Презентація на тему:

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ ТА ЇХ ВИКОРИСТАННЯ ДЛЯ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ

План:

1. ***Означення випадкового процесу, багатовимірна функція розподілу і багатовимірна щільність розподілу.***
2. ***Основні характеристики випадкових процесів (математичне сподівання, дисперсія, середньоквадратичне відхилення).***
3. ***Кореляційна та нормована кореляційна функція випадкового процесу та її властивості.***
4. ***Стаціонарні випадкові процеси та їх характеристики. Спектральний розклад стаціонарних випадкових процесів. Спектральна щільність.***

1. Означення випадкового процесу, багатовимірна функція розподілу і багатовимірна щільність розподілу

Випадковим процесом X(t) *називається процес, значення якого при будь-якому значенні аргументу t є випадковою величиною*.

Інакше кажучи, випадковий процес являє собою функцію, що у результаті випробування може прийняти той або інший конкретний вид, невідомий заздалегідь. При фіксованому $t=t_0$ $X(t_0)$ являє собою звичайну випадкову величину, тобто перетин випадкового процесу в момент t_0.

Реалізацією випадкового процесу *називається детермінована функція , на яку перетворюється випадковий процес внаслідок випробування, тобто його траєкторія.*

Кілька реалізацій певного випадкового процесу зображено на рис. 1. Нехай переріз цього процесу при даному *t* є неперервною випадковою величиною. Тоді випадковий процес при даному *t* визначається щільністю ймовірності

Очевидно, що щільність імовірності не є вичерпним заданням випадкового процесу , оскільки вона не виражає залежності між його перерізами в різні моменти часу.

Випадковий процес являє собою сукупність усіх перерізів за всіх можливих значень *t*, тому для його задання необхідно розглядати багатовимірну випадкову величину утворену з усіх перерізів цього процесу.

Таких перерізів нескінченно багато, але для задання випадкового процесу вдається обмежитись порівняльно невеликою кількістю перерізів.

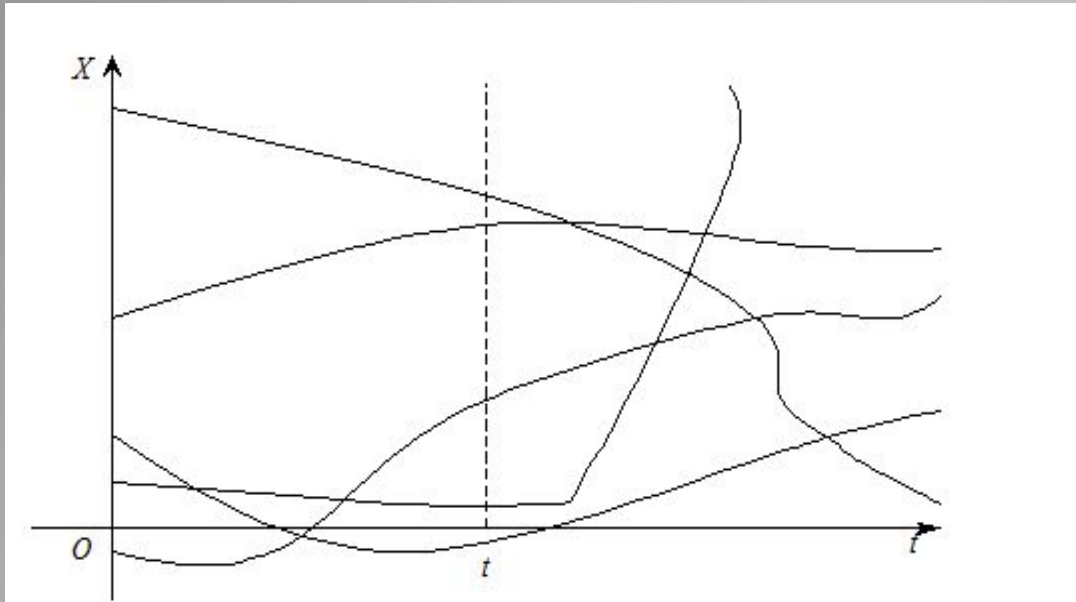

Рис. 1

Випадковий процес має порядок *n*, якщо він повністю визначається щільністю спільного розподілу *n* довільних перерізів процесу, тобто щільністю *n*-вимірної випадкової величини де — переріз випадкового процесу у момент часу

Розрізняють чотири типи випадкових процесів.

1). Випадковий процес загального типу: час - Безперервно та реалізації - Безперервні.

2). Дискретний випадковий процес: час - Безперервно та - Дискретно.

3). Випадкова послідовність: - Дискретно і - Безперервні. У літературі випадкові процеси цього типу прийнято називати тимчасовими рядами.

4). Дискретна випадкова послідовність: - Дискретно і - Дискретно.

Функція розподілу ймовірностей випадкового процесу

При фіксованому *t* розподіл мовірностей перерізу випадкового $\xi(t)$ процесу (як розподіл ймовірностей випадкової величини) задається функцією розподілу ймовірностей

$$F_1(x,t) = P[\xi(t) \le x]$$. **(1)**

Співвідношення (1) можна розглядати при будь-якому *t*. Функція $F_1(x,t)$, як функція двох змінних *x* і *t*, називається **одномірної функцією розподілу ймовірностей випадкового процесу** $\xi(t)$ **.** Аргументи *x* і *t* прийнято називати відповідно фазової та тимчасової змінними.

Більш повно імовірнісні властивості випадкового процесу $\xi(t)$ описує *n*- Мірна функція розподілу F_n - Функція розподілу випадкового вектора $(\xi(t_1),\dots,\xi(t_n))$,

$$F_n(x_1,\dots x_n;t_1,\dots,t_n) = P[\xi(t_1) \le x_1,\dots,\xi(t_n) \le x_n]$$. **(2)**

Проте, практичне застосування знаходять лише функції розподілу першого і другого порядків $(n=1,2)$. Функції більш високих порядків $(n \ge 3)$ використовуються тільки в теорії.

Основні властивості -Мірної функції розподілу ймовірностей випадкового процесу аналогічні властивостям функції розподілу ймовірностей n -Мірного вектора

1) Функція $F_n(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots,t_n)$ - Неспадними по кожному аргументу x_i

$i=1,\ldots,n$

2) Функція $F_n(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots,t_n)$ - Неперервна справа по кожному аргументу x_i

x_i, t_i і x_j, t_j

3) Функція розподілу симетрична щодо перестановок двох будь-яких пар

$F_n(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots,t_n)=F_n(x_{k_1},\ldots,x_{k_n};t_{k_1},\ldots,t_{k_n})$

l , $1\le l\le n$

l , $1\le l\le n$

4) Для будь-якого цілого

5) Д

$$\lim_{x_l\to\infty} F_n(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots,t_n)=F_{n-1}(x_1,\ldots,x_{l-1},x_{l+1},\ldots,x_n;t_1,\ldots,t_{l-1},t_{l+1},\ldots,t_n)$$

$F_n(\infty,\ldots,\infty;t_1,\ldots,t_n)=1$

6)

Щільність розподілу ймовірностей випадкового процесу

Якщо $F_n(x_1,\dots,x_n;t_1,\dots,t_n)$ має похідну $\dfrac{\partial^n F_n(x_1,\dots,x_n;t_1,\dots,t_n)}{\partial x_1\cdots\partial x_n}=f_n(x_1,\dots,x_n;t_1,\dots,t_n)$ (3)

тоді ця похідна називається n-***Мірної щільністю розподілу ймовірностей випадкового процесу.***

Основні властивості щільності аналогічні властивостям щільності розподілу ймовірностей n-Мірного вектора. ***Розглянемо основні з них***

1) Функція розподілу F_n визначається через щільність:

2) $$F_n(x_1,\dots,x_n;t_1,\dots,t_n)=\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_n} f_n(y_1,\dots,y_n;t_1,\dots,t_n)\,dy_1\cdots dy_n$$

3) Щільність f_n задовольняє умові нор $f_n(x_1,\dots,x_n;t_1,\dots,t_n)\ge 0$

4) Виконується рівність : $\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x_1,\dots,x_n;t_1,\dots,t_n)\,dx_1\cdots dx_n=1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x_1,\dots,x_n;t_1,\dots,t_n)\,dx_l=f_{n-1}(x_1,\dots,x_{l-1},x_{l+1},\dots,x_n;t_1,\dots,t_{l-1},t_{l+1},\dots,t_n)$$

5) Щільність - симетрична функція щодо перестановок двох будь-яких пар x_i,t_i і x_j,t_j:

$$f_n(x_1,\dots,x_n;t_1,\dots,t_n)=f_n(x_{k_1},\dots,x_{k_n};t_{k_1},\dots,t_{k_n})$$

6) Щільність визначає ймовірність потрапити значенням випадкового процесу в задані інтервали:

$$P\{a_1<\xi(t_1)\le b_1,\dots,a_n<\xi(t_n)\le b_n\}=\int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_n}^{b_n} f_n(x_1,\dots,x_n;t_1,\dots,t_n)\,dx_1\cdots dx_n$$

2. Основні характеристики випадкових процесів (математичне сподівання, дисперсія, середньоквадратичне відхилення).

Випадковий процес може бути заданий ***числовими характеристиками***.

Математичним сподіванням випадкового проц $X(t)$ у називається детермі $a_x(t)$ вана функція яка за будь-якого значення змінної t дорівнює математичному сподіванню відповідного перерізу ви $X(t)$ дковог $D_x(t)=D[X(t)]$ тобто

$X(t)$ $D_x(t)$

Дисперсією випадкового процесу називається детермінована функція яка за будь-якого зн $X(t)$ ення зм $D_x(t)=D[X(t)]$ рівнює дисперсії відповідного перерізу випадкового процесу $\sigma_x(t)$ бто

$X(t)$

Середнім квадратичним відхиленням випадкового процес $\sigma_x(t)=\sqrt{D_x(t)}$ називається арифметичне значення квадратного кореня з його дисперсії, тобто

Математичне очікування випадкового процесу характеризує середню траєкторію всіх можливих його реалізацій, а його дисперсія або середнє квадратичне відхилення - розкид реалізацій щодо середньої $X_1(t)$ єкторії. Уведених вище характеристик випадкового процесу виявляється $X_2(t)$ недостатньо, тому що вони визначаються тільки одномірним законом $X_1(t)$ розподілу. Якщо для випадкового процесу характерно повільн $X_1(t)$ мін $X_2(t)$ значень реалізацій зі зміною t то дл $X_2(t)$ ипадкового процесу ця змін $X_2(t)$ $X_1(t)$ проходить значно швидше. Інакше кажучи, для випадкового процесу характерна тісна імовірнісна залежність між двома його сполученнями і у той час як для випадкового процесу ця залежність між сполученнями і практично відсутній. Зазначена залежність між сполученнями

3. Кореляційна та нормована кореляційна функція випадкового процесу та її властивості.

- ***Кореляційною функцією*** випадкового процесу X (t) називається невипад $K_x(t_1, t_2) = M[(X(t_1) - a_x(t_1))(X(t_2) - a_x(t_2))]$ (3.) t_1 і t_2, х змінних яка при кожній па t_1 і t_2, інних дорівнює коваріації відповідн $X(t_1)$ і $X(t_2)$ ань випадкового процесу

Очевидно, для випадкового процес (t_1) кореляційна функ $K_{x1}(t_1, t_2)$ зменшується в міру збіль $t_2 - t_1$ ня різниці значно п $K_{x2}(t_1, t_2)$ е, ніж для випадкового про $X(t_2)$ у

Кореляційна функція $K_x(t_1, t_2)$ характеризує не тільки ступінь тісноти лінійної залежності між двома сполученнями, а й розкид цих поєднань щодо математичного очікування $a_x(t)$ му розглядається також нормована кореляційна функція випадкового процесу.

Нормованої кореляційної функцією випадкового процесу X (t) називається функція:

$$P_x(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_2) / \sigma_x(t_1)\sigma_x(t_2) \quad (4)$$

Приклад № 1

Випадковий процес визначається формул $X(t) = X \cos\omega t,$ де X - випадкова величина.Знайти основні характеристики цього процесу, я $M(X) = a,\ D(X) = \sigma^2.$

РІШЕННЯ:

На підставі властивостей математичного сподівання і дисперсії маємо:

$$a_x(t) = M(X\cos\omega t) = \cos\omega t * M(X) = a \cos\omega t,$$

$$D_x(t) = D(X\cos\omega t) = \cos^2\omega t * D(X) = \sigma^2 \cos^2 \omega t.$$

Кореляційну функцію знайдемо за формулою (3.)

$$K_x(t_1, t_2) = M[(X\cos\omega t_1 - a\cos\omega t_1)(X\cos\omega t_2 - a\cos\omega t_2)] =$$

$$= \mathrm{Cos}\,\omega t_1 \cos\omega t_2 * M[(X - a)(X - a)] = \cos\omega t_1 \cos\omega t_2 * D(X) = \sigma^2 \cos\omega t_1 \cos\omega t_2.$$

Нормовану кореляційну функцію знайдемо за формулою (4.):

$$P_x(t_1, t_2) = \sigma^2 \cos\omega t_1 \cos\omega t_2 / (\sigma \cos\omega t_1)(\sigma\cos\omega t_2) \equiv 1.$$

Випадкові процеси можна класифікувати в залежності від того, плавно або стрибкоподібно змінюються стану системи, в якій вони протікають, звичайно (лічильно) або нескінченно безліч цих станів і т.п. Серед випадкових процесів особливе місце належить Марківському випадковому процесу.

Теорема.

Випадковий процес $X(t)$ є гільбертовому тоді і тільки тоді, коли існує (t, t') для $(t, t') \in T * T.$

Теорію гільбертовому випадкових процесів називають кореляційної

Зауважимо, безліч T м X_t же бути дискретним і континуальним. У першому випадку випадковий процес $\omega \in \Omega,$ називають процесом з дискретним часом, у другому - з безперервним часом.

X_t

Відповідно поєднання можуть бути дискретними і безперервними випадковими величинами.

$X(t)$

Випадковий процес на $\omega \in \Omega,$ ється вибірково не $x(t) = x(t, \omega)$ им, диференційовних і інтегрованим в точці якщо $X(t)$ го реалізація відповідно безупинна, дифференцируема і інтегровна.

$X(t)$

В $P(A) = 1, A = \{\omega \in \Omega: \lim x(t_n) = x(t)\}$ азивається безперервним: майже, напевно, якщо

$\operatorname{Lim} M[(X(t_n) - X(t))^2] = 0$

У середньому квадратичному, якщо

$A\delta \geq 0: \lim P[|X(t_n) - X(t)| > \delta] = 0$

За ймовірності, якщо

$X(t) = \lim X(t_n)$

Збіжність в середньому квадратичному позначають також:

Виявляється, з вибіркової безперервності слід безперервність майже напевно, з безперервності майже напевно і в середньому квадратичному слід безперервність по ймовірності

Теорема.

Якщо X (t) - Гільбертом випадковий процес, безперервний у середньому квадратичному, то $m_x(t)$ - безперервна функція і має місце співвідношення

$$\lim M[X(t_n)] = M[X(t)] = M[\lim X(t_n)].$$

Теорема.

Гільбертом випадковий процес X (t) безперервний у середньому квадратичному тоді і тільки тоді, коли безупинна його коваріаційна ф[...]ія $R(t, t')$) в точці (t, t).

Гільбертом випадковий процес X (t) називаєтьс[...] $X(t) = q X(t) \setminus q$[...]ційовних в середньому [...] і [...]ипадкова функція $X(t) = dX(t)/dt = \lim X(t + \Delta t) - X(t)/\Delta t$ $(T \in T, t + \Delta t \in T)$, така, що

тобто, коли

$$\lim M[((X(t + \Delta t) - X(t)/(\Delta t)) - X(t))^{2}] = 0$$

Випадкову функцію X (t) будемо називати <u>похідної в середньому квадратичному</u> випадкового процесу X (t) <u>відповідно</u> в точці t або на T.

Теорема.

Гільбертом випадковий процес X (t) диференціюємо в середньому квадратичному в точці t тоді і тільки тоді, коли існує

$\delta^2 R(t, t') / \delta t \delta t'$ в точці (t, t'). При цьому:

$R_x(t, t') = M[X(t) X(t')] = \delta^2 R(t, t') / \delta t \delta t'$.

Якщо Гільбертом випадковий процес диференціюємо на Т, то його похідна в середньому квадратичному також є гільбертовому випадковим процесом; якщо вибіркові траєкторії процесу діфференцируєми на Т з імовірністю 1, то з імовірністю 1 їх похідні збігаються з похідними в середньому квадратичному на Т.

Теорема.

Якщо X (t) - Гільбертом випадковий процес, то

$M[dX(t) / dt] = (d / dt) M[X(t)] = dm_x(t) / dt$.

Нехай (0, t) - кінцевий інтервал, $0 < t_1 < ... < t_n =$ і його точки.

X (t) - Гільбертом випадковий процес

$Y_n = \Sigma X(t_i)(t_i - t_{i-1}) \; (n = 1, 2, ...)$.

Тоді випадкова величина

$Y(t) = \lim Y_n$

$\max(t_i - t_{i-1}) \to 0$

Називається <u>інтегралом в середньому квадратичному</u> процесу X (t) на (0, t) і позначається:

$Y(t) = \int X(\tau) d\tau$.

Теорема.

Інтеграл Y (t) в середньому квадратичному існує тоді і тільки

$$R_y (T, t') = \int\int R(\tau, \tau')\, d\tau d\tau'$$

тоді, коли коваріаційна функція R (t, t ') гільбертова процесу X (t) неперервна на T × T і існує інтеграл

Якщо інтеграл в середньому квадратичному функції X (t) існує, то

$M [Y (t)] = \int M [X (\tau)]\, d\tau,$

$R_Y (t, t') = \int\int R (\tau, \tau')\, d\tau d\tau'$

$K_y (T, t') = \int\int K (\tau, \tau')\, d\tau d\tau'$

Тут $R_y (t, t') = M [Y (t) Y (t')]$, $K_y (t, t') = M [Y (t) Y (t')]$ - коваріаційна і кореляційна функції випадкового процесу Y (t).

Теорема.

Нехай $X(t)$ - Гільбертом випадковий процес з коваріаційною функцією $R(t, t')$, $\varphi(t)$ - речова функція і існує інтеграл

$\int\int \varphi(t)\varphi(t')R(t, t')\,dt\,dt'$

Тоді існує в середньому квадратичному інтеграл

$\int \varphi(t) X(t)\,dt$.

Випадкові процеси:

$X_i(t) = V_i \varphi_i(t)$ $(i = 1n)$

Де $\varphi_i(t)$ - задані речові функції

V_i - Випадкові величини з характеристиками

$M(V_I = 0)$, $D(V_{I)} = D_{I,}$ $M(V_i V_{j)} = 0$ $(i \neq j)$

Називають елементарними.

Канонічним розкладанням випадкового процесу $X(t)$ називають його подання у вигляді

$X(t) = m_x(t) + \Sigma V_i \varphi_i(t)$ $(t \in T)$

Де V_i - коефіцієнти, а $\varphi_i(t)$ - координатні функції канонічного розкладання процесу $X(t)$

З відносин:

$M(V_I = 0)$, $D(V_{I)} = D_{I,}$ $M(V_i V_{j)} = 0$ $(i \neq j)$

$X(t) = m_x(t) + \Sigma V_i \varphi_i(t)$ $(t \in T)$

Слід:

$K(t, t') = \Sigma D_i \varphi_i(t) \varphi_i(t')$

Цю формулу називають <u>канонічним розкладанням</u> кореляційної функції випадкового процесу.

У випадку рівняння

$X(t) = m_x(t) + \Sigma V_i \varphi_i(t)$ $(t \in T)$

Мають місце формули:

$X(t) = m_x(t) + \Sigma V_i \varphi(t)$

$\int x(\text{т})\, d\text{т} = \int m_x(\text{т})\, d\text{т} + \Sigma V_i \int \varphi_i(t)\, dt.$

Таким чином, якщо процес X (t) представлений його канонічним розкладанням, то похідна і інтеграл від нього також можуть бути представлені у вигляді канонічних розкладань

4. Стаціонарні випадкові процеси та їх характеристики. Спектральний розклад стаціонарних випадкових процесів. Спектральна щільність.

Стаціонарні випадкові процеси

Випадковий процес X (t) називають **стаціонарним** у вузькому сенсі, якщо

$F(x_{1,} \dots, x_{n;}\ t_{1,} \dots, t_{n)} = F(x_{1,} \dots, x_{n;}\ t_1 + \Delta, \dots, t_n + \Delta)$

При довільних

$n \geq 1, x_{1,} \dots, x_{n,}\ t_{1,} \dots, t_{n;}\ \Delta;\ t_1 € T, t_i + \Delta € T.$

Тут $F(x_{1,} \dots, x_{n;}\ t_{1,} \dots, t_{n)}$ - n-мірний функція розподілу випадкового процесу X (t).

Випадковий процес X (t) називають стаціонарним у широкому сенсі, якщо

$m(t) = m(t + \Delta), K(t, t') = K(t + \Delta, t' + \Delta)$

$(T € T, t' € T, t + \Delta € T), t' + \Delta € T)$

Очевидно, що з стаціонарності у вузькому сенсі слід стаціонарність у широкому сенсі.

З формул:

$m(t) = m(t + \Delta), K(t, t') = K(t + \Delta, t' + \Delta)$

$(T € T, t' € T, t + \Delta € T), t' + \Delta € T)$

Слід, що для процесу, стаціонарного в широкому сенсі, можна записати

$m(t) = m_x(0) = const;$

$D(t) = K(t, t) = K(0,0) = const;$

$K(t, t') = K(t - t', 0) = K(0, t' - t)$

Таким чином, для процесу, стаціонарного в широкому сенсі, *математичне* очікування і дисперсія не залежать від часу, а K (t, t ') являє собою функцію вида:

$K(t, t') = k(\tau) = k(-\tau), \tau = t' - t.$

Видно, що $k(\tau)$ - парна функція, при цьому

$K(0) = B = \sigma^{2;} \ | k(\tau) | \leq k(0); \Sigma \Sigma \acute{\alpha}_i \alpha_j k(t_i - t_{j)} \geq 0$

Тут D - дисперсія стаціонарного процесу

X (t), α_i (I = 1, n) - довільні числа.

Перше рівність системи

$K(0) = B = \sigma^{2;} \ | k(\tau) | \leq k(0); \Sigma \Sigma \acute{\alpha}_i \alpha_j k(t_i - t_{j)} \geq 0$

випливає з рівняння $K(t, t') = k(\tau) = k(-\tau), \tau = t' - t$. Перше рівність

$K(0) = B = \sigma^{2;} \ | k(\tau) | \leq k(0); \Sigma \Sigma \acute{\alpha}_i \alpha_j k(t_i - t_{j)} \geq 0$ - простий наслідок нерівності Шварца для перерізів X (t), X (t ') стаціонарного випадкового процесу X (t). Останнє нерівність:

$K(0) = B = \sigma^{2;} \ | k(\tau) | \leq k(0); \Sigma \Sigma \acute{\alpha}_i \alpha_j k(t_i - t_{j)} \geq 0$

Отримують наступним чином:

$\Sigma \Sigma \alpha_i \alpha_j k (t_i - t_{j)} = \Sigma \Sigma K (t_{i,} t_{j)} \alpha_i \alpha_j = \Sigma \Sigma M [(\alpha_i X_{i)} (\alpha_j X_{j)]} = M [(\Sigma \alpha_i X_i)^{2]} \geq 0$

Враховуючи формулу кореляційної функції похідної dX (t) / dt випадкового процесу, для стаціонарної випадкової функції X (t) отримаємо

$K_1 (t, t') = M [(dX (t) / dt) * (dX (t') / dt ')] = \delta^2 K (t, t') / \delta t \delta t '= \delta^2 k (t '- t) / \delta t \delta t'$

Оскільки

$\delta k (t '- t) / \delta t = (\delta k (\tau) / \delta\tau) * (\delta\tau / \delta\tau) = - \delta k (\tau) / \delta\tau,$

$\delta^2 k (t '- t) / \delta t \delta t' = - (\delta^2 k (\tau) / \delta\tau^{2)} * (\delta\tau / \delta t ') = - (\delta^2 k (\tau) / \delta\tau^{2)}$

то $K_1 (t, t ') = k_1 (\tau) = - (\delta^2 k (\tau) / \delta\tau^{2),}$ $\tau = t' - t$.

Тут $K_1 (t, t ')$ і $k_1 (\tau)$ - кореляційна функція першої похідної стаціонарного випадкового процесу X (t).

Для n-й похідної стаціонарного випадкового процесу формула кореляційної функції має вигляд:

$K_n (\tau) = (-1)^n * (\delta^{2n} * k (\tau) / \delta\tau^{2n)}$

Теорема.

Стаціонарний випадковий процес X (t) з кореляційною функцією k (т) безперервний у середньому квадратичному в точці t € T тоді і тільки тоді, коли

Lim k (т) = k (0)

Для доказу запишемо очевидну ланцюжок рівностей:

M [| X (t + т) - X (T) | $^{2]}$ = M [| X (t) | $^{2]}$ - 2 M [| X (t + т) X (t) |] + M [X (t) $^{2]}$ =

= 2 D -2 k (т) = 2 [k (0) - k (т)].

Звідси очевидно, що умова безперервності в середньому квадратичному процесу X (t) в точці t € T

Lim M [| X (t + т) - X (t) | $^{2]}$ = 0

Має місце тоді і тільки тоді, коли виконується Lim k (т) = k (0)

Теорема.

Якщо кореляційна функція k (т) стаціонарного випадкового процесу X (t) неперервна в середньому квадратичному в точці т = 0, то вона неперервна в середньому квадратичному в будь-якій точці $т \in R^{1}$.

Для доказу запишемо очевидні рівності:

$k(т + \Delta т) - k(т) = M[X(t + т + \Delta т)\,X(t)] - M[X(t + т)\,X(t)] =$

$= M\{X(t)\,[X(t + т + \Delta т) - X(t + т)]\}$

Потім, застосовуючи нерівність Шварца до співмножників в фігурної дужки і враховуючи співвідношення:

$K(t, t') = k(т) = k(-т),\ т = t' - t.$

$K(0) = B = \sigma^{2};\ |k(т)| \le k(0);\ \Sigma\Sigma\, \acute{\alpha}_i\, \alpha_j\, k(t_i - t_j) \ge 0$

Отримаємо:

$0 \le [k(т + \Delta т) - k(т)]^{2} \le M[X(t)^{2}]\, M[|X(t + т + \Delta т) - X(t + т)|^{2}] =$

$= 2D[D - k(\Delta т)].$

Переходячи до межі при $\Delta т \to 0$ і беручи до уваги умову теореми про безперервність k (т) в точці т = 0, а також перше рівність системи

$K(0) = B = \sigma^{2}$, знайдемо

$\lim k(т + \Delta т) = k(т)$

Оскільки тут т - довільне число, теорему слід вважати доведеною.

Ергодична властивість стаціонарних випадкових процесів

Нехай X (t) - стаціонарний випадковий процес на відрізку часу [0, T] з характеристиками

M [X (t)] = 0, K (t, t ') = M [X (t) X (t')] = k (т),

т = t '- t, (t, t') € T × T.

Ергодична властивість стаціонарного випадкового процесу полягає в тому, що за досить тривалої реалізації процесу можна судити про його математичне сподівання, дисперсії, кореляційної функції.

Більш строго стаціонарний випадковий процес X (t) будемо називати ергодичним з математичного очікуванню, якщо

$\text{Lim } M \{| (1 / T) \int X (t)\, dt |^{2}\} = 0$

Теорема

Стаціонарний випадковий процес X (t) з характеристиками:

M [X (t)] = 0, K (t, t ') = M [X (t) X (t')] = k (т),

т = t '- t, (t, t') € T × T

є ергодичним з математичного очікування тоді і тільки тоді, коли

Lim (2 / T) ∫ k (т) (1 - т / t) dт = 0.

Для доказу, очевидно, досить переконатися, що справедлива рівність

M {(1 / T) ∫ X (t) dt | $^{2\}}$ = (2 / T) ∫ k (т) (1 - т / t) dт

Запишемо очевидні співвідношення

C = M {| (1 / T)) ∫ X (t) dt | $^{2\}}$ = (1 / T $^{2)}$ ∫ ∫ k (t '- t) dt' dt = (1 / T) ∫ dt ∫ k (t '- t) dt'.

Вважаючи тут т = t '- t, dт = dt' та враховуючи умови (t '= T) → (т = T - t),

(T '= 0) → (т = - t), отримаємо

C = (1 / T $^{2)}$ ∫ dt ∫ k (т) dт = (1 / T $^{2)}$ ∫ dt ∫ k (т) dт + (1 / T $^{2)}$ ∫ dt ∫ k (т) dт =

= - (1 / T $^{2)}$ ∫ dt ∫ k (т) dт - (1 / T $^{2)}$ ∫ dt ∫ k (т) dт

Вважаючи у першому та другому доданків правої частини цієї рівності відповідно т =-т ', d т = - d т', т = T-т ', d т = - d т', знайдемо

C = (1 / T $^{2)}$ ∫ dt ∫ k (т) dт + (1 / T $^{2)}$ ∫ dt ∫ k (T - т) dт

Застосовуючи формулу Дирихле для подвійних інтегралів, запишемо

C = (1 / T $^{2)}$ ∫ dt ∫ k (т) dт + (1 / T $^{2)}$ ∫ dt ∫ k (T - т) dт = (1 / T $^{2)}$ ∫ (T - т) k (т) dт + (1 / T $^{2)}$ ∫ тk(T - т) dт

У другому доданку правої частини можна покласти т '= T-т, d т = - d т', після чого матимемо

C = (1 / T $^{2)}$ ∫ (T - т) k (т) dт - (1 / T $^{2)}$ ∫ (T - т) k (т) dт = 2 / T ∫ (1 - (т / T)) k (т) d т

Звідси і з визначення констант видно, що рівність

M {(1 / T) ∫ X (t) dt | $^{2\}}$ = (2 / T) ∫ k (т) (1 - т / t) dт

Справедливо.

Теорема

Якщо кореляційна функція $k(\tau)$ стаціонарного випадкового процесу $X(t)$ задовольняє умові

$\mathrm{Lim}\ (1 / T) \int | k(\tau) |\ dt = 0$

Те $X(t)$ є ергодичним з математичного очікування.

Дійсно, з огляду на співвідношення

$M \{(1 / T) \int X(t)\ dt\ |^{2\}} = (2 / T) \int k(\tau)\ (1 - \tau / t)\ d\tau$

Можна записати

$0 \le (2 / T) \int (1 - \tau / t)\ k(\tau)\ d\tau \le (2 / T) \int (1 - \tau / t)\ | k(\tau) |\ d\tau \le (1 / T) \int | k(\tau) |\ d\tau$

Звідси видно, що якщо виконано умову, то

$\mathrm{Lim}\ (2 / T) \int (1 - \tau / T)\ k(\tau)\ d\tau = 0$

Тепер, беручи до уваги рівність

$C = (1 / T^{2)} \int (T - \tau)\ k(\tau)\ d\tau - (1 / T^{2)} \int (T - \tau)\ k(\tau)\ d\tau = 2 / T \int (1 - (\tau / T)\ )\ k(\tau)\ d\ \tau$

І умова $\mathrm{Lim}\ M \{| (1 / T) \int X(t)\ dt\ |^{2\}} = 0$

Ергодичності з математичного очікування стаціонарного випадкового процесу $X(t)$, знаходимо, що необхідна доведено.

Теорема.

Якщо кореляційна функція k (т) стаціонарного випадкового процесу

X (t) інтегруєма і необмежено убуває при т → ∞, тобто виконується умова

При довільному ε> 0, то X (t) - ергодичною з математичного очікування стаціонарний випадковий процес.

Дійсно, з огляду на вираз

Для $T \geq T_0$ маємо

(1 / T) ∫ | k (т) | dт = (1 / T) [∫ | k (т) | dт + ∫ | k (т) | dт ≤ (1 / T) ∫ | k (т) | dт ε (1 - T_1 / T).

Переходячи до межі при T → ∞, знайдемо

0 ≤ lim ∫ | k (т) | dт = ε.

Оскільки тут ε> 0 - довільна, скільки завгодно мала величина, то виконується умова ергодичності з математичного очікування. Оскільки це випливає з умови

Про необмеженому зменшенні k (т), то теорему слід вважати доведеною.

Доведені теореми встановлюють конструктивні ознаки ергодичності стаціонарних випадкових процесів

Нехай

X (t) = m + X (t), m = const.

Тоді M [X (T)] = m, і якщо X (t) - ергодичний стаціонарний випадковий процес, то умова ергодичності Lim M {| (1 / T) ∫ X (t) dt | [2]} = 0 після нескладних перетворень можна представити у вигляді

Lim M {[(1 / T) ∫ X (t) dt - m] [2]} = 0

Звідси випливає, що якщо X (t) - ергодичний з математичного очікування стаціонарний випадковий процес, то математичне сподівання процесу X (t) = m + X (t) наближено може бути обчислено за формулою

M = (1 / T) ∫ x (t) dt

Тут T - досить тривалий проміжок часу;

x (t) - реалізація процесу X (t) на відрізку часу [0, T].

Можна розглядати ергодичності стаціонарного випадкового процесу X (t) за кореляційної функції.

Стаціонарний випадковий процес X (t) називається <u>ергодичним за кореляційної функції,</u>якщо

Lim M {[(1 / T) ∫ X (t) X (t + т) dt - k (т)] [2]]} = 0

Звідси випливає, що для ергодичної за кореляційної функції стаціонарного випадкового процесу X (t) можна покласти

k (т) = (1 / T) ∫ x (t) x (t + т) dt

при досить великому T.

Виявляється, умова обмеженості k (т) досить для ергодичності за кореляційної функції стаціонарного нормально розподіленого процесу X (t).

Зауважимо, випадковий процес називається <u>нормально розподіленим,</u> якщо будь-яка його скінченновимірна функція розподілу є нормальною.