольно, то

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{F} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \right) \tag{2.15}$$

Это и есть уравнение движения в напряжениях.

В проекциях на декартовы оси координат можем записать:

$$\begin{aligned}
\frac{du_x}{dt} &= X + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \\
\frac{du_y}{dt} &= Y + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \\
\frac{du_z}{dt} &= Z + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \right)
\end{aligned} \tag{2.16}$$

ЛЕКЦИЯ 3.

ГИДРОСТАТИКА.

Гидростатика занимается изучением жидкости, находящейся в состоянии относительного покоя. Под относительным покоем понимают состояние, при котором отсутствуют перемещения частиц относительно друг друга.

В основу гидростатики положены две теоремы: равенство нулю суммы всех сил, приложенных к рассматриваемому элементу жидкости и, как следствие, равенство нулю суммы моментов этих сил относительно какой-то оси. Однако, несмотря на простоту принципов, гидростатика приводит к важным результатам и выводам.

3.1. Уравнение равновесия жидкости.

Уравнения равновесия жидкости могут быть получены из уравнений движения в напряжениях (2.16), если положить в них $u_x = u_y = u_z = 0$. Кроме того, как было показано, в покоящейся жидкости касательные напряжения не проявляются, т.е. все производные по t равны нулю. И, наконец, нормальные напряжения заменяем давлением, что дает

$$X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0;$$

$$Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0; \qquad (3.1)$$

$$Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

В векторной форме эта система может быть записана в форме

$$\vec{F} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p = 0 \qquad (3.2)$$

Уравнения (3.1) носят название системы дифференциальных уравнений Эйлера для гидростатики. Эта система уравнений показывает, что существует непосредственная связь между величиной гидростатического давления в точке и ее координатами. Эта связь может быть раскрыта, если проинтегрировать (3.1).

3.2. Основное уравнение гидростатики в дифференциальной форме.

Умножим каждое из уравнений, входящих в (3.1) на dx, dy и dz соответственно и просуммируем их, что даст

$$\left(Xdx+Ydy+Zdz\right)-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz\right)=0 \qquad (3.3)$$

Выражение, стоящее в скобках во втором члене уравнения, есть не что иное, как полный дифференциал давления - dp, поэтому можем записать

$$dp=\rho\left(Xdx+Ydy+Zdz\right) \qquad (3.4)$$

Это уравнение называют основным уравнением гидростатики в дифференциальной форме. В левой части его - полный дифференциал, поэтому и правая часть также должна быть полным дифференциалом. Следовательно, силы и плотность должны быть такими функциями x, y и z, чтобы они обращали правую часть (3.4) в полный дифференциал. Если этого не происходит, то равновесие жидкости невозможно. Другими словами, если жидкость находится в состоянии равновесия, то правая часть (3.4)

Считая плотность постоянной ($\rho = \text{const}$), можем записать

$$Xdx + Ydy + Zdz = d\Phi \tag{3.5}$$

Из теоретической механики известно, что скалярное произведение силы на элементарное перемещение частицы называют элементарной работой, т.е.

$$f_x dx + f_y dy + f_z dz \tag{3.6}$$

Силы, работа которых не зависит от пути движения, а только от начального и конечного положений, называют потенциальными. При этом для того, чтобы работа силы не зависела от пути движения, необходимо и достаточно, чтобы выражение для элементарной работы, т.е. (3.6), было полным дифференциалом некоторой скалярной функции P, называемой силовой. Взятая с противоположным знаком, она называется потенциалом. Таким образом, рассмотренную выше функцию можно назвать силовой функцией, а (3.4) представить как

$$dp = \rho d\Phi \tag{3.7}$$

Из чего следует, что несжимаемая жидкость может находиться в равновесии только под действием сил, имеющих потенциал.

3.3. Эквипотенциальные поверхности и поверхности равного давления.

Поверхности, в каждой точке которых $\Phi = \mathrm{const}$, называют эквипотенциальными. Частным случаем эквипотенциальной поверхности является поверхность равного давления, т.е. поверхность, в каждой точке которой $p = \mathrm{const}$. В этом случае $dp = 0$ и (3.4) принимает вид

$$\rho\left(Xdx + Ydy + Zdz\right) = 0$$

Но плотность $\rho \neq 0$, и, следовательно,

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0 \tag{3.8}$$

Уравнение (3.8) называют уравнением поверхности равного давления. Если из массовых сил на жидкость действует только сила тяжести, то $X = Y = 0$; $Z = -g$ (знак минус, т.к. сила тяжести ориентирована в сторону, противоположную оси z); $-gdz = 0$ и $z = \mathrm{const}$, т.е. в покоящейся жидкости любая горизонтальная плоскость есть поверхность равного давления.

3.4. Равновесие однородной несжимаемой жидкости в поле сил тяжести. Закон Паскаля. Гидростатический закон распределения давления.

Проинтегрируем основное уравнение гидростатики (3.4) в предположении, что $\rho = \text{const}$ (жидкость несжимаема) и считая, что из массовых сил действует только сила тяжести. Как показано выше, в этом случае $X = Y = 0$, $Z = -g$, т.е. $dp = -\rho g dz$, и после интегрирования

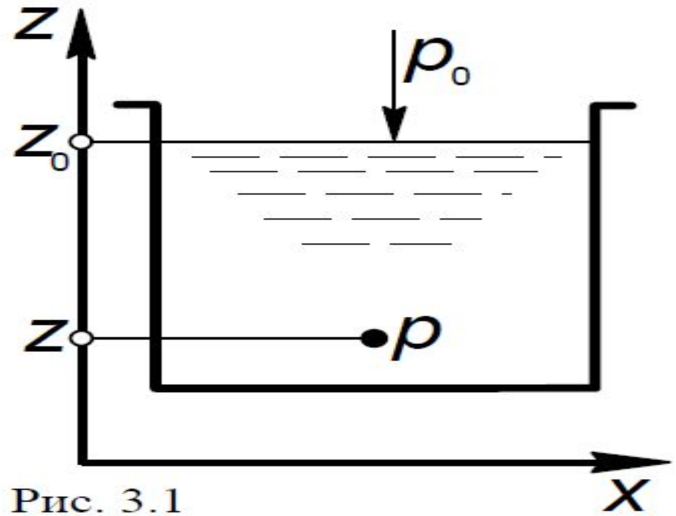


Рис. 3.1

$$p = -\rho g z + C \qquad (3.9)$$

где C - произвольная постоянная. Для ее нахождения используем следующее граничное условие (см. рис. 3.1): при $z = z_0$ $p = p_0$. Из (3.9) следует, что

$$C = p_0 + \rho g z_0$$

И после подстановки

$$p = p_0 + \rho g (z_0 - z) \qquad (3.10)$$

Как видно из рис. 3.1, разность ($z_0 - z$) - глубина погружения рассматриваемой частицы, которую будем обозначать буквой h, т.е.

$$p = p_0 + \rho g h \qquad (3.11)$$

Поскольку любое правильное физическое уравнение должно быть размерностно однородным, то ясно, что член ρgh должен выражаться в единицах давления, т.е. в паскалях (Па - Н/м^2). Эту величину называют избыточным давлением. Она может быть как положительной, так и отрицательной. Такая трактовка приводит нас к понятию абсолютного давления, которое в соответствии с (3.11) может быть представлено как сумма барометрического (атмосферного) давления и избыточного, т.е.

$$p_{\epsilon\ddagger-.} = p_{\epsilon\square.} \pm p_{\text{ЦЌ}\ddagger.} \tag{3.12}$$

Отрицательное избыточное давление называют вакуумом.

Вернемся вновь к уравнению (3.10). После деления обеих его частей на ρg получаем

$$z + \frac{p}{\rho g} = z_0 + \frac{p_0}{\rho g} \tag{3.13}$$

В таком виде все его члены выражаются в единицах длины и носят название напоров. Величина z характеризует положение жидкой частицы над произвольно выбираемой горизонтальной плоскостью отсчета, т.е. z - это геометрический напор; $\frac{p}{\rho g}$ - пьезометрический напор. Сумму этих величин $z + \frac{p}{\rho g}$ называют гидростатическим напором.

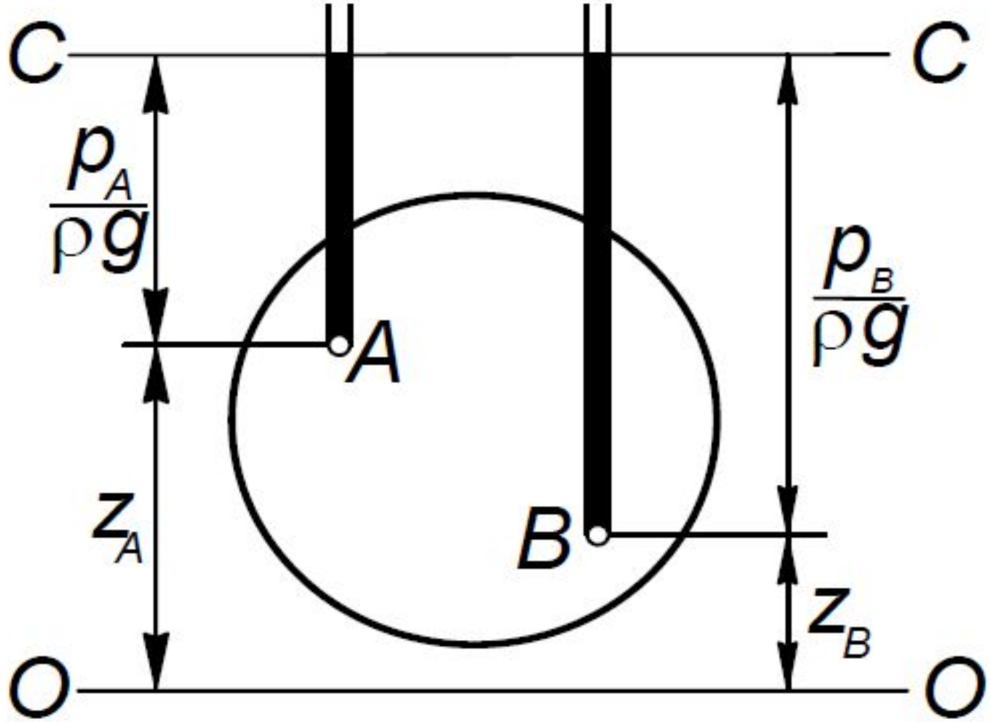


Рис. 3.2

Представим герметично закрытый сосуд, заполненный жидкостью, находящейся под давлением. Выберем в этом сосуде две произвольно расположенные точки A и B и, опять-таки произвольно, горизонтальную плоскость O-O, которую назовем плоскостью отсчета.

Координаты частиц, расположенных в точках A и B будут z_A и z_B. В соответствии со сказанным выше, величины z_A и z_B выражают геометрический напор. Введем теперь через крышку сосуда в точки A и B сообщенные с атмосферой стеклянные трубки. Эти трубки называют пьезометрами. Поскольку по условию жидкость находится под давлением, то она начнет подниматься по пьезометрам. Не представляет труда и ответ на вопрос о том, когда прекратится подъем. Очевидно, что это произойдет в тот момент, когда высота столба жидкости уравновесит давление в рассматриваемой точке. Это и есть пьезометрическая высота, либо пьезометрический напор.

$$z+\frac{p}{\rho g}=z_0+\frac{p_0}{\rho g} \qquad (3.13)$$

Соотношение (3.13) справедливо для любых произвольно выбранных частиц покоящейся жидкости, поэтому в общем виде его можно записать как $z+\frac{p}{\rho g}=\text{const}$, т.е. для любых точек жидкости гидростатический напор одинаков. Следовательно, уровни в пьезометрах установятся на одной и той же высоте (плоскость *C-C* на рис. 3.2). Уравнение (3.13) выражает так называемый гидростатический закон распределения давления.

3.5. Определение силы давления жидкости на поверхности тел.

Задача сводится к нахождению силы давления жидкости на поверхности стенок, ограничивающих ее.

Рассмотрим криволинейную поверхность AB произвольной формы, площадь которой S (рис. 3.3). Выделим на ней элементарную площадку dS, пусть $\vec{n}$ - орт внешней нормали. Сила, действующая на эту площадку

$$d\vec{F} = p\,\vec{n}\,dS$$

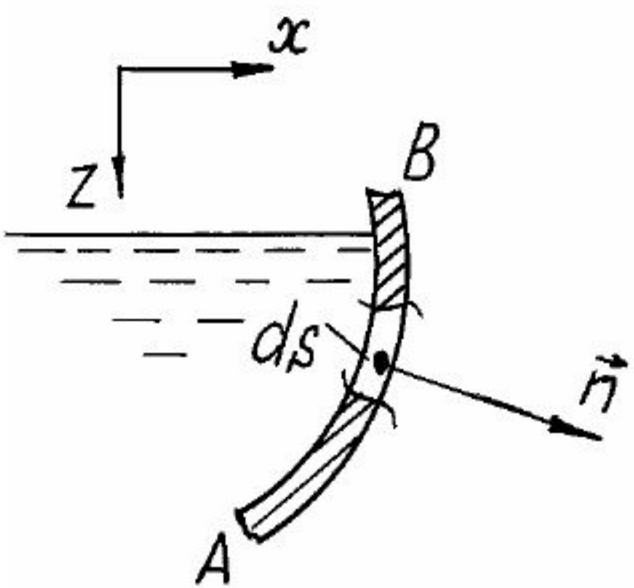


Рис. 3.3

где p - гидростатическое давление в центре площадки. Обычно в технических приложениях интерес представляет лишь сила, возникающая от избыточного давления. Имея в виду, что $p = \rho g h$, получаем

$$d\vec{F} = \rho g h \vec{n} dS \qquad (3.14)$$

На всю площадь действует сила

$$\vec{F} = \iint\limits_S \rho g h \vec{n} dS \qquad (3.15)$$

Запишем это выражение в проекциях на оси координат, что дает

$$F_x = \rho g \iint_S h\cos(\vec{n},\vec{x})dS \qquad (3.16)$$

$$F_z = \rho g \iint_S h\cos(\vec{n},\vec{z})dS \qquad (3.17)$$

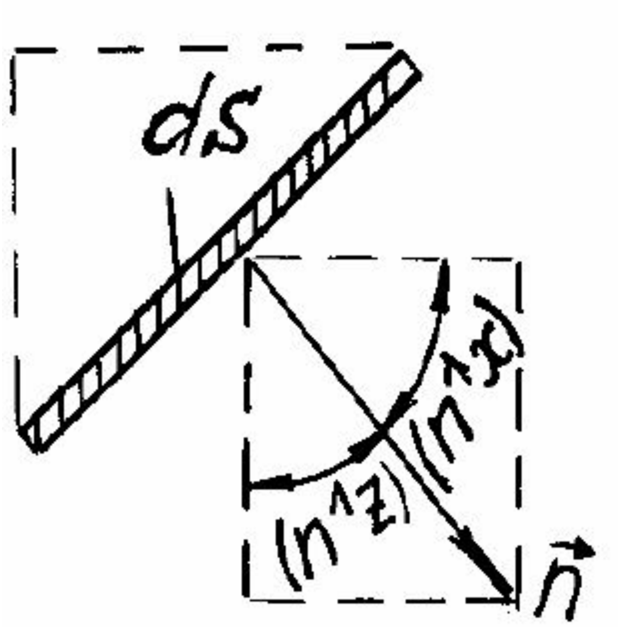


Рис. 3.4

Для удобства изобразим отдельно элементарную площадку (см. рис. 3.4). Из рисунка следует, что

$$dS \cdot \cos(\vec{n},\vec{x}) = dS_{‰}$$

$$dS \cdot \cos(\vec{n},\vec{z}) = dS_{‹}$$

где $dS_в$ - вертикальная, и $dS_{‹}$ - горизонтальная проекции dS. Таким образом

$$F_x = \rho g \iint h \cdot dS_{‰} \qquad (3.18)$$

$$F_z = \rho g \iint_S h \cdot dS_{‹} \qquad (3.19)$$

Рассмотрим горизонтальную составляющую.

Из механики известно, что интеграл (3.18) есть статический момент площади, равный произведению $h_{љ.\square.}S_{‰}$, где $h_{љ.\square.}$ - координата центра тяжести вертикальной проекции.

Следовательно,

$$F_x = \rho g h_{љ.\square.} S_{‰} \tag{3.20}$$

т.е. горизонтальная составляющая равна произведению площади вертикальной проекции стенки на гидростатическое давление в центре тяжести этой проекции.

Определим теперь вертикальную составляющую силы, для чего воспользуемся следствием из формулы Гаусса-Остроградского (см. формулу 1.16)

$$\iint_S p\vec{n}dS = \iiint_V \text{grad}\, p dV$$

Из уравнения равновесия (3.2) имеем $\rho\vec{F} = \text{grad}\, p$, т.е.

$$\iiint_V \text{grad}\, p dV = \iiint_V \rho\vec{F} dV$$

Вертикальная проекция единичной массовой силы $\vec{F} = Z = g$ (знак плюс, т.к. в данном случае ось z ориентирована вниз).

Следовательно,

$$F_z = \iiint_V \rho g dV = \rho g \iiint_V dV = \rho g V \tag{3.21}$$

V носит название объема тела давления. Таким образом, вертикальная составляющая равна весу жидкости, заключенному в объеме тела давления. Для нахождения этого объема следует использовать формальное правило: тело давления - это объем, образованный криволинейной стенкой, ее проекцией на свободную поверхность (либо на продолжение свободной поверхности) и вертикальными проектирующими плоскостями. На рис. 3.5 показаны примеры определения тел давлений для двух случаев.

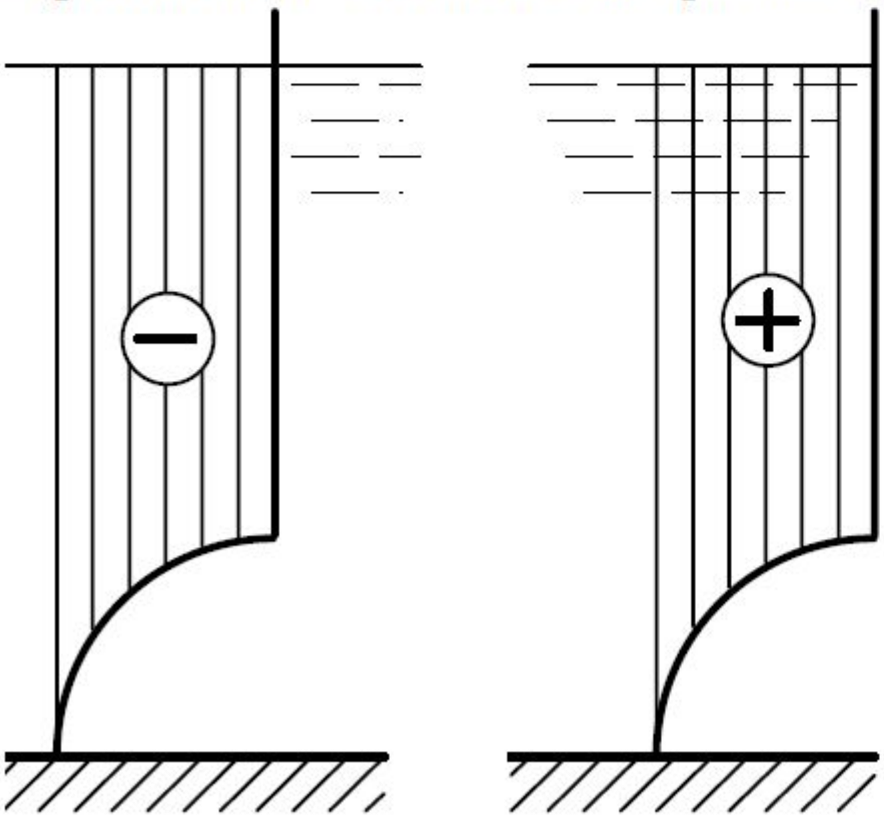


Рис. 3.5

Как следует из рисунка, тело давления может быть как положительным, так и отрицательным (фиктивным).

3.5.1. Плоская поверхность.

Этот случай можно рассматривать как частный предыдущего, но можно получить и более удобное соотношение. Действительно, общее выражение для силы давления имеет вид (3.15), но так как поверхность плоская, то ориентация нормали для всех ее точек остается одинаковой, и, следовательно,

$$\vec{F} = \rho g \vec{n} h_{Ц.Т} S \tag{3.22}$$

Из формулы (3.22) следует, что $\vec{F}$ направлена по нормали к стенке, поэтому можно записать

$$F = \rho g h_{Ц.Т} S \tag{3.23}$$

Следовательно, сила давления на плоскую поверхность равна произведению ее площади на гидростатическое давление в центре тяжести этой поверхности. Следует отметить, что задачи, связанные с определением сил давления на поверхности, играют исключительно важную роль в кораблестроительной и гидротехнической практике. Применительно к энергетике и машиностроению круг этих задач заметно сужается и ограничивается, главным образом, расчетом болтовых соединений люков различных резервуаров, находящихся под давлением.

ЛЕКЦИЯ 4.

КИНЕМАТИКА.

Кинематика занимается изучением движения жидкости, не интересуясь причинами, которые его вызвали. По образному выражению Н.Е.Жуковского, кинематика изучает «геометрию движения». Принципиально можно пойти двумя путями. По первому из них изучается движение каждой отдельной жидкой частицы. Чтобы выделить ее, в начальный момент времени t_o отмечаются ее координаты x_o, y_o и z_o. Движение считается определенным, если в каждый момент времени для каждой частицы известны уравнения, описывающие ее путь во времени, т.е. известны параметрические уравнения траекторий всех частиц. Этот путь предложен Лагранжем. По методу Эйлера изучается изменение скорости и других параметров в точках пространства x, y, z.

4.1. Установившееся и неустановившееся движения жидкости.

Установившемся (стационарным) называют движение, при котором основные параметры потока (скорость, давление, плотность) в данной точке пространства не изменяются с течением времени, т.е.

$$\vec{u} = f(x, y, z); \quad p = f(x, y, z); \quad \rho = f(x, y, z) \qquad (4.1)$$

Если это условие не соблюдается и параметры в точке меняются с течением времени

$$\vec{u} = f(x, y, z, t);$$
$$p = f(x, y, z, t); \qquad (4.2)$$
$$\rho = f(x, y, z, t)$$

движение называют неустановившимся (нестационарным).

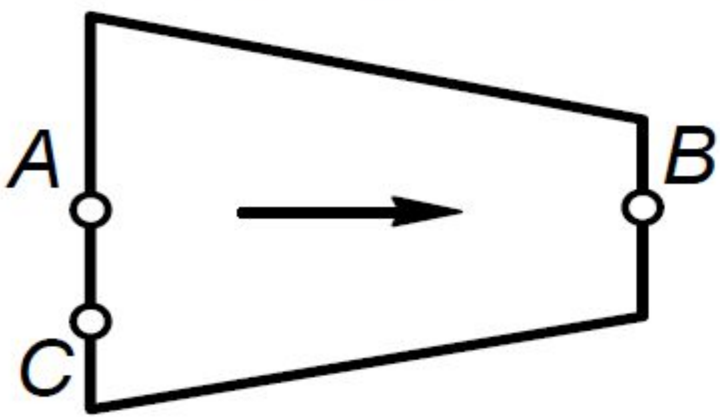


Рис. 4.1

В этих формулировках следует обратить внимание на то, что речь идет о параметрах в точке. Чтобы уяснить это, рассмотрим канал, показанный на рис. 4.1. В гидромеханике такие каналы, в которых площадь сечения уменьшается по ходу потока, называют конфузорами. Исходя из чисто интуитивных представлений ясно, что скорость течения по ходу канала будет возрастать. Возникает вопрос, может ли быть установившемся движение в таком канале. Очевидно, может, если параметры в точках A и B не будут изменяться с течением времени. Определение вида движения не требует, чтобы параметры в точках A, B и C были одинаковы.

4.2. Уравнение неразрывности (сплошности).

Уравнение неразрывности либо сплошности выражает один из фундаментальных законов природы - закон сохранения массы применительно к жидкой среде.

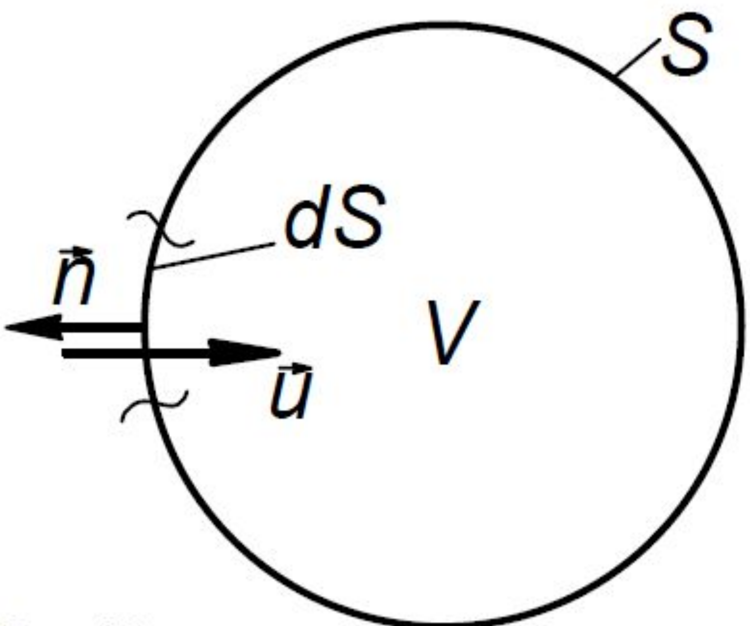


Рис. 4.2

Рассмотрим объем V, ограниченный поверхностью S (рис. 4.2). Выделим элемент поверхности dS. Пусть $\vec{n}$ - орт внешней нормали, а $\vec{u}$ - вектор скорости. Через выделенный элемент dS в единицу времени внутрь объема проникает масса жидкости

$$-\rho\vec{u}\cdot\vec{n}dS\,.$$

(знак минус, т.к. направления $\vec{u}$ и $\vec{n}$ противоположны). Секундная масса, проникающая в объем через всю поверхность,

$$-\iint\limits_S \rho\vec{u}\cdot\vec{n}dS\,.$$

С другой стороны, приток жидкости в объем приводит к изменению ее массы. При этом, поскольку выделенный объем является постоянным, то изменение массы может происходить только за счет изменения ее плотности. Скорость изменения массы можно представить как

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho dV ,$$

либо с учетом того, что $V = \text{const}$, можно записать

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV .$$

Очевидно, что изменение массы внутри объема должно быть равно массе, поступившей в него извне, т.е.

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\iint_S \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS$$

Применяя преобразование Гаусса-Остроградского, получим:

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\iiint_V \operatorname{div}(\rho \vec{u}) dV \text{, либо}$$

$$\iiint_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u})\right] dV = 0 .$$

Равенство нулю интеграла возможно лишь при условии

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0 . \qquad (4.3)$$

Это и есть уравнение неразрывности. Поскольку при выводе его не делалось никаких ограничений, то оно справедливо как для установившегося, так и для неустановившегося движений сжимаемой и несжимаемой жидкости. Уравнение (4.3) относится к числу фундаментальных уравнений механики жидкости.

Рассмотрим некоторые частные случаи. При установившемся движении все производные по времени равны нулю, что следует из самого определения этого понятия, поэтому

$$\operatorname{div}\left(\rho\vec{u}\right)=0 \tag{4.4}$$

Если движение установившееся и жидкость несжимаема, т.е. $\rho=\mathrm{const}$, то

$$\operatorname{div}\vec{u}=0 \tag{4.5}$$

Либо в проекциях на декартовы оси координат (см. формулу 1.7)

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0 \tag{4.6}$$

Установим физический смысл этого соотношения. Частные производные $\frac{\partial u_x}{\partial x}$, $\frac{\partial u_y}{\partial y}$, $\frac{\partial u_z}{\partial z}$ характеризуют скорость относительного удлинения (укорочения) жидкой частицы. Если этот процесс происходит одновременно вдоль всех координатных осей, то он приводит к объемному расширению либо сжатию частицы. Ясно, что если частица удлиняется вдоль осей x и y, то она должна укорачиваться относительно оси z. Другими словами, хотя бы одна из производных, входящих в (4.6), должна быть отрицательна, т.к. в противном случае соотношение не может быть равным нулю.

Как уже отмечалось в 1.1, поле, в котором $\operatorname{div}\vec{u}=0$, носит название соленоидального

4.3. Линии тока и траектории.

Линией тока называется кривая, обладающая тем свойством, что в данный момент времени векторы скоростей в любой ее точке совпадают по направлению с касательными.

В векторной форме это условие может быть записано как $\vec{u} \times d\vec{S} = 0$, т.е. векторное произведение должно быть равно нулю. Это, как известно (см. формулу 1.4), может быть записано в виде определителя

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ u_x & u_y & u_z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = 0 \tag{4.7}$$

Раскрывая определитель, получаем дифференциальное уравнение линии тока в виде

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z} \tag{4.8}$$

Под траекторией понимается след, оставленный движущейся частицей в пространстве. Дифференциальное уравнение траектории

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z} = dt \tag{4.9}$$

Из сопоставления (4.8) и (4.9) следует, что в общем случае, т.е. при неустановившемся движении, линии тока и траектории не совпадают.

4.4. Трубка тока (поверхность тока)

В движущейся жидкости наметим бесконечно малый замкнутый контур, и через все точки его периметра проведем линии тока (рис. 4.3).

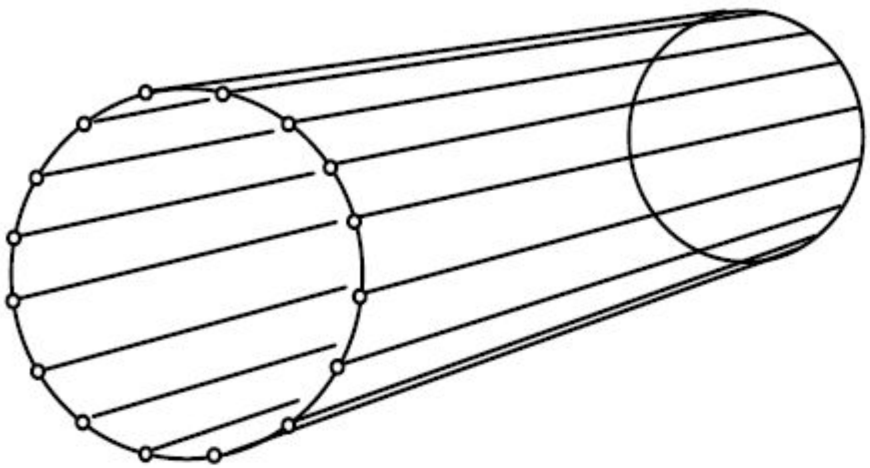


Рис. 4.3

Образованная таким образом поверхность носит название трубки либо поверхности тока. Ясно также, что поскольку контур намечался в пространстве, занятом движущейся жидкостью, то какая-то часть ее должна находиться и внутри поверхности тока.

Струйная модель потока введена в рассмотрение Л.Эйлером. Основу этой модели составляет понятие о струйке (либо элементарной струйке), под которой понимают жидкость, протекающую внутри трубки тока. Если вспомнить, что границами боковой поверхности трубки тока являются линии тока, т.е. линии, к которым касателен вектор скорости частиц, которые в данный момент времени находятся в ней, то ясно, что ни одна частица не может проникнуть извне в струйку, либо, наоборот, выйти из нее через боковую поверхность. Действительно, вектор скорости частицы, пытающейся, например, проникнуть в струйку извне, должен быть ориентирован к ее границе под каким-то углом, а на самой границе - линии тока - касателен (рис. 4.4).

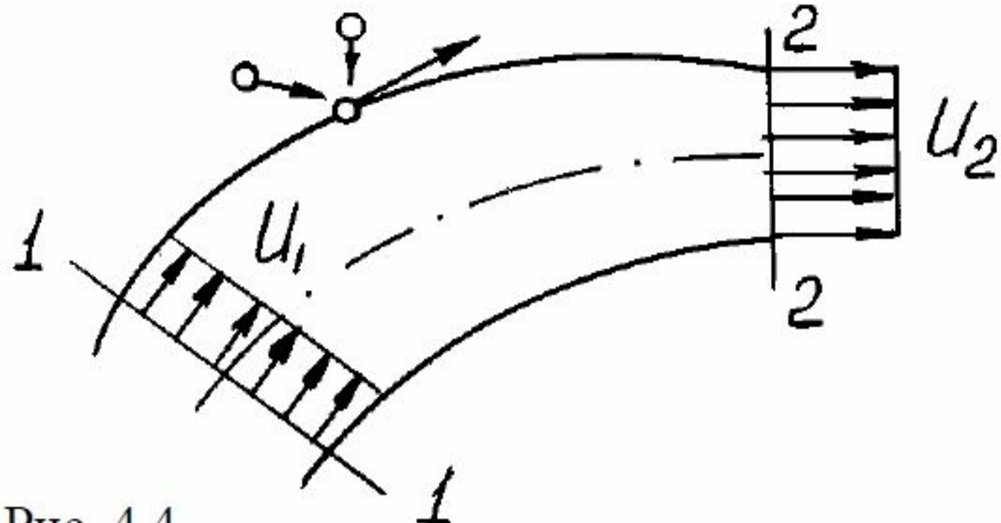


Рис. 4.4

Из сказанного следует, что струйка ведет себя как трубка с непроницаемыми стенками.

Поперечное сечение струйки мало, поэтому можно допустить, что в пределах сечения все частицы движутся с одинаковыми скоростями либо, что то же, эпюра скоростей в сечении представляет собой цилиндр для трехмерной струйки либо прямоугольник - для плоской (двумерной).

На рис. 4.4 показаны эпюры для двух произвольно выбранных сечений плоской струйки. Заметим лишь, что равномерность распределения скоростей в сечении, т.е. движение всех частиц, находящихся в нем, с одной и той же скоростью, вовсе не означает, что в другом сечении эти скорости должны быть такими же, т.е., не обязательно, чтобы $u_1 = u_2$ (см. рис. 4.4).

Совокупность струек, заполняющих поперечное сечение канала конечных размеров, образует поток. Если представить, что соломинка для коктейля - это струйка, то пучок таких соломинок - поток.

4.6. Уравнение неразрывности для струйки.

Первое свойство струйки, говорящее о том, что боковая поверхность непроницаема для частиц, по существу выражает закон сохранения секундной массы. Действительно, если через сечение *1-1* в единицу времени вошла масса dm_1, то за то же время через сечение *2-2* должна выйти масса dm_2, равная dm_1. Массу жидкости, протекающую через поперечное сечение струйки в единицу времени называют элементарным массовым расходом и обозначают dQ_m.

Легко убедиться в том, что $dQ_m = \rho u dA$, где dA - площадь поперечного сечения струйки. Действительно, выражая параметры, входящие в это соотношение через единицы физических величин, получаем

$$\frac{кг}{м^3}\frac{м}{с}м^2 \rightarrow \frac{кг}{с}.$$

Из сказанного выше следует, что

$$\rho_1 u_1 dA_1 = \rho_2 u_2 dA_2 \qquad (4.10)$$

Это и есть уравнение неразрывности для струйки. Если жидкость несжимаема, т.е. $\rho = \text{const}$, то $\rho_1 = \rho_2$ и

$$u_1 dA_1 = u_2 dA_2 \qquad (4.11)$$

При этом произведение udA выражает элементарный объемный расход - dQ.

4.7. Ускорение жидкой частицы.

Запишем выражение для проекции ускорения жидкой частицы на какую-либо координатную ось, например, x. Имеем

$$a_x = \frac{du_x}{dt}$$

Для нахождения этой величины следует учесть, что проекция скорости u_x (как и две другие проекции) является функцией координат x, y, z, которые, в свою очередь, в общем случае зависят от времени t. Представим величину du_x в виде полного дифференциала

$$du_x = \frac{\partial u_x}{\partial t}dt + \frac{\partial u_x}{\partial x}dx + \frac{\partial u_x}{\partial y}dy + \frac{\partial u_x}{\partial z}dz$$

Разделим обе части на dt. Имея в виду, что $\frac{dx}{dt} = u_x$, $\frac{dy}{dt} = u_y$ и $\frac{dz}{dt} = u_z$, получим

$$a_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_x}{\partial z} \qquad (4.12)$$

Аналогичные соотношения можно записать и для двух других компонент

Выражение (4.12) носит название полной либо субстанциональной производной. Установим смысл величин, входящих в нее. Производная $\frac{\partial u_x}{\partial t}$ - проекция локального ускорения, которое характеризует изменение скорости во времени в данной точке пространства. Локальное ускорение обусловлено нестационарностью процесса. Из чего следует, что если движение стационарное (установившееся), то локальное ускорение отсутствует, т.е. $\frac{\partial u_x}{\partial t} = 0$. Три остальных члена (4.12) - проекции конвективного ускорения, которое возникает при переходе частицы от одной точки пространства к другой, оно обусловлено неравномерностью скоростного поля, т.е. неравномерным распределением скоростей.

4.8. Анализ движения жидкой частицы.

Движение жидкой частицы является более сложным, чем движение твердого тела, которое, как известно из механики, может быть поступательным и вращательным. Особенностью жидкости и ее частиц, как уже неоднократно отмечалось, является легкая деформируемость. Поэтому помимо поступательного и вращательного, жидкая частица может участвовать и в деформационном движении. Это положение и составляет суть так называемой первой теоремы Гельмгольца, к рассмотрению которой мы и приступаем. Оценивая значение работы Г.Гельмгольца, основоположник отечественной аэродинамики Н.Е.Жуковский писал, что «современная гидродинамика своим развитием обязана главным образом Гельмгольцу». Важнейшим достоинством приводимых ниже выкладок и рассуждений является то, что они раскрывают физический смысл и вносят ясность в ряд казалось бы совершенно абстрактных понятий. Выкладки эти достаточно просты, но требуют внимания. Поэтому нужно запастись определенной долей терпения и помнить, что достигаемое понимание сути явлений безусловно оправдает эти затраты труда.

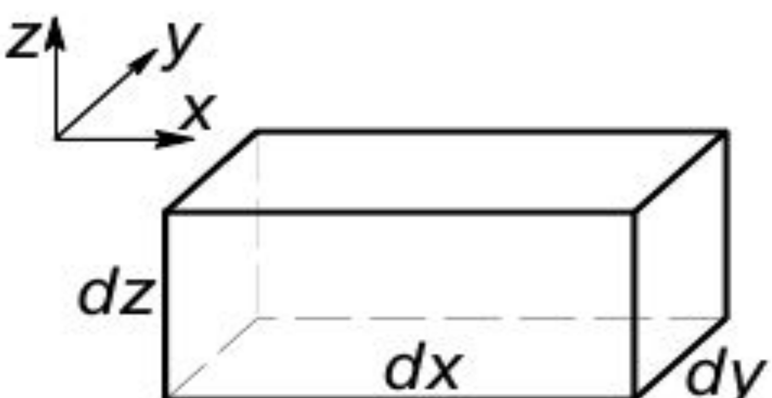
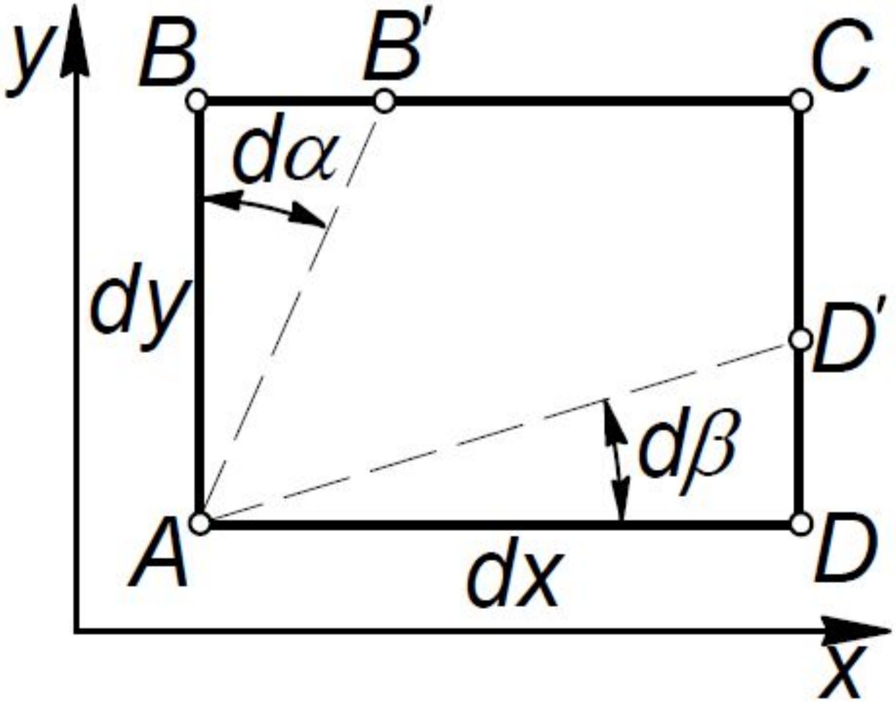


Рис. 4.5

Рассмотрим жидкую частицу в форме прямоугольного параллелепипеда (рис. 4.5). Длина его ребер dx, dy, dz. Деформация такой жидкой частицы может быть как линейной (ребра удлиняются и укорачиваются), так и угловой (грани скашиваются). Удобней рассмотреть каждый из этих видов раздельно. Начнем с угловых деформаций.



4.8.1. Угловые деформации.

Из рис. 4.5 следует, что угловая деформация (скашивание) может возникнуть из-за разности скоростей, перпендикулярных ребрам (частично этот вопрос уже обсуждался в разделе 2.2). Для упрощения целесообразно ограничиться лишь одной гранью, показанной на рис. 4.6.

Пусть компоненты скорости в точке A равны u_x, u_y, u_z. Найдем скорости в точке B, считая, что движение установившееся и, следовательно, все производные по t равны нулю. Приращение компоненты скорости при переходе из одной точки пространства в другую можно представить как $u+du$. Так для проекции u_x можем записать $u_x + du_x$, где

$$du_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}dx + \frac{\partial u_x}{\partial y}dy + \frac{\partial u_x}{\partial z}dz \qquad (4.13)$$

Аналогичные выражения можно записать и для других проекций.

Рис. 4.6

Рассмотрим приращение u_x при переходе от точки A к точке B. В этом случае $dx = dz = 0$, т.е.

$$u_{x_{(B)}} = u_{x_{(A)}} + du_x = u_{x_{(A)}} + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy$$

Предположим, что за время dt за счет разности скоростей в точках A и B ребро займет положение AB'.

Аналогично рассуждая относительно скорости u_y в точках A и D получим:

Точка A: u_y (по условию)

Точка D: $u_{y_{(D)}} = u_{y_{(A)}} + \frac{\partial u_y}{\partial x} dx$

За счет разности этих скоростей точка D займет позицию D'. Таким образом

$$u_{x_{(B)}} - u_{x_{(A)}} = \frac{\partial u_x}{\partial y} dy$$

$$u_{y_{(D)}} - u_{y_{(A)}} = \frac{\partial u_y}{\partial x} dx$$

Путь, проходимый точкой B за время dt в положение B', определяет величину скашивания, которую можно найти как

$$BB' = \frac{\partial u_x}{\partial y} dy dt$$

Угловая деформация характеризуется тангенсом угла $d\alpha$. При этом

$$\operatorname{tg}(d\alpha) = \frac{BB'}{AB} = \frac{\partial u_x}{\partial y} dt \approx d\alpha$$

(имея в виду, что $AB = dy$).

Вследствие малости угла $d\alpha$ можно считать, что $\operatorname{tg}(d\alpha) \approx d\alpha$.

Аналогично,

$$\operatorname{tg}(d\beta) = \frac{DD©}{AD} = \frac{\partial u_y}{\partial x} dt \approx d\beta$$

Полное скашивание первоначально прямого угла A определяется как сумма

$$d\alpha + d\beta = \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) dt \tag{4.14}$$

Здесь следует обратить внимание на одно весьма существенное обстоятельство: рассматриваемое перемещение ребер вызвано не только деформацией, но и вращением частицы. Действительно, если бы грань только деформировалась без вращения, то ребра повернулись бы на одинаковый угол навстречу друг другу. Наоборот, если бы происходило только вращение, то ребра поворачивались бы на одинаковый угол в направлении вращения.

Следовательно, в общем случае движение элемента можно рассматривать как сумму деформационного и вращательного движений, и таким образом определить $d\alpha$ и $d\beta$. Рассмотрим деформацию прямого угла A, считая, что вращение происходит против часовой стрелки. Чисто деформационное движение будем характеризовать углами $d\gamma$, а чисто вращательное - $d\varepsilon$

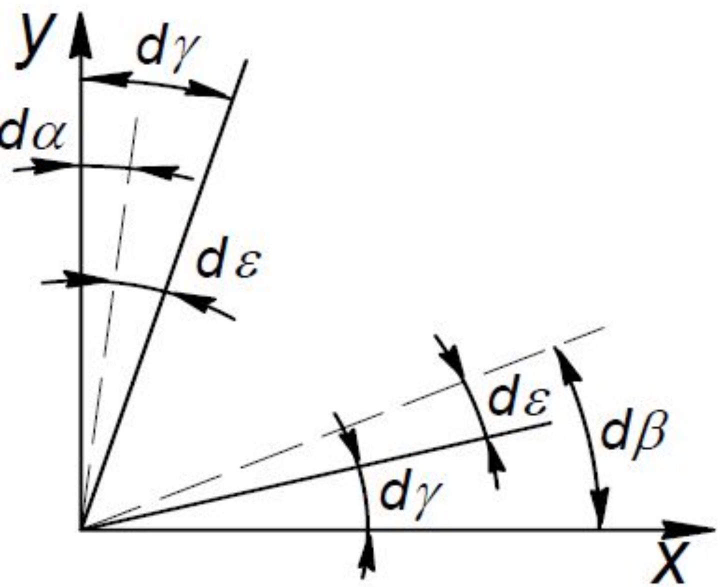


Рис. 4.7

Из рис. 4.7 следует, что

$$d\alpha = d\gamma - d\varepsilon$$

$$d\beta = d\gamma + d\varepsilon$$

либо $\quad d\alpha + d\beta = 2d\gamma$,

откуда

$$d\gamma = \frac{1}{2}\left(d\alpha + d\beta\right) \qquad (4.15)$$

Вычитая, получим

$$d\varepsilon = \frac{1}{2}\left(d\beta - d\alpha\right) \qquad (4.16)$$

Таким образом, деформация характеризуется полусуммой углов, а вращение - полуразностью. Имея в виду (4.14), можем записать:

$$d\gamma = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)dt \qquad (4.17)$$

Скорость угловой деформации, происходящей вокруг оси z

$$\gamma_z = \frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) \tag{4.18}$$

И по аналогии

$$\gamma_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) \tag{4.19}$$

$$\gamma_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) \tag{4.20}$$

Выражение $\frac{d\varepsilon}{dt} = \omega$ есть угловая скорость вращения жидкой частицы.

Проекции угловых скоростей:

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) \tag{4.21}$$

$$\omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) \tag{4.22}$$

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tag{4.23}$$

Соотношения (4.21-4.23) играют исключительно важную роль в механике жидкости. Они устанавливают связь между угловой и поступательной скоростями жидкой частицы. Вопрос о знаках чисто условный. В гидромеханике поворот против часовой стрелки считается положительным, по часовой - отрицательным.

В векторной форме выражение для угловой скорости может быть записано как

$$\vec{\omega} = \vec{e}_x \omega_x + \vec{e}_y \omega_y + \vec{e}_z \omega_z \tag{4.24}$$

Заменяя ω_x, ω_y и ω_z их выражениями по (4.21-4.23) получаем:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\left[\vec{e}_x\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) + \vec{e}_y\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) + \vec{e}_z\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\right] \tag{4.25}$$

Сопоставляя выражение в квадратных скобках с формулой (1.8) видим их полную идентичность, поэтому можем записать:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\vec{u} \tag{4.26}$$

либо

$$\operatorname{rot}\vec{u} = 2\vec{\omega} \tag{4.27}$$

Формула (4.27) раскрывает гидромеханический смысл вихря (ротора) векторного поля. Если $\vec{u}$ характеризует поле мгновенных скоростей, то векторное поле $\operatorname{rot}\vec{u}$ представляет собой поле удвоенных угловых скоростей частиц жидкости этого поля.

4.8.2. Линейные деформации.

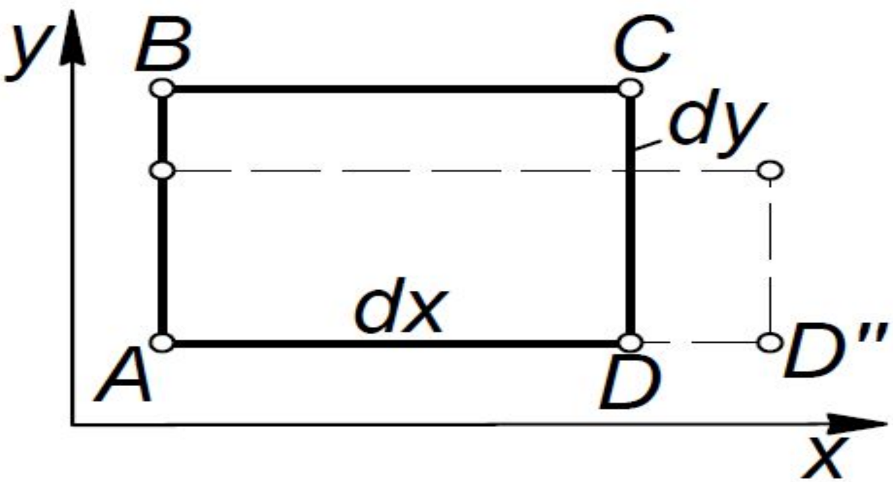


Рис. 4.8

Очевидно, что линейные деформации частицы (рис. 4.8) могут возникнуть в результате различия в скоростях, совпадающих с направлением ребер. Как и ранее, компоненты скорости в точке A - u_x, u_y, u_z.

Вдоль оси x:

Точка A: $u_{x_{(A)}}$

Точка D: $u_{x_{(D)}} = u_{x_{(A)}} + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx$

Разность скоростей, вызывающая удлинение ребра AD: $\frac{\partial u_x}{\partial x} dx$. Удлинение частицы DD'' за время dt

$$DD'' = \frac{\partial u_x}{\partial x} dx dt \qquad (4.28)$$

Относительное удлинение

$$\frac{DD''}{AD} = \frac{\partial u_x}{\partial x} dt = d\varepsilon_x \qquad (4.29)$$

Скорость относительного удлинения

$$\frac{d\varepsilon_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \varepsilon_x \qquad (4.30)$$

Аналогично для других осей

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Если процесс происходит одновременно вдоль всех осей, то это приводит к объемному расширению либо сжатию частицы. Таким образом, объемная деформация сводится к изменению первоначального объема параллелепипеда $dV = dxdydz$ на величину $\delta V = \delta V_x + \delta V_y + \delta V_z$ за счет растяжения либо сжатия ребер. При этом $\delta V_x = DD''dydz$, и с учетом (4.28) $\delta V_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} dV dt$.

Аналогично $\delta V_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} dV dt$ и $\delta V_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} dV dt$. Таким образом

$$\delta V = \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) dV dt$$

Скоростью относительной объемной деформации назовем отношение изменения объема к его первоначальному объему и скорости деформации, т.е.

$$\frac{\delta V}{dV dt} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{u}$$

Если $\operatorname{div}\vec{u} = 0$, то это означает, что $\delta V = 0$, т.е. деформация жидкой частицы происходит без изменения ее объема. В этом и заключается гидромеханический смысл равенства нулю дивергенции.

Полученную выше связь между поступательной и вращательной скоростями жидкой частицы можно получить и более коротким путем, представляющим определенный интерес. Разные подходы к одному и тому же вопросу способствуют углубленному пониманию. Поэтому рассмотрим этот путь.

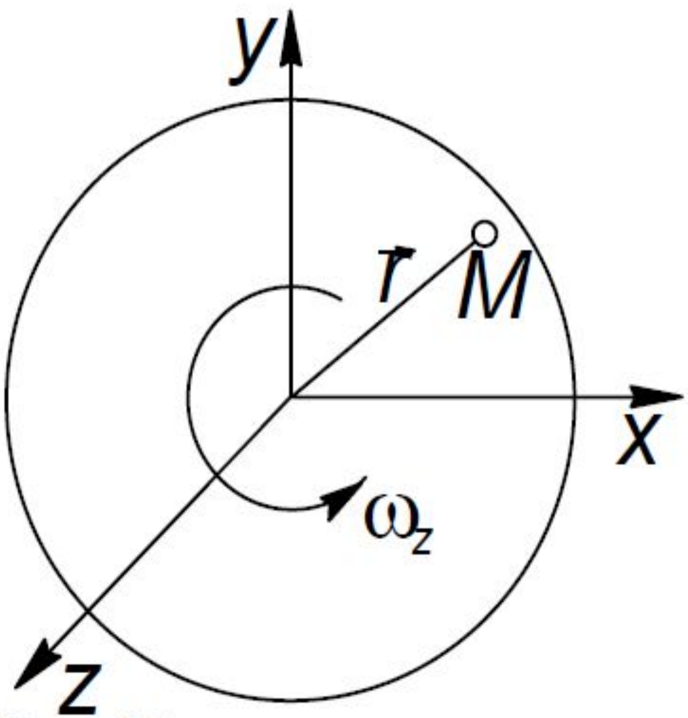


Рис. 4.9

Пусть жидкая частица вращается вокруг оси z с угловой скоростью ω_z. Запишем выражение для ротора в проекциях на оси координат (см. формулу 1.8). Имеем:

$$rot_x\vec{u} = \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}$$

$$rot_y\vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}$$

$$rot_z\vec{u} = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

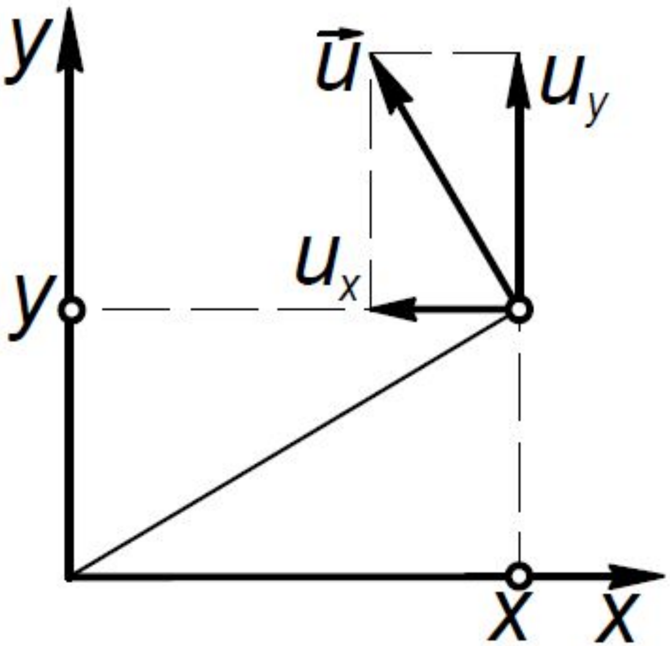


Рис. 4.10

Рассмотрим точку M на жидкой частице (рис. 4.10).

Линейная скорость этой частицы $\vec{u} = \vec{\omega}_z \times \vec{r}$. Запишем выражения для проекций скоростей на оси координат:

$$u_x = -\omega_z y;$$

$$u_y = \omega_z x;$$

$$u_z = 0$$

Откуда находим $\dfrac{\partial u_y}{\partial x} = \omega_z$; $\dfrac{\partial u_x}{\partial y} = -\omega_z$.

Таким образом

$$rot_z \vec{u} = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} = 2\omega_z$$

Аналогично для двух других компонент

$$rot_x \vec{u} = 2\omega_x; \quad rot_y \vec{u} = 2\omega_y$$

Либо в векторной форме $\qquad \vec{\omega} = \dfrac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{u}$

что полностью совпадает с (4.26).

Движение, при котором $\operatorname{rot} \vec{u} \neq 0$ называют вихревым, при $\operatorname{rot} \vec{u} = 0$ - безвихревым либо потенциальным. Из чего следует, что если течение вихревое, то движение жидких частиц происходит с вращением.

ЛЕКЦИЯ 5.

ВИХРЕВОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ

Вихревое движение широко распространено как в природе, так и в разного рода технических устройствах. Поэтому изучение его закономерностей представляет несомненный практический интерес. Вращательное движение жидких частиц характеризуется вихрем скорости

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} rot\vec{u} \tag{5.1}$$

Это означает, что в каждой точке пространства вращение жидких частиц может быть охарактеризовано этим вектором. Его модуль

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} \tag{5.2}$$

Движение, при котором величина вихря скорости не равна нулю, т.е. $\mathrm{rot}\,\vec{u} \neq 0$, называют вихревым. При условии $\mathrm{rot}\,\vec{u} = 0$ движение безвихревое либо потенциальное.

5.1. Кинематика вихревого движения.

Кинематические понятия для вихревого движения можно получить по аналогии с общими понятиями кинематики. В основу кинематики вихревого движения положено представление о вихревой линии, которое аналогично понятию линии тока. Вихревой называется линия, в каждой точке которой в данный момент времени вектор вихря скорости совпадает с касательной (рис. 5.1). Другими словами, вихревая линия - это мгновенная ось вращения частиц жидкости, которые в данный момент времени расположены на ней. По аналогии с дифференциальным уравнением линии тока можно записать

$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z} \tag{5.3}$$

Вихревая трубка - аналог трубки (поверхности) тока. Это поверхность, образованная вихревыми линиями, проведенными через все точки бесконечно малого замкнутого контура. Вихревая нить - аналог струйки - это жидкость, заключенная в вихревой трубке. Если вихревая трубка имеет конечные размеры, то частицы, заполняющие ее и находящиеся во вращательном движении, образуют вихревой шнур.

5.2. Интенсивность вихря.

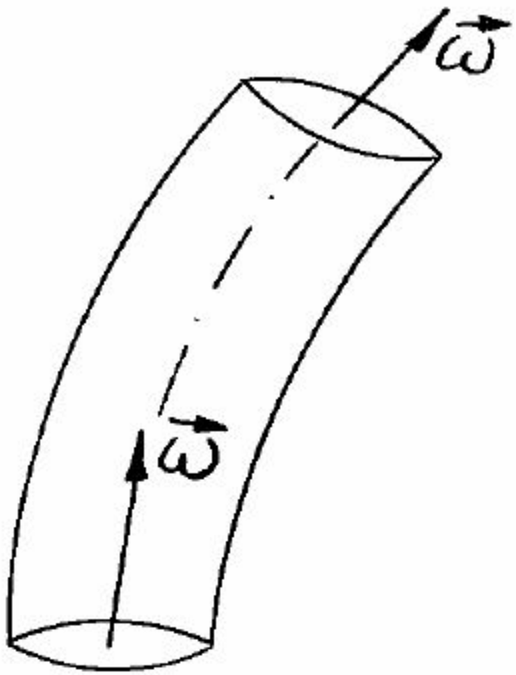


Рис. 5.1

Понятие интенсивности вихря достаточно абстрактно и вводится чисто математически. Напомним, что потоком векторного поля называют интеграл вида

$$\iint_A \vec{u} \cdot \vec{n} dA \qquad (5.4)$$

Поскольку вихрь скорости (ротор) есть вектор, то вместо $\vec{u}$ можно подставить $\operatorname{rot}\vec{u}$, что и приводит нас к понятию интенсивности вихря, т.е. интенсивность вихря - это поток вектора вихря

$$i = \iint_A \operatorname{rot}\vec{u} \cdot \vec{n} dA \qquad (5.5)$$

Можно использовать и другую форму записи: $\operatorname{rot}\vec{u} \cdot \vec{n} = \operatorname{rot}_n \vec{u}$;

$$i = \iint_A \operatorname{rot}_n \vec{u} dA \qquad (5.6)$$

Имея в виду, что $\operatorname{rot}\vec{u} = 2\vec{\omega}$, можем записать

$$i = 2\iint \vec{\omega} \cdot \vec{n} dA = 2\iint \omega_n dA \qquad (5.7)$$

Воспользуемся формулой Гаусса-Остроградского и перейдем от интеграла по поверхности к интегралу по объему. Имеем:

$$i = 2\iint\limits_A \omega_n dA = 2\iiint\limits_V \operatorname{div}\vec{\omega} dV = 2\iiint\limits_V \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} \right) dV .$$

Раскроем выражение, стоящее под знаком интеграла, имея в виду, что проекции вектора вихря имеют вид:

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right);$$

$$\omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right);$$

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right).$$

Имеем

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial z} \right) = 0 .$$

Следовательно, можно записать

$$\iint\limits_A \omega_n dA = 0 \tag{5.8}$$

Заметим, что это выражение по структуре напоминает уравнение неразрывности.

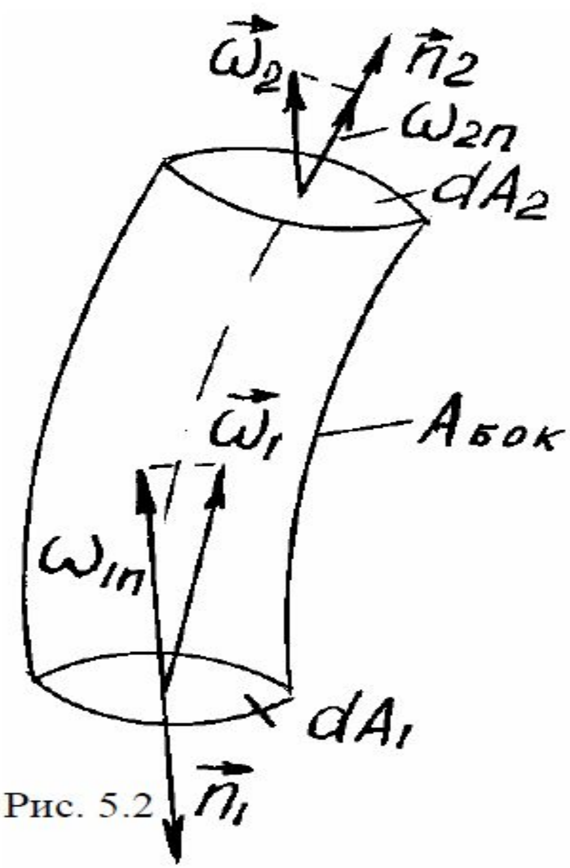


Рис. 5.2

Применим (5.8) к вихревому шнуру (рис. 5.2). На боковой поверхности $\omega_n \equiv 0$, так как $\dot{\omega}$ направлен по касательной к поверхности. Поэтому можем записать

$$-\iint_{A_1} \omega_{n1} dA_1 + \iint_{A_2} \omega_{n2} dA_2 = 0\,;$$

$$\iint_{A_1} \omega_{n1} dA_1 = \iint_{A_2} \omega_{n2} dA_2\,.$$

Если допустить, что в пределах сечения $\omega_n = \text{const}$, то

$$\omega_{n1} A_1 = \omega_{n2} A_2 \qquad (5.9)$$

Либо в общем случае

$$\omega A = \text{const} \qquad (5.10)$$

т.е. это своеобразное «уравнение неразрывности». Полученный результат носит название теоремы Гельмгольца о вихрях, которую можно сформулировать следующим образом: интенсивность вихревого шнура на всей его протяженности остается постоянной. Из выражения (5.10) следует и другой весьма важный вывод, сделанный Г.Гельмгольцем в 1855 г. в работе «Об интегралах уравнений, соответствующих вихревым движениям».Так как произведение ωA остается неизменным, то уменьшение площади сечения шнура должно приводить к увеличению угловой скорости вращения частиц. При $A = 0$ $\omega = \infty$, что физически невозможно. Следовательно, вихрь не может зарождаться либо оканчиваться в толще жидкости. Окончательно развившись, он должен замкнуться либо на твердую поверхность, либо сам на себя, т.е. образовать вихревое кольцо. Подробное

5.3. Циркуляция скорости.

Для введения понятия о циркуляции скорости в настоящем пособии используется методика Н.Я.Фабриканта, приведенная в упомянутой выше книге. Несомненным преимуществом ее является то, что в отличие от других она позволяет ввести понятие циркуляции не чисто математически, а исходя из достаточно простых и ясных физических предпосылок.

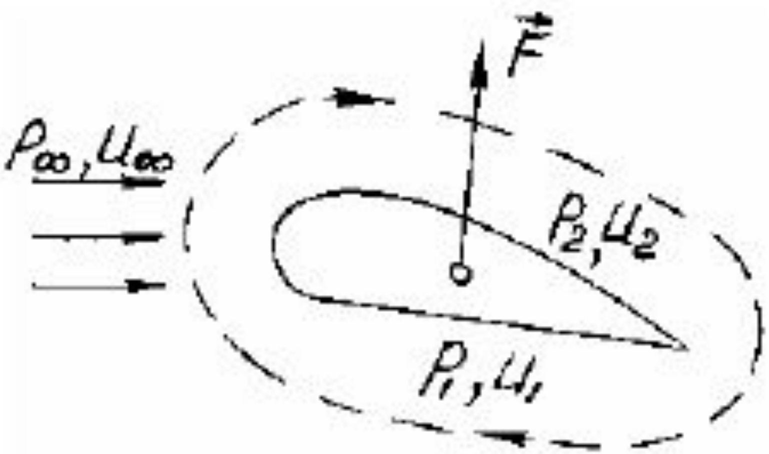


Рис. 5.3

Рассмотрим крыловой профиль, находящийся в потоке газа (воздуха). Как известно, на профиль в этом случае будет действовать подъемная сила (см. рис. 5.3). Физически наличие этой силы можно объяснить лишь тем, что давление под профилем (p_1) больше, а давление над профилем (p_2) меньше, чем давление на каком-то удалении от него, которое мы обозначим p_∞. Это позволяет утверждать, что под крыловым профилем скорость $u_1 < u_\infty$, а над ним $u_2 > u_\infty$. В данном случае u_∞ - скорость невозмущенного потока.

Вычтем теперь из скоростей u_1 и u_2 скорость u_∞, т.е. $u_1 - u_\infty$ и $u_2 - u_\infty$. Это действие приводит нас к понятию потока возмущения, т.е. движения, которое возникает в среде из-за того, что в нее внесено инородное тело, т.е., по существу, это реакция потока, обусловленная в рассматриваемом случае тем, что в ней появился крыловой профиль. Установим теперь направление потоков возмущения. Под профилем $u_1 < u_\infty$, и он направлен против скорости u_∞, над профилем - наоборот. В результате появляется циркуляционный поток, направленный по часовой стрелке, как это показано на рис. 5.3. Теперь необходимо охарактеризовать этот поток количественно. Именно с этой целью вводится понятие циркуляции скорости по замкнутому контуру.

Рассмотрим замкнутый контур C, показанный на рис. 5.4. Пусть в произвольной точке M скорость равна $\vec{u}$. Составим скалярное произведение $\vec{u} \cdot d\vec{l}$, где $d\vec{l}$ - направленный элемент дуги.

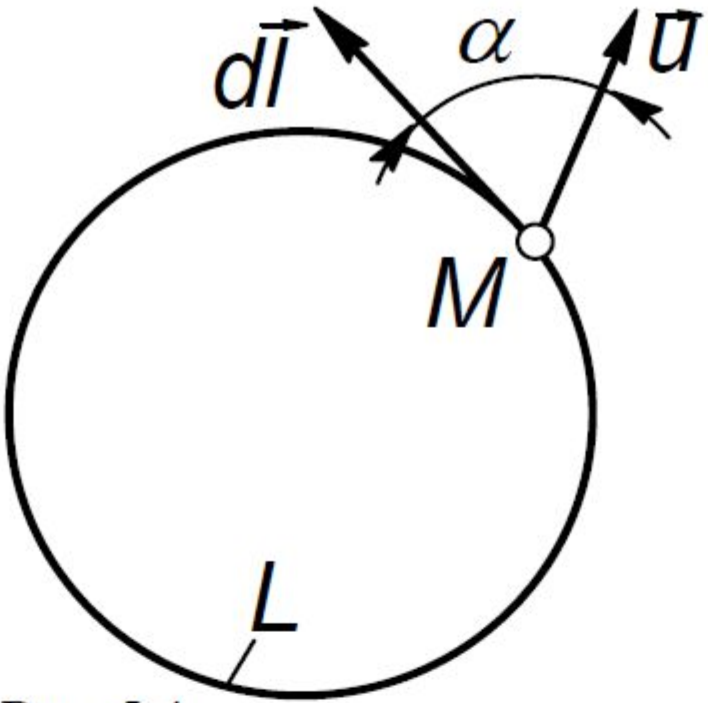


Рис. 5.4

Циркуляцией скорости называют контурный интеграл вида

$$\Gamma = \oint \vec{u} \cdot d\vec{l} \qquad (5.11)$$

Обратим внимание на структуру этого соотношения. Оно построено аналогично выражению для работы, поэтому иногда говорят, что циркуляция - это своеобразная «работа» вектора скорости. Имея в виду, что $\vec{u}(u_x, u_y, u_z)$ и $d\vec{l}\,(dx, dy, dz)$, по правилу скалярного произведения получим

$$\Gamma = \oint (u_x dx + u_y dy + u_z dz) \qquad (5.12)$$

Для плоского течения:

$$\Gamma = \oint (u_x dx + u_y dy) \qquad (5.13)$$

В конце предыдущего раздела утверждалось, что понятие циркуляции является более удобным, чем интенсивность вихря. Действительно, из (5.13) следует, что для определения циркуляции достаточно знать проекции скорости, нахождение которых не связано с существенными трудностями. Однако остается пока открытым вопрос о том, существует ли связь между циркуляцией и интенсивностью вихря. Ответ на него дает теорема Стокса.

5.4. Теорема Стокса.

В движущейся жидкости рассматриваем вихревое поле и выделяем в нем малый замкнутый контур со сторонами dx и dy (рис. 5.5). Пусть в начале координат скорости будут u_x и u_y. Запишем выражение для элементарной циркуляции по этому контуру, имея в виду, что поток двумерный: $d\Gamma = u_x dx + u_y dy$.

Рассмотрим контур $OABC$. Если вдоль OA скорость u_x, то вдоль CB ее приращение составит $\frac{\partial u_x}{\partial y} dy$, и аналогично вдоль AB - $\frac{\partial u_y}{\partial x} dx$. Это следует из выражения для полного дифференциала скорости, например, $du_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy$.

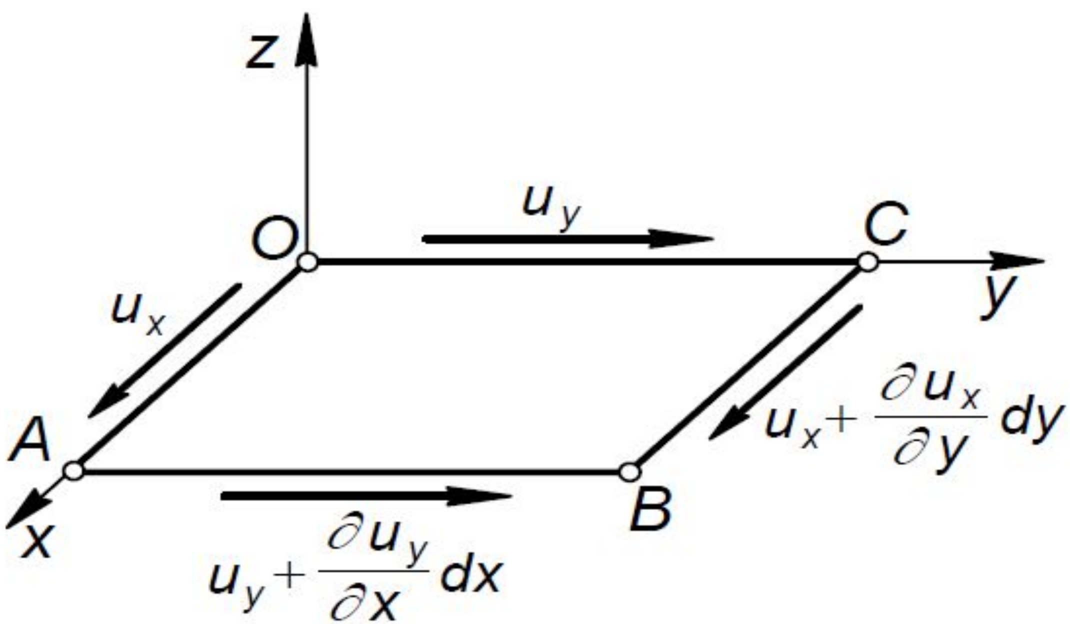


Рис. 5.5

дифференциала скорости, например, $du_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy$.

Запишем теперь выражение для элементарной циркуляции вдоль контура *OABCO*. Имеем:

$$d\Gamma = u_x dx + \left(u_y + \frac{\partial u_y}{\partial x} dx \right) dy - \left(u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy \right) dx - u_y dy$$

Раскрывая скобки и выполнив сокращения, получаем

$$d\Gamma = \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) dxdy = 2\omega_z dA$$

Из чего следует, что циркуляция по бесконечно малому замкнутому контуру равна интенсивности вихря, пронизывающего этот контур.

Этот вывод легко обобщить и на случай произвольной кривой конечных размеров (см., например, Аржаников Н.С. и Мальцев В.Н. Аэродинамика. - М.: Оборонгиз, 1956 - 483 с.; упомянутую выше книгу Н.Я.Фабриканта).

Таким образом, можем записать:

$$\Gamma = 2\iint_A \omega_n dA = i \qquad (5.14)$$

Это и есть формула Стокса, показывающая, что циркуляция по произвольному контуру равна сумме интенсивностей (напряжений) вихрей, пронизывающих поверхность, натянутую на контур.

ЛЕКЦИЯ 6.

ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ

Как уже отмечалось, условием потенциальности движения является равенство нулю вихря скорости, т.е. $\operatorname{rot}\vec{u}=0$. Физически это означает, что движение жидкости происходит без вращения частиц. Как будет показано, потенциальное движение играет исключительно важную роль в механике жидкости.

6.1. Потенциал скорости.

Сущность теоремы Стокса, по существу, сводится к утверждению о равенстве числовых значений интенсивности вихря и циркуляции, т.е. $i = \Gamma$, либо

$$i = \iint_A \operatorname{rot} \vec{u} \cdot \vec{n} dA = \Gamma$$

С другой стороны, для потенциального потока по его определению $\operatorname{rot} \vec{u} = 0$, т.е. в потенциальном поле циркуляция по замкнутому контуру равна нулю.

Запишем выражения для проекций угловых скоростей.

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)$$

$$\omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)$$

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)$$

Из сказанного выше следует, что для безвихревого (потенциального) движения $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$. Следовательно, в этом случае

$$\frac{\partial u_z}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial z}; \quad \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial x}; \quad \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial y} \tag{6.1}$$

Эти соотношения позволяют существенным образом упростить вычисления компонент скорости u_x, u_y, u_z.

Рассмотрим выражение

$$u_x dx + u_y dy + u_z dz \qquad \text{(a)}$$

Оно построено аналогично известному из механики твердого тела выражению для элементарной работы. Зададимся вопросом, в каком случае (а) является полным дифференциалом. Напомним, что если выражение для работы является полным дифференциалом, то силы называются консервативными или имеющими потенциал. Ответ на поставленный вопрос был дан Алесисом

Клеро показал, что выражение типа (а) является полным дифференциалом, если обеспечивается равенство накрест взятых производных. Соотношения (6.1) как раз и удовлетворяют этому требованию, т.е. взятые накрест производные в (а) дают соотношения (6.1). Таким образом, при потенциальном движении выражение (а) является полным дифференциалом какой-то функции φ, и

$$d\varphi = u_x dx + u_y dy + u_z dz \qquad (6.2)$$

С другой стороны, по общему правилу полный дифференциал может быть представлен как

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz \qquad (6.3)$$

Сопоставляя (6.2) и (6.3), получаем

$$u_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}; \quad u_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}; \quad u_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z} \qquad (6.4)$$

По предложению Гельмгольца функцию φ называют потенциалом скорости.

Таким образом, всякому движению жидкости, происходящему без вращения частиц, соответствует свой потенциал скорости. Справедливо и обратное утверждение: если существует потенциал скорости, то движение происходит без вращения частиц

Как уже отмечалось, условием потенциальности является $\operatorname{rot}\vec{u} = 0$. другой стороны, как показано при рассмотрении операций второго порядк операция ротора над градиентом какой-то скалярной функции тождественн равна нулю, т.е.

$$\operatorname{rotgrad}\varphi = 0$$

Сопоставляя эти соотношения, можем записать

$$\vec{u} = \operatorname{grad}\varphi \qquad (6.5)$$

Это означает, что вектор скорости можно рассматривать как градиент какой-т скалярной функции φ. Раскроем значения $\vec{u}$ и $\operatorname{grad}\varphi$. Имеем

$$\vec{u} = \vec{e}_x u_x + \vec{e}_y u_y + \vec{e}_z u_z;$$

$$\operatorname{grad}\varphi = \vec{e}_x \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Откуда, учитывая (6.5), получаем

$$u_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}; \quad u_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}; \quad u_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

т.е. вновь приходим к соотношениям (6.4).

6.2. Уравнение Лапласа.

Операция дивергенции над градиентом скалярной функции приводит к оператору Лапласа. Если в качестве скалярной функции использовать потенциал скорости, то можно записать

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \tag{6.6}$$

Для несжимаемой жидкости $\operatorname{div}\vec{u} = 0$, а $\operatorname{grad}\varphi = \vec{u}$ (см. формулу 6.5). Таким образом

$$\operatorname{divgrad}\varphi = 0 \tag{6.7}$$

либо

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0 \tag{6.8}$$

Выражения (6.7) и (6.8) носят название уравнения Лапласа. Таким образом, для нахождения потенциала скорости необходимо проинтегрировать уравнение Лапласа. Любая функция, удовлетворяющая этому уравнению, носит название гармонической. Следовательно, потенциал скорости является гармонической функцией. Как любое дифференциальное уравнение, уравнение Лапласа имеет бесчисленное множество решений, поэтому для того, чтобы однозначно определить потенциал скорости, необходимо задать граничные условия. Для задач, связанных с обтеканием тел, так называемых внешних задач гидромеханики, такими условиями являются $u_n = 0$ и $u = u_\infty$.

Первое условие характеризует безотрывность течения (равенство нулю нормальной компоненты скорости). Второе - показывает, что вдали от тела распределение скоростей известно.

Поверхности (либо линии для двумерных потоков), в каждой точке которых $\varphi = \mathrm{const}$, называются эквипотенциальными.

6.3. Циркуляция скорости в потенциальном поле.

Рассмотрим плоский (двумерный) поток. Выделим в нем произвольную кривую (рис. 6.1) и запишем выражение для циркуляции вдоль этой кривой

$$\Gamma = \int_A^B u_x dx + u_y dy = \int_A^B \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = \int_A^B d\varphi = \varphi_A - \varphi_B \qquad (6.9)$$

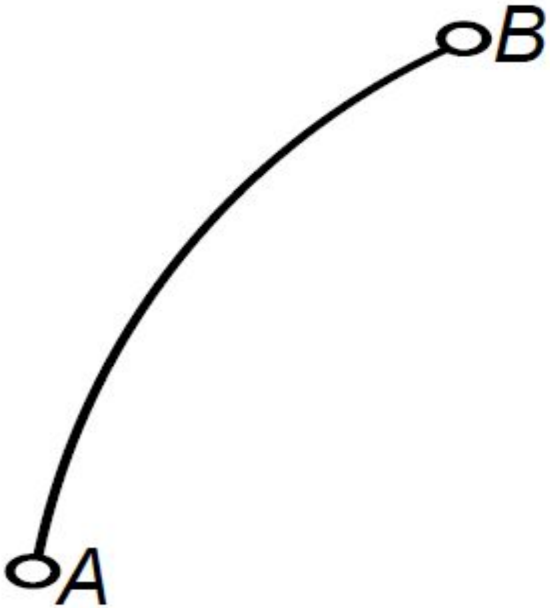


Рис. 6.1

т.е. циркуляция вдоль кривой не зависит от формы, а определяется лишь разностью потенциал в ее конечных точках. Если кривая замкнута, очевидно, что $\varphi_B = \varphi_A$ и $\Gamma = 0$, т.е. циркуляция замкнутому контуру в потенциальном поле рав нулю.

6.4. Функция тока плоского течения.

В практических задачах гидромехани двумерных потоков широчайшее применен находит понятие о функции тока. Рассмотр двумерный поток и ограничимся несжимаем жидкостью.

Как было показано, дифференциальное уравнение линии тока имеет ви

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y}$$

либо

$$u_x dy - u_y dx = 0 \qquad (6.10)$$

Запишем уравнение неразрывности для этого случая, которое буд иметь вид

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \qquad (6.11)$$

Аналогично тому, как это делалось при рассмотрении потенциала скорости, поставим вопрос об условиях необходимых и достаточных для того, чтобы выражение (6.10) являлось полным дифференциалом какой-то скалярной функции. Применим к (6.10) условия Клеро (равенство взятых накрест производных). Имеем:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{\partial u_y}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 .$$

Но это есть не что иное, как уравнение неразрывности (6.11) для плоского потока, которое удовлетворяется всегда, если только движение существует. Следовательно, можно записать:

$$d\psi = u_x dy - u_y dx \tag{6.12}$$

где ψ носит название функции тока. С другой стороны, поскольку, как показано выше, $d\psi$ является полным дифференциалом, то можно записать:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \tag{6.13}$$

Сопоставляя (6.12) и (6.13), получаем

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{6.14}$$

Из чего следует, что если функция тока течения известна, то можно определить компоненты скорости в любой точке пространства. Сопоставляя (6.10) и (6.12) приходим к выводу, что если частица движется вдоль линии тока, то функция тока остается постоянной (при $\psi = \text{const}$, $d\psi = 0$ и (6.12) превращается в (6.10)). Проверим теперь, является ли функция тока гармонической функцией, т.е. удовлетворяет ли она уравнению Лапласа.

Для плоского потенциального течения $\omega_z = 0$, но $\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) = 0$, откуда $\frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial y}$. Из (6.14) $u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ и $u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$, следовательно

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right),$$

откуда

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0.$$

Таким образом, функция тока, как и потенциал скорости, является гармонической функцией. И еще одно важное обстоятельство. Если потенциал скорости существует только в потенциальном потоке, то функция тока этим условием не ограничена. Это объясняется тем, что уравнение неразрывности, которое используется для получения этого понятия, справедливо как для вихревого, так и для безвихревого движений.

6.5. Гидромеханический смысл функции тока.

Установим гидромеханический смысл функции тока, для чего проведем две достаточно близко расположенные линии тока (рис. 6.2). Вычислим объемный расход жидкости, протекающий между ними, для чего разложим вектор скорости частицы $\vec{u}$ на две составляющие u_x и u_y, что позволит представить расход как сумму $dQ = dQ_x + dQ_y$, при этом $dQ_x = u_x dy$ и $dQ_y = -u_y dx$ (рис. 6.2).

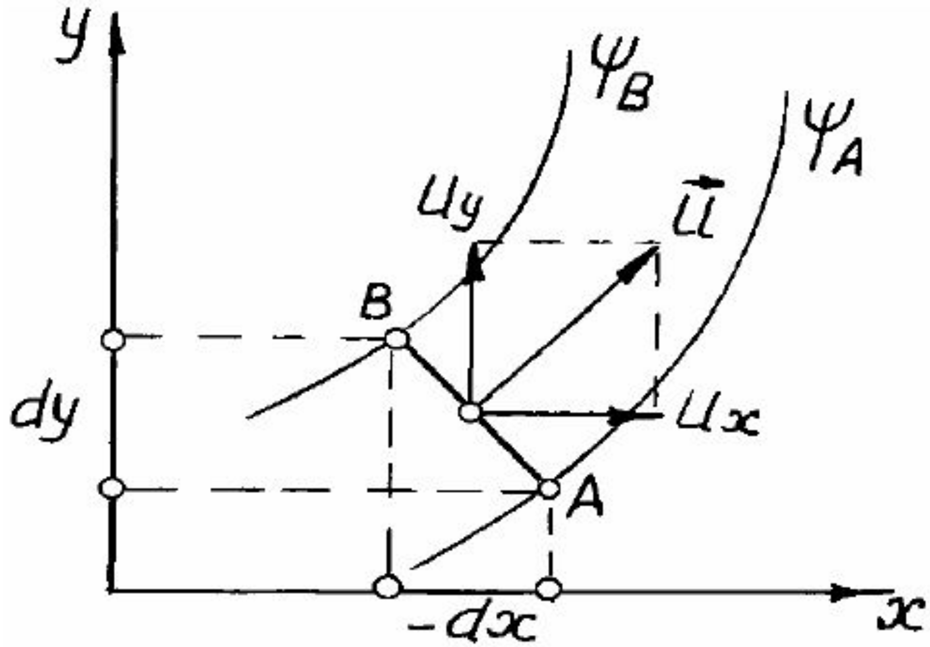


Рис. 6.2

$$dQ = u_x dy - u_y dx$$

$$Q = \int_A^B \left(u_x dy - u_y dx\right) = \int_A^B d\psi = \psi_B - \psi_A \qquad (6.15)$$

т.е. разность значений функций тока на двух смежных линиях тока равна объемному расходу между ними.

6.6. Связь потенциала скорости и функции тока.

Связь между этими параметрами может быть легко установлена, если записать полученные выше выражения для проекций скоростей

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \qquad u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y};$$

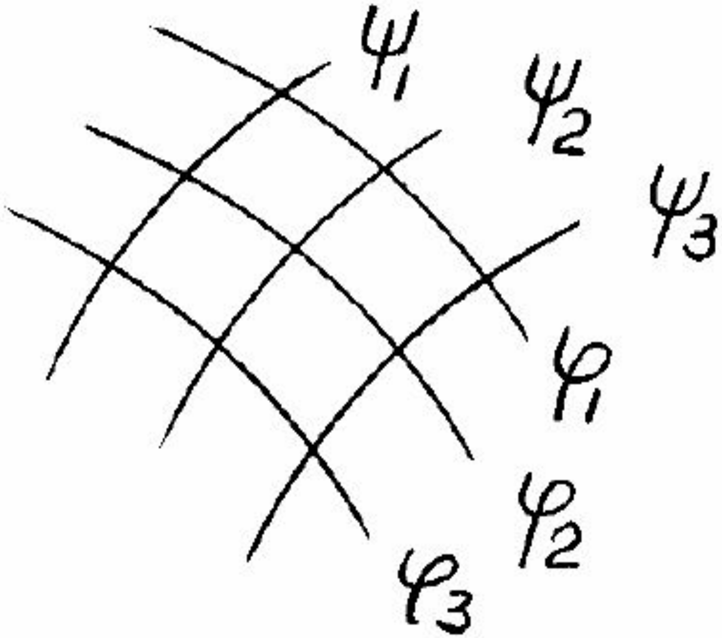


Рис. 6.3

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \qquad u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

откуда

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{6.16}$$

Эти соотношения играют чрезвычайно важную роль в механике жидкости и носят название соотношений Коши-Римана. Более подробно они будут рассмотрены ниже. Пока же ограничимся тем, что перемножим их. Это дает

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{6.17}$$

Из математики известно, что выражения типа (6.17) свидетельствуют о взаимной ортогональности кривых. Следовательно, линии тока и эквипотенциальные линии образуют сетку взаимно ортогональных кривых, которая носит название гидродинамической сетки движения. Примерный ее вид показан на рис. 6.3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гидравлика, гидромашины и гидроприводы: Учебник для втузов / Башта Т.М., Руднев С.С., Некрасов Б.Б. и др. — 2-е изд., перераб. — 476. М.: Машиностроение, 1987. — 423 с.
2. Емцев Б.Т. Техническая гидромеханика: Учебник для втузов. — 2-е изд., прераб. и доп. — М.: Машиностроение 1987. — 440 с.
3.Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика — 6 изд., исправ. и дополн., - М.: Физматгиз, 1963. — 1312 с.
4. Лойцянский Л.Г., Механика жидкости и газа : Учебное пособие для университетов и втузов, — М.: Наука, 1978. —736 с.
5. Попов Д.Н., Панаиотти С.С., Рябинин М.В. Гидромеханика: Учебник для вузов / Под ред. Д. Н. Попова. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. — 384с.
6. Прандтль Л., Титьенс О. Гидро- и аэромеханика. — М.-Л., 1933. — 224 с.
7. Прандтль Л., Титьенс О. Гидро- и аэромеханика. — М.-Л., 1935. — 284 с.
8. Сборник задач по машиностроительной гидравлике: Учеб. пособие для втузов / Под ред. И.И. Куколевского, Л.Г. Подвидза. — 4-е изд., перераб. — М.: Машиностроение, 1981. — 448 с.
9. Седов Л.И. Механика сплошной среды: Учебник для университетов и втузов. — 4-е изд., испр.и доп. — М : Наука, Т. I: 1983, Т. II: 1984. — 1110 с.
10. Седов. Л.И. Методы подобия и размерности в механике. — 10-е изд., доп. — М.: Наука, 1987. — 432 с.
11. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. — М.: Наука, 1969. — 744с.
12. Альбом течений жидкости и газа: Пер. с англ. / Сост. М. Ван-Дайк. — М.: Мир, 1986. — 184.

Вопросы к зачету по курсу гидромеханики

1. Число Кнудсена
2. скалярное произведение
3. Векторное произведение
4. Градиент какой-то скалярной функции
5. Дивергенция вектора
6. Вихрь поля (ротор)
7. превращение скалярной величины в векторную
8. превращение векторной величины в скалярную
9. превращение одной векторной величины в другую
10. Поток векторного поля
11. Циркуляция вектора вдоль контура L
12. Формула Стокса
13. Плотность
14. Вязкость
15. Массовые силы
16. . Поверхностные силы
17. Тензор напряжения
18. касательное напряжение
19. уравнения Эйлера для гидростатики
20. Эквипотенциальные поверхности и поверхности равного давления
21. Равновесие однородной несжимаемой жидкости в поле сил тяжести.
22. Закон Паскаля.

Вопросы к зачету по курсу гидромеханики (продолжение)

1.Гидростатический закон распределения давления
2.Определение силы давления жидкости на поверхности тел
3.Установившееся и неустановившееся движения жидкости.
4.Уравнение неразрывности
5.Линии тока и вектор скорости
6.Линии тока и траектории
7.Трубка тока (поверхность тока)
8.Струйная модель потока
9.Уравнение неразрывности для струйки
10.Деформация и вращение частицы
11. оператор дивергенции для жидкости
12.оператор вихря для жидкости
13.интенсивность вихря
14.циркуляция скорости
15.смысл теоремы Стокса
16.потенциал скорости
17.уравнение Лапласа
18.Циркуляция скорости в потенциальном поле
19.Функция тока плоского течения
20.Связь потенциала скорости и функции тока